

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γενικά ορίζεται, ως το υποσύνολο του  $R$ , για τις τιμές του οποίου, ορίζεται ο τύπος της συνάρτησης.

Ειδικότερα, αν η συνάρτηση είναι :

α) **Πολυώνυμο** :  $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Τότε  $A = R$

β) **Ρητή** :  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Τότε  $A = R - \{x \in R : Q(x) = 0\}$  ή  $A = \{x \in R : Q(x) \neq 0\}$

- Αφαιρούνται από το  $R$ , οι τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή

γ) **Άρρητη** :  $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$

Τότε  $A = \{x \in R : P(x) \geq 0\}$

- Τα υπόριζα να είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός

δ) **Τριγωνομετρική**

i)  $f(x) = \eta\mu P(x)$

Τότε  $A = R$

ii)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu P(x)$

Τότε  $A = R$

iii)  $f(x) = \varepsilon\phi P(x)$

Τότε  $A = R - \{x \in R : \sigma\upsilon\nu P(x) = 0\}$

iv)  $f(x) = \sigma\phi P(x)$

Τότε  $A = R - \{x \in R : \eta\mu P(x) = 0\}$

ε) **Λογαριθμική** :  $f(x) = \log P(x)$  ή  $f(x) = \ln P(x)$

Τότε  $A = \{x \in R : P(x) > 0\}$

- Το περιεχόμενο μεγαλύτερο, αυστηρώς, του μηδενός

στ) **Εκθετική** :  $f(x) = [P(x)]^{Q(x)}$

Τότε  $A = \{x \in R : P(x) > 0\}$

- Η βάση, αυστηρώς, μεγαλύτερη του μηδενός

ζ) **Συνδυασμός** των παραπάνω

Τότε το πεδίο ορισμού  $A$  είναι η τομή των επιμέρους πεδίων ορισμών

### Παραδείγματα

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α)  $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$                       β)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 2}$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$\delta) f(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$$

$$\epsilon) f(x) = \epsilon\phi(4x - \pi)$$

$$\sigma\tau) f(x) = \ln(2x^2 - 8)$$

$$\zeta) f(x) = (x-2)^{x-3}$$

$$\eta) f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\log x}$$

### Επίλυση

α) Επειδή η  $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$  είναι πολυώνυμο, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $A = \mathbb{R}$

β) Επειδή η  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 2}$  είναι ρητή συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της ,

είναι το  $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$

$$\text{Αλλά } 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Άρα } A = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$$

γ) Επειδή η  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  είναι άρρητη, το πεδίο ορισμού της, είναι το

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\}$$

$$\text{Αλλά } 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Άρα } A = [-2, 2]$$

δ) Επειδή η  $f(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$  είναι τριγωνομετρική της μορφής ημιτόνου το πεδίο ορισμού, είναι το  $A = \mathbb{R}$

ε) Επειδή η  $f(x) = \epsilon\phi(4x - \pi)$  είναι τριγωνομετρική, της μορφής εφαπτομένης το πεδίο ορισμού της είναι το  $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu(4x - \pi) = 0\}$

$$\text{Αλλά } \sigma\upsilon\nu(4x - \pi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(4x - \pi) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x - \pi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 4x - \pi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \text{ ή } x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα } A = \mathbb{R} - \left\{\frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right\}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

στ) Επειδή η  $f(x) = \ln(2x^2 - 8)$  είναι λογαριθμική, το πεδίο ορισμού της είναι το

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 8 > 0\}$$

$$\text{Αλλά } 2x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ή } x < -2$$

$$\text{Άρα } A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

ζ) Επειδή η  $f(x) = (x-2)^{x-3}$  είναι εκθετική, το πεδίο ορισμού της , είναι το

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\}$$

$$\text{Αλλά } x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ οπότε } A = (2, +\infty)$$

στ) Επειδή η  $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\log x}$  είναι συνδυασμός, το πεδίο ορισμού της είναι το

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3-x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \log x \neq 0\}$$

Αλλά  $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$  και  $x > 0$  και  $\log x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Οπότε  $x \leq 3$  και  $x > 0$  και  $x \neq 1$

$$\text{Άρα } A = (0,1) \cup (1,3]$$

### ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορίζεται, ως το υποσύνολο του  $R$ , οι τιμές του οποίου αντιστοιχίζονται με κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού  $A$ , της συνάρτησης

Υπολογίζεται, ως εξής :

-Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού  $A$ , της συνάρτησης

-Λύνουμε στο  $A$ , την εξίσωση τη συνάρτησης  $\psi = f(\chi)$ , ως προς  $\chi$  με παράμετρο

την μεταβλητή  $\psi$

- Το σύνολο των στοιχείων  $\psi \in R$ , για τα οποία υπάρχει πραγματική λύση ως προς  $\chi$ , της παραπάνω εξίσωσης, αποτελεί το πεδίο ( ή σύνολο ) τιμών της συνάρτησης

#### Παρατήρηση

Κατά την διαδικασία επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης ως προς  $\chi$ , πρέπει να λαμβάνονται υπόψη, όλοι οι απαραίτητοι περιορισμοί, ώστε η εξίσωση να έχει πραγματική λύση

#### Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(\chi) = 1 - \sqrt{\chi - 1}$

- Το πεδίο ορισμού τη συνάρτησης είναι το  $A = \{\chi \in R : \chi - 1 \geq 0\}$

Αλλά  $\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$  Άρα  $A = [1, +\infty)$

Θέτω  $\psi = f(\chi)$ . Οπότε

$$\begin{aligned}\psi = f(\chi) &\Leftrightarrow \psi = 1 - \sqrt{\chi - 1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\chi - 1} = 1 - \psi. \quad \text{Πρέπει } 1 - \psi \geq 0 \Leftrightarrow \psi \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \chi - 1 = (1 - \psi)^2 \\ &\Leftrightarrow \chi = 1 + (1 - \psi)^2\end{aligned}$$

Επειδή  $\chi \in A \Leftrightarrow \chi \in [1, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \chi \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1 - \psi)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \psi)^2 \geq 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \psi \in R$$

Οπότε τελικά ισχύει ότι :  $\psi \leq 1$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$ , είναι το  $f(A) = \{\psi \in R : \psi \leq 1\} = (-\infty, 1]$

## ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

-Ορίζεται , ως το σύνολο των σημείων, ενός συστήματος συντεταγμένων, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση  $\psi = f(\chi)$  της συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$

- Τέμνει τον άξονα  $\chi'\chi$  , στα σημεία  $M(\chi,\psi)$ , στα οποία  $\psi=0$

( Λύση της εξίσωσης  $f(\chi) = 0$  )

- Τέμνει τον άξονα  $\psi'\psi$  , στα σημεία  $M(\chi,\psi)$  , στα οποία  $\chi=0$

( Λύση της εξίσωσης  $\psi = f(0)$  )

- Διέρχεται από το σημείο  $P(\alpha,\beta)$  αν και μόνο αν  $\beta = f(\alpha)$

( Οι συντεταγμένες του σημείου P ,επαληθεύουν την εξίσωση  $\psi = f(\chi)$

της συνάρτησης )

- Τέμνει την γραφική παράσταση μίας άλλης συνάρτησης  $g$  , στα σημεία  $P(\chi,\psi)$

των οποίων οι συντεταγμένες αποτελούν λύση του συστήματος  $\begin{cases} \psi=f(\chi) \\ \psi=g(\chi) \end{cases}$  ή

ισοδύναμα αποτελούν λύση της εξίσωσης  $f(\chi) = g(\chi)$

- Βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $\chi'\chi$  , όταν τα σημεία της  $M(\chi,\psi)$  επαληθεύουν την ανίσωση  $f(\chi) > 0$

- Βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $\chi'\chi$  , όταν τα σημεία της  $M(\chi,\psi)$  επαληθεύουν την ανίσωση  $f(\chi) < 0$

### Παρατηρήσεις

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης , βρίσκεται από την γραφική της παράσταση, ως το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης, στον άξονα  $\chi'\chi$

- Το πεδίο τιμών της συνάρτησης, βρίσκεται από την γραφική παράσταση, ως το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης, στον άξονα  $\psi'\psi$

- Κάθε ευθεία, κάθετη στον άξονα  $\chi'\chi$  , τέμνει την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης , σε ένα το πολύ σημείο

- Αντίστροφα, όταν κάθε ευθεία κάθετη στον άξονα  $\chi'\chi$  , τέμνει μία γραφική παράσταση σε ένα το πολύ σημείο, τότε η γραφική παράσταση είναι γραφική παράσταση συνάρτησης

### Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση  $f(\chi) = \chi^2 + \chi - 2$

α) Για ποιες τιμές του  $\chi \in R$ , η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $\chi'\chi$ ;

β) Για ποιες τιμές του  $\chi \in R$ , η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(\chi) = \chi^3 + \chi - 2$  ;

γ) Σε ποια σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$  , τους δύο άξονες ;

- Προφανώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $A=R$

α) Οι τιμές του  $\chi \in R$  , για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  , είναι πάνω από τον άξονα  $\chi'\chi$  , είναι οι τιμές για τις οποίες ισχύει η ανισότητα  $f(\chi) > 0$

$$\text{Αλλά } f(\chi) > 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \chi < -2 \text{ ή } \chi > 1$$

β) Οι τιμές του  $\chi \in R$ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$ , βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της  $g$ , είναι οι τιμές για τις οποίες ισχύει η ανισότητα  $f(\chi) < g(\chi)$

$$\text{Αλλά } f(\chi) < g(\chi) \Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 2 < \chi^3 + \chi - 2$$

$$\Leftrightarrow \chi^3 - \chi^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \chi^2(\chi - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \chi > 1, \text{ αφού } \chi^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \chi \in R$$

γ) Τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $\chi'\chi$ , είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι :  $f(\chi) = 0$

$$\text{Άρα } f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi = 1 \text{ ή } \chi = -2$$

Οπότε τα σημεία αυτά είναι :  $M(1, f(1)) = M(1, 0)$  και  $N(-2, f(-2)) = N(-2, 0)$

Τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $\psi'\psi$ , είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι :  $\psi = f(0)$

$$\text{Άρα } \psi = f(0) \Leftrightarrow \psi = 0^2 + 0 - 2$$

$$\Leftrightarrow \psi = -2$$

Οπότε το σημείο είναι το  $K(0, -2)$

## ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Δύο συναρτήσεις είναι ίσες  $f = g$ , όταν :

α) Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Δηλαδή  $A_f = A_g$

β) Παίρνουν τις ίδιες τιμές. Δηλαδή  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x$

( Η ισότητα αυτή δηλώνει ισότητα τιμών και όχι κατά ανάγκη ισότητα τύπων )

-Άθροισμα συναρτήσεων με :

$$A_{f+g} = A_f \cap A_g \quad \text{και} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

-Διαφορά συναρτήσεων με :

$$A_{f-g} = A_f \cap A_g \quad \text{και} \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

-Γινόμενο αριθμού επί συνάρτηση με :

$$A_{\lambda f} = A_f \quad \text{και} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

-Γινόμενο συναρτήσεων με :

$$A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g \quad \text{και} \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

- Πηλίκο συναρτήσεων με :

$$A_{f/g} = A_f \cap A_g - \{x \in R : g(x) = 0\} \quad \text{και} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Σύνθεση συναρτήσεων με :

$$A_{g \circ f} = \{x \in R : x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} \quad \text{και} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### Παρατηρήσεις

α) Για το άθροισμα συναρτήσεων ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες

β) Για το γινόμενο συναρτήσεων ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες, με την επιφύλαξη της μηδενικής συνάρτησης

γ) Για την σύνθεση των συναρτήσεων

$$\text{Ισχύει πάντα η προσεταιριστική ιδιότητα} \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

$$\underline{\text{Δεν}} \text{ ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα} \quad f \circ g \neq g \circ f$$

### Παραδείγματα

1) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = \sqrt{1-x}$ . Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις  $f+g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f \circ g$  και  $g \circ f$

- Το πεδίο ορισμού της  $f$ , είναι το  $A_f = \{x \in R : x \geq 0\} = [0, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της  $g$ , είναι το  $A_g = \{x \in R : 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1]$

Οπότε

- Το πεδίο ορισμού της  $f+g$  είναι το  $A_{f+g} = A_f \cap A_g = [0, 1]$  και

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

- Το πεδίο ορισμού της  $f \cdot g$  είναι το  $A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g = [0, 1]$  και  
 $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$

- Το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$  είναι το  $A_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$   
 Αλλά  $x \in A_g \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \Leftrightarrow x \leq 1$  και  
 $g(x) \in A_f \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \in [0, +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \geq 0$  που ισχύει για κάθε  $x$   
 Άρα  $A_{f \circ g} = (-\infty, 1]$

Επίσης είναι  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sqrt{1-x}} = \sqrt[4]{1-x}$

- Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  είναι το  $A_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$   
 Αλλά  $x \in A_f \Leftrightarrow x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow x \geq 0$  και  
 $f(x) \in A_g \Leftrightarrow f(x) \in (-\infty, 1] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$   
 Οπότε  $A_{g \circ f} = [0, 1]$

Επίσης είναι  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-f(x)} = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

**2)** Να αναλυθεί η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu^2(3x)$  ως άθροισμα δύο ή περισσότερων συναρτήσεων

- Θεωρώ τις συναρτήσεις  
 $g(x) = 3x$ ,  $h(x) = \eta\mu x$  και  $\phi(x) = x^2$   
 Προφανώς είναι  $h(g(x)) = \eta\mu 3x$  και  $\phi(h(g(x))) = \eta\mu^2 3x$   
 Άρα  $f(x) = \phi(h(g(x)))$

**3)** Αν για την συνάρτηση  $f$ , ισχύει ότι  $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$  για κάθε  $x \neq 0$ , να

βρεθούν το  $f(1)$  και ο τύπος της συνάρτησης,  $f(x)$

- Η παραπάνω ισότητα για  $x=1$  γίνεται

$$2f(1) - 3f\left(\frac{1}{1}\right) = 1^2 \Leftrightarrow f(1) = -1$$

Επίσης, η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε  $x \neq 0$ , οπότε θα ισχύει και αν στη θέση του  $x$ , βάλουμε το  $\frac{1}{x}$

$$\text{Δηλαδή ισχύει ότι } 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (2)$$

Από την αρχική σχέση και την σχέση (2) με την μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών

$$\text{προκύπτει ότι } f(x) = -\frac{2x^2}{5} - \frac{3}{5x^2}$$

### MONOTONIA ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  και συμβολίζεται με  $f \uparrow$  όταν :

Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  είναι και  $f(x_1) < f(x_2)$

- Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  και συμβολίζεται με  $f \downarrow$  όταν :

Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  είναι και  $f(x_1) > f(x_2)$

- Μία συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

#### Παρατηρήσεις

α) Οι παραπάνω ορισμοί δίνονται για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Μπορούν να δοθούν και για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 > x_2$

Γενικά, μας ενδιαφέρει αν η ανισότητα που ισχύει στα  $x_1, x_2$  είναι ομόστροφη και για τα  $f(x_1), f(x_2)$  (γνησίως αύξουσα) ή είναι ετερόστροφη ( γνησίως φθίνουσα)

β) Μία συνάρτηση, μπορεί να μην είναι μονότονη στο πεδίο ορισμού της, αλλά μπορεί να είναι μονότονη σε υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.

Τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι μονότονη κατά διαστήματα

γ) Η γραφική παράσταση μίας γνησίως αύξουσας συνάρτησης, ανεβαίνει όσο το  $x$  προχωρά από το  $-\infty$  στο  $+\infty$  (από τα αριστερά προς τα δεξιά )

#### Για τις ασκήσεις

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε την μονοτονία μίας συνάρτησης  $f$ , με την βοήθεια των ορισμών. Τότε :

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία  $x_1, x_2$  του πεδίου ορισμού με  $x_1 < x_2$

Προσπαθούμε να βρούμε τα διαστήματα για τα οποία είναι  $f(x_1) < f(x_2)$

(γνησίως αύξουσα) και τα διαστήματα για τα οποία είναι  $f(x_1) > f(x_2)$  (γνησίως φθίνουσα)

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους

α) Ξεκινώντας από την ανισότητα  $x_1 < x_2$ , προσπαθούμε να κατασκευάσουμε στα δύο μέλη της ανισότητας τις τιμές των  $f(x_1), f(x_2)$

β) Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς  $f(x_1) - f(x_2)$

#### Παράδειγμα

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1-x}$

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , είναι το  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1]$

1<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $\chi_1, \chi_2 \in (-\infty, 1]$  με  $\chi_1 < \chi_2$ . Τότε είναι :

$$\begin{aligned}\chi_1 < \chi_2 &\Leftrightarrow -\chi_1 > -\chi_2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \chi_1 > 1 - \chi_2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \chi_1} > \sqrt{1 - \chi_2} \text{ αφού } 1 - \chi_1 \geq 0 \text{ και } 1 - \chi_2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2)\end{aligned}$$

Άρα η  $f$ , είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $\chi_1, \chi_2 \in (-\infty, 1]$  με  $\chi_1 < \chi_2$ . Τότε είναι :

$$\begin{aligned}f(\chi_1) - f(\chi_2) &= \sqrt{1 - \chi_1} - \sqrt{1 - \chi_2} \\ &= \frac{(\sqrt{1 - \chi_1} - \sqrt{1 - \chi_2})(\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2})}{\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1 - \chi_1})^2 - (\sqrt{1 - \chi_2})^2}{\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2}} \\ &= \frac{-\chi_1 + \chi_2}{\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2}} \\ &= \frac{-(\chi_1 - \chi_2)}{\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2}}\end{aligned}$$

Επειδή  $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 - \chi_2 < 0$  είναι και  $f(\chi_1) - f(\chi_2) > 0$  αφού

$\sqrt{1 - \chi_1} + \sqrt{1 - \chi_2} > 0$ . Άρα είναι  $f(\chi_1) > f(\chi_2)$

Οπότε η συνάρτηση  $f$ , είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$

### ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0$ , το  $f(x_0)$  όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .
- Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ , το  $f(x_0)$  όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

### Παρατηρήσεις

- 1) Το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης, είναι σημεία της γραφικής παράστασης, οπότε καθορίζονται πάντα και από τις δύο συντεταγμένες τους  $(x_0, f(x_0))$
- 2) Το μέγιστο μιας συνάρτησης, είναι το ψηλότερο σημείο, της γραφικής παράστασης της.  
Το ελάχιστο μιας συνάρτησης, είναι το χαμηλότερο σημείο, της γραφικής παράστασής της.
- 3) Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης.

### Για τις ασκήσεις

Όταν ζητείται να προσδιοριστούν τα ακρότατα μιας συνάρτησης  $f$

Τότε:

- Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της  $f$
- Ξεκινώντας από μια βασική ανισότητα, η οποία υποδηλώνεται από το τύπο της  $f$ , προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μια ανισότητα για την τυχαία τιμή της συνάρτησης, την  $f(x)$ .

Η ανισότητα αυτή έχει την μορφή  $f(x) \geq a$  ή  $f(x) \leq a$  όπου το  $a$  είναι αριθμός.

- Προσδιορίζουμε αν το  $a$  είναι τιμή της συνάρτησης. Αν δηλαδή υπάρχει  $x_0$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = a$

Βασικές ανισότητες, από τις οποίες συνήθως ξεκινάμε είναι οι εξής:

$$\sqrt{x} \geq 0, |x| \geq 0, x^{2k} \geq 0 \text{ με } k \in \mathbb{Z}, -1 \leq \eta\mu\chi \leq 1, -1 \leq \sigma\upsilon\nu\chi \leq 1$$

### Παράδειγμα

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

-Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

Προφανώς ισχύει ότι :

$$\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \text{ και } f(x) \geq f(-1) \text{ αφού } f(1) = f(-1) = 0$$

Άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το 0 σε δύο θέσεις, τις  $x=1$  και  $x=-1$

Επίσης ισχύει ότι :

$$\begin{aligned}
 x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - x^2 \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow f(x) \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow f(x) \leq f(0)
 \end{aligned}$$

Άρα η  $f$ , παρουσιάζει μέγιστο στο  $x = 0$  το  $f(0) = 1$

### **Παρατήρηση**

Τα ακρότατα μίας συνάρτησης, μπορούν να υπολογιστούν και από το σύνολο τιμών της συνάρτησης, εάν βέβαια αυτό είναι γνωστό.

Συγκεκριμένα :

- Αν αυτό είναι της μορφής  $(\alpha, \beta]$ , τότε η συνάρτηση έχει μέγιστο το  $\beta$
- Αν αυτό είναι της μορφής  $[\alpha, \beta)$ , τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο το  $\alpha$
- Αν αυτό είναι της μορφής  $[\alpha, \beta]$ , τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο το  $\alpha$  και μέγιστο το  $\beta$
- Αν αυτό είναι της μορφής  $(\alpha, \beta)$ , τότε η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα

### ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

- Μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  είναι και  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Ο παραπάνω ορισμός της 1-1 συνάρτησης είναι ισοδύναμος και με τον εξής :  
Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , είναι συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  είναι και  $x_1 = x_2$

#### Παρατηρήσεις

- 1) Κάθε οριζόντια ευθεία, τέμνει την γραφική παράσταση μίας 1-1 συνάρτησης, σε ένα το πολύ σημείο
- 2) Αν  $\psi$  είναι ένα στοιχείο του συνόλου τιμών της συνάρτησης  $f$ , τότε η εξίσωση  $\psi = f(x)$  έχει ακριβώς μία λύση, ως προς  $x$ .

#### Για τις ασκήσεις

- Όταν μας ζητάνε να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση  $f$ , είναι 1-1  
Τότε:  
- Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της  $f$ , το  $A$   
- Μετά έχουμε τους εξής τρόπους, για να συνεχίσουμε  
α) Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία  $x_1, x_2 \in A$ , με  $x_1 \neq x_2$  και προσπαθούμε κατασκευαστικά να δείξουμε ότι και  $f(x_1) \neq f(x_2)$   
β) Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία  $x_1, x_2 \in A$ , με  $f(x_1) = f(x_2)$  και προσπαθούμε να δείξουμε είναι κατ'ανάγκη και  $x_1 = x_2$   
( αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλος δυνατός συνδυασμός για τα  $x_1$  και  $x_2$  )  
γ) Θεωρώντας ένα στοιχείο  $\psi$ , του συνόλου τιμών της  $f$ , λύνουμε την εξίσωση  $\psi = f(x)$  ως προς  $x$ , στο  $A$ . Αν η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση ως προς  $x$ , τότε η συνάρτηση είναι 1-1

#### Παραδείγματα

- 1) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} + 1$  είναι 1-1

- Το πεδίο ορισμού της  $f$ , είναι το  $A = \mathbb{R}$

##### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$ . Τότε είναι :

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Leftrightarrow -x_1 \neq -x_2 \\ &\Leftrightarrow e^{-x_1} \neq e^{-x_2} \quad (\text{διότι η συνάρτηση } g(x) = e^x \text{ είναι 1-1}) \\ &\Leftrightarrow e^{-x_1} + 1 \neq e^{-x_2} + 1 \\ &\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η  $f$ , είναι 1-1 συνάρτηση

##### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $\chi_1, \chi_2 \in A$  με  $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ . Τότε είναι :

$$f(\chi_1) = f(\chi_2) \Leftrightarrow e^{-\chi_1} + 1 = e^{-\chi_2} + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\chi_1} = e^{-\chi_2}$$

$$\Leftrightarrow -\chi_1 = -\chi_2 \text{ ( διότι η συνάρτηση } g(\chi) = e^\chi \text{ είναι 1-1 )}$$

$$\Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$$

Άρα η  $f$ , είναι 1-1 συνάρτηση

### 3<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $\psi$ , ένα στοιχείο του συνόλου τιμών της συνάρτησης  $f$ . Τότε για την εξίσωση

$\psi = f(\chi)$  έχουμε :

$$\psi = f(\chi) \Leftrightarrow \psi = e^{-\chi} + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\chi} = \psi - 1$$

$$\Leftrightarrow -\chi = \ln(\psi - 1) \text{ , με } \psi > 1$$

$$\Leftrightarrow \chi = -\ln(\psi - 1)$$

Δηλαδή η εξίσωση  $\psi = f(\chi)$ , για κάθε τιμή του  $\psi$ , έχει μία μόνο λύση ως προς  $\chi$

Άρα η  $f$ , είναι 1-1 συνάρτηση

**2)** Να αποδειχτεί ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f$ , είναι και 1-1

- Έστω ότι η  $f$ , είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε :

Αν  $\chi_1, \chi_2 \in A$ , με  $\chi_1 \neq \chi_2$  θα είναι  $\chi_1 < \chi_2$  ή  $\chi_1 > \chi_2$

Έστω  $\chi_1 < \chi_2$ , τότε είναι και  $f(\chi_1) < f(\chi_2)$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα είναι  $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$

Έστω  $\chi_1 > \chi_2$ , τότε είναι και  $f(\chi_1) > f(\chi_2)$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα είναι  $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ,είναι  $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$ .

Άρα η  $f$ , είναι 1-1 συνάρτηση

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν η  $f$ , είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση , είναι και 1-1

### ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

-Έστω μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  και σύνολο τιμών το  $f(A)$

Αν η  $f$  είναι 1-1 συνάρτηση, τότε κάθε στοιχείο  $\psi$ , του συνόλου τιμών  $f(A)$ , συνδέεται με ένα μόνο στοιχείο  $\chi$  του  $A$ .

Έτσι ορίζεται μία συνάρτηση  $g$ , για την οποία ισχύουν :

$$1) \quad g: f(A) \rightarrow A$$

2) Κάθε στοιχείο  $\psi \in f(A)$  αντιστοιχίζεται στο μοναδικό  $\chi \in A$ , για το οποίο ισχύει  $f(\chi) = \psi$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  και συμβολίζεται με  $f^{-1}$

#### Παρατηρήσεις

1) Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}$ , είναι το σύνολο τιμών της  $f$

2) Το σύνολο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}$ , είναι το πεδίο ορισμού της  $f$

3) Για οποιαδήποτε  $x \in A$  ισχύει ότι :  $f(x) = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = x$

4) Για να ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, μίας συνάρτησης  $f$ , πρέπει η  $f$  να είναι οπωσδήποτε 1-1

5) Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$f^{-1}(f(\chi)) = \chi \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(\psi)) = \psi \quad \text{για κάθε } x \in A \text{ και } \psi \in f(A)$$

6) Οι γραφικές παραστάσεις, δύο αντίστροφων συναρτήσεων, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $\psi = \chi$ , που είναι διχοτόμος των γωνιών  $\chi\hat{o}\psi$  και  $\chi'\hat{o}\psi'$  των αξόνων

#### Για τις ασκήσεις

Όταν ζητείται να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση, μιας συνάρτησης  $f$ .

Τότε:

- Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της  $f$ .

- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1

- Αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 τότε αντιστρέφεται και για να βρούμε την αντίστροφή της κάνουμε τα εξής:

$$i) \quad \text{Θέτουμε } \psi = f(\chi)$$

ii) Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς  $\chi$

iii) Παίρνουμε περιορισμούς που να εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της παραπάνω λύσης ως προς  $\chi$ .

Οι περιορισμοί αυτοί είναι δύο ειδών :

α) Περιορισμοί που αφορούν την ισχύ, των ισοδυναμιών της λύσης της εξίσωσης.

β) Περιορισμοί, στους οποίους υπόκεινται το  $\psi$ , από το γεγονός ότι πρέπει

το  $\chi \in A$ .

### Παράδειγμα

Να βρεθεί η αντίστροφη (αν υπάρχει) συνάρτηση, της  $f(\chi) = 1 + \ln(\chi - 2)$

- Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \{\chi \in R : \chi - 2 > 0\} = (2, +\infty)$

- Έστω  $\chi_1, \chi_2 \in (2, +\infty)$  με  $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ . Τότε είναι

$$f(\chi_1) = f(\chi_2) \Leftrightarrow 1 + \ln(\chi_1 - 2) = 1 + \ln(\chi_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\chi_1 - 2) = \ln(\chi_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \chi_1 - 2 = \chi_2 - 2 \quad \text{αφού η συνάρτηση } g(\chi) = \ln \chi \text{ είναι 1-1}$$

$$\Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1 συνάρτηση

- Επειδή η  $f$  είναι 1-1 συνάρτηση, αντιστρέφεται.

Έστω  $\psi = f(\chi)$  τότε

$$\psi = f(\chi) \Leftrightarrow \psi = 1 + \ln(\chi - 2)$$

$$\Leftrightarrow \psi - 1 = \ln(\chi - 2)$$

$$\Leftrightarrow \chi - 2 = e^{\psi - 1}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 2 + e^{\psi - 1}$$

$$\text{Επειδή } \chi \in (2, +\infty) \Leftrightarrow \chi > 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + e^{\psi - 1} > 2$$

$$\Leftrightarrow e^{\psi - 1} > 0$$

Το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε  $\psi \in R$

Άρα το  $f(A) = R$

Οπότε η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται ως εξής :

$$f^{-1} : R \rightarrow (2, +\infty) \text{ με } f^{-1}(\chi) = 2 + e^{\chi - 1}$$

( Στην ισότητα  $f^{-1}(\psi) = 2 + e^{\psi - 1}$  έβαλα όταν  $\psi$  το  $\chi$  )