

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Προτεινόμενα Θέματα

1. Δίνονται οι εξισώσεις $|z - k| + |z + k| = 2v$ (1)
 $||z - ki| - |z + ki|| = v$ (2)

όπου $k > 0$, $v > 0$, $k, v \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$.

α) Αν η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη C_1 και η εξίσωση (2) υπερβολή C_2 , να βρείτε το διάστημα μεταβολής του v ως συνάρτηση του k .

β) Υποθέτουμε ότι $v = k\sqrt{2}$ τότε :

i) για τους μιγαδικούς που ικανοποιούν την (1), δείξτε ότι :

$$|z^2| + |z^2 - k^2| = 3k^2 \quad (3)$$

ii) για τους μιγαδικούς που ικανοποιούν την (2), δείξτε ότι :

$$|z^2| = |z^2 + k^2| \quad (4)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = 0 \text{ και } |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad (1) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι :

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Η $g(x) = f(x) + 3x - 1$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η εξίσωση $f(x) + 3x = 1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο $(0, 1)$.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3f(x)}{x^2 + |f(x)|} = 2$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x^2}$.

- α) Να δείξετε ότι $e^{\mu^2} > 2\mu$ (1), για κάθε $\mu > 1$.
- β) Να δείξετε ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in [1, +\infty)$
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (1, +\infty)$ ώστε $e^{-\kappa^2} + 3\kappa = 18$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 2010$
- $f(xy) \leq xf(y) + yf(x)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Να βρεθεί ο τύπος της f .

5. α) Να δείξετε ότι $(x + 1)e^x \geq 1$, για κάθε $x \geq 0$.

β) Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = e^x - \ln(x + 1) - 1$, για κάθε $x \geq 0$.

- i) Να δείξετε ότι η g είναι “1 – 1”.
- ii) Αν $f'(0) \neq 0$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

6. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$f'(x) + e^{g(x)} = g'(x) + e^{f(x)} = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = g(1) = 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{-f(x)} - x$ είναι σταθερή.
- γ) Να βρεθεί ο τύπος της f .
- δ) Να αποδείξετε ότι $e^x > 1 - f(1 + x)$ για κάθε $x > 0$.
- ε) Αν $\theta > 0$ και ισχύει $\theta^x \geq 1 - f(1 + x)$ για κάθε $x > -1$, να βρεθεί η τιμή του θ .

7. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με

$$[f(x) + x] \cdot [f(y) + y] = f(x + y) + x + y \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} .$$

Αν $f(1) = \pi - 1$, να δείξετε ότι :

α) $f(0) = 1$

β) $f(x) \neq -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) $[f'(x) + 1] \cdot [f(y) + y] = [f'(y) + 1] \cdot [f(x) + x]$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.