ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1) Να αποδείξετε ότι :

α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

β) $(\alpha-2\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2+3\alpha^2=3\beta^2$

γ) $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)-(3\alpha-\beta)^2=\alpha^2+4\beta^2$

δ) $(\alpha-1)(\alpha+1)^3-2\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^4-1$

ε) $(\alpha\beta-1)^2+(\alpha+\beta)^2=(\alpha^2+1)(\beta^2+1)$

στ) $(\chi^2+\psi^2)^2-(2\chi\psi)^2=(\chi^2-\psi^2)^2$

ζ) $(\chi-4)^2+(2\chi-3)^2=\chi^2+(2\chi-5)^2$

2) Να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}-\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3$

β) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^2=\dfrac{4\beta}{\alpha}$

γ) $\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\right)^2=1$

δ) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}+\dfrac{2\beta}{\alpha}=\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$

ε) $\dfrac{\alpha^2-2}{6\alpha\beta}\cdot\dfrac{18\beta^3}{5\alpha^4-10\alpha^2}=\dfrac{3\beta^2}{5\alpha^3}$

στ) $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha}$

3) α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha\beta=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

β) Να γράψετε τον αριθμό 2004 σαν άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων

4) α) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)=\alpha^8-\beta^8$

β) Να υπολογίστε το γινόμενο : $9\cdot11\cdot101\cdot10001$

5) α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης : Α= $\dfrac{56^3-44^3}{12}+56\cdot44$

6) α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{\chi(\chi-1)}=\dfrac{1}{\chi-1}-\dfrac{1}{\chi}$

β) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+...+\dfrac{1}{2007\cdot2008}=\dfrac{2007}{2008}$

7) α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^4+4\beta^4}{(\alpha-\beta)^2+\beta^2}-(\alpha+\beta)^2=\beta^2$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $\dfrac{2008^4+4}{2007^2+1}-2009^2$

8) Αν $\beta^2=\alpha\gamma$ να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}$

9) Αν $\alpha\beta=1$ να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+1}-\dfrac{\beta^3}{\beta^2+1}=\alpha-\beta$

10) Αν $\alpha-\beta=1$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3-\beta^2\alpha+\beta^3-\alpha^2\beta=\alpha+\beta$

11) Αν $\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$ και $\alpha\beta=-\dfrac{7}{3}$ να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{43}{9}$ και β) $(3\alpha+1)^2+(3\beta+1)^2+9(\alpha+\beta)=40$

12) Αν μεταξύ των πλευρών α,β,γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει : $\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=0$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

13) Αν για τους αριθμούς α,β ισχύουν : $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$ και $\alpha^3+\beta^3=\dfrac{65}{8}$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι

14) Αν $\alpha\chi+\beta\psi=\alpha\psi+\beta\chi$ να αποδείξετε ότι : α=β ή χ=ψ

15) Αν για τους αριθμούς α,β ισχύει ότι : $\alpha^4-2\beta^2=\alpha^2(\beta^2-2)$ να αποδείξετε ότι οι α,β είναι ίσοι ή αντίθετοι

16) Αν $\alpha^2+4\beta\gamma=2\alpha\beta+2\alpha\gamma$ να αποδείξετε ότι : $\alpha=2\beta$ ή $\alpha=2\gamma$

17) Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\alpha\beta+2\beta\gamma-\beta^2$ να αποδείξετε ότι : $\alpha=\beta$ και $\beta=\gamma$

18) Αν $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma$

19) Αν $\alpha^2+\beta^2+\chi^2+\psi^2=2\alpha\beta+2\chi\psi$ να αποδείξετε ότι : $\alpha=\beta$ και $\chi=\psi$

20) Να βρεθούν οι αριθμοί χ, ψ ώστε να ισχύει : $\chi^2+\psi^2+6\chi+8\psi+25=0$

21) Αν $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$, με $\alpha\beta\gamma\neq0$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$

22) Αν $\chi=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ και $\psi=\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ με $\alpha\neq0$, να αποδείξτε ότι : $\chi^2-\psi^2=4$