ΕΥΘΕΙΑ
Στοιχεία θεωρίας απαραίτητα για τις ασκήσεις

1) Εξίσωση μίας γραμμής , ονομάζεται μία εξίσωση με δύο αγνώστους , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της γραμμής και μόνο αυτές , επαληθεύουν την εξίσωση

2) Τα σημεία στα οποία τέμνει μία γραμμή τον άξονα $\chi'\chi$, είναι αυτά , που έχουν τεταγμένη 0. Δηλαδή τα σημεία της μορφής Α(χ,0)

3) Τα σημεία στα οποία τέμνει μία γραμμή τον άξονα $\psi'\psi$, είναι αυτά , που έχουν τετμημένη 0. Δηλαδή τα σημεία της μορφής Α(0,ψ)

4) Τα σημεία τομής δύο γραμμών , είναι αυτά που οι συντεταγμένες τους , αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο γραμμών

5) Μία γραμμή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\chi'\chi$, όταν, αν θέσουμε όπου ψ το –ψ , δεν μεταβάλλεται η εξίσωση της

6) Μία γραμμή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\psi'\psi$, όταν, αν θέσουμε όπου χ το –χ , δεν μεταβάλλεται η εξίσωση της

7) Αν $\mathrm{A}(\chi_1,\psi_1)$ και $\mathrm{B}(\chi_2,\psi_2)$, τότε $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}$, με $\chi_2 \neq \chi_1$

8) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2$

9) Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

10) Αν $\varepsilon \parallel \vec{\alpha}$ τότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\alpha}}$

11) **Εξισώσεις ευθείας**

α) Αν διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\chi_0,\psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

$$\psi-\psi_0=\lambda(\chi-\chi_0)$$

β) Αν διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\chi_1,\psi_1)$ και $\mathrm{B}(\chi_2,\psi_2)$

$$\psi-\psi_1=\frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}(\chi-\chi_1)$$

γ) Αν διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\chi_0,\psi_0)$ και είναι κατακόρυφη

$$\chi=\chi_0$$

δ) Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

$$\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0 \text{ , με } \mathrm{A}\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}\neq 0$$

12) **<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>**

α) Η ευθεία με εξίσωση $\underline{\psi = \lambda\chi + \beta}$, έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$, στο σημείο $\mathrm{A}(0,\beta)$

β) Η ευθεία με εξίσωση $\underline{\psi = \lambda\chi}$, έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) Η ευθεία με εξίσωση $\underline{\psi = \psi_0}$, είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$

13) Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(\mathrm{B}, -\mathrm{A})$

14) Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$

15) Η <u>απόσταση</u> του σημείου $\mathrm{M}(\chi_0, \psi_0)$ από την ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma = 0$ είναι

$$d(\mathrm{M}, \varepsilon) = \frac{|\mathrm{A}\chi_0 + \mathrm{B}\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

16) Το <u>εμβαδόν</u> του τριγώνου ΑΒΓ με $\mathrm{A}(\chi_1, \psi_1)$, $\mathrm{B}(\chi_2, \psi_2)$ και $\Gamma(\chi_3, \psi_3)$ είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$$

<u>Περίπτωση 1η</u>

- Όταν μας ζητάνε (ή όταν θέλουμε εμείς , ως μέρος άλλης άσκησης) να βρούμε ένα σημείο

Αυτό βρίσκεται :α) ως σημείο τομής δύο γραμμών

β) ως σημείο ευθύγραμμου τμήματος, που το διαιρεί σε γνωστό λόγο

<u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(3,-2). Να βρεθεί σημείο Μ, του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ώστε (ΑΜ)=2(ΜΒ)

- Έστω Μ(χ,ψ) το σημείο. Τότε θα είναι $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$

Αλλά $\overrightarrow{AM}=(\chi-1,\psi-2)$ και $\overrightarrow{MB}=(3-\chi,-2-\psi)$

Οπότε $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (\chi-1,\psi-2)=2(3-\chi,-2-\psi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi-1=2(3-\chi) \\ \psi-2=2(-2-\psi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi=\frac{7}{3} \\ \psi=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Άρα, το σημείο είναι το $M\left(\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$

2) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση : $\chi^2+\chi-\psi+1=0$

α) Εξετάστε αν το σημείο Α(-1,2) ανήκει στην καμπύλη

β) Βρείτε τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες

γ) Βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η παραπάνω καμπύλη, την καμπύλη με εξίσωση : $\psi=\chi^2$

- α) Επειδή $(-1)^2+(-1)-2+1=-1\neq 0$,το σημείο Α δεν ανήκει στην καμπύλη

β) Η καμπύλη τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$, σε σημείο με συντεταγμένες της μορφής $(\chi,0)$. Άρα πρέπει $\chi^2+\chi-0+1=0 \Leftrightarrow \chi^2+\chi+1=0$. Η εξίσωση αυτή, όμως, είναι αδύνατη. Οπότε η καμπύλη δεν τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$

Η καμπύλη τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$, σε σημείο με συντεταγμένες της μορφής $(0,\psi)$. Άρα πρέπει $0^2+0-\psi+1=0 \Leftrightarrow -\psi+1=0 \Leftrightarrow \psi=1$

Οπότε η καμπύλη τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$, στο σημείο Α(0,1)

γ) Έστω Μ (χ,ψ) το σημείο τομής. Τότε αυτό ανήκει και στις δύο καμπύλες, άρα οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις, οπότε αποτελούν λύση του συστήματος $\begin{cases} \chi^2+\chi-\psi+1=0 \\ \psi=\chi^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=-1 \\ \psi=1 \end{cases}$ Άρα το σημείο τομής είναι το σημείο Α(-1,1)

<u>Περίπτωση 2η</u>

- Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ , μίας ευθείας

Τότε, στηριζόμαστε στα εξής στοιχεία της θεωρίας :

α) Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$, τότε $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}$, με $\chi_2\neq\chi_1$

β) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1=\lambda_2$

γ) Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

δ) Αν $\varepsilon \parallel \vec{\alpha}$ τότε $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\vec{\alpha}}$

ε) Ισχύει ότι $\lambda = \varepsilon\phi\omega$

Παράδειγμα

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(2,-3)$. Να βρεθούν οι συντελεστές διεύθυνσης α) της πλευράς ΑΒ

β) του ύψους ΑΔ

γ) της μεσοκαθέτου της ΒΓ

δ) της διαμέσου ΑΜ

- α) Επειδή οι τετμημένες των σημείων Α, Β είναι ίσες $(\chi_1 = \chi_2 = 1)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ δεν ορίζεται. Δηλαδή η ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα $\chi'\chi$

β) Επειδή το ύψος ΑΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ, θα είναι $\lambda_{\mathrm{A\Delta}} \cdot \lambda_{\mathrm{B\Gamma}} = -1$

Αλλά $\lambda_{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{-3-1}{2-1} = -4$, άρα $\lambda_{\mathrm{A\Delta}} \cdot (-4) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{A\Delta}} = \dfrac{1}{4}$

γ) Η μεσοκάθετος στην πλευρά ΒΓ, είναι και αυτή κάθετος στην ΒΓ. Άρα όπως και προηγουμένως, προκύπτει ότι $\lambda_{\mu} = \dfrac{1}{4}$

δ) Η διάμεσος ΑΜ, διέρχεται από την κορυφή Α(1,2) και το μέσο Μ της ΒΓ

Αλλά, αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ , θα είναι $\mathrm{M}\left(\dfrac{1+2}{2}, \dfrac{1+(-3)}{2}\right) = \mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2}, -1\right)$

Άρα $\lambda_{\mathrm{AM}} = \dfrac{-1-2}{\dfrac{3}{2}-1} = -6$

Περίπτωση 3η

-Όταν ζητείται η εξίσωση μίας ευθείας

Τότε, εξετάζουμε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις

α) Αν δίνονται δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία

β) Αν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης και ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία

γ) Αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις, τότε θεωρούμε την γενική εξίσωση της ευθείας. Συγκεκριμμένα :

i) Την $\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma = 0$ και προσδιορίζουμε τα Α,Β,Γ με $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| \neq 0$

ii) Την $\psi = \lambda\chi + \beta$ και προσδιορίζουμε τα λ,β

Σ'αυτήν την περίπτωση, πρέπει να εξετάσουμε, αν η άσκηση έχει λύση της μορφής $\chi = \chi_0$, δηλαδή ευθεία κάθετη στον άξονα $\chi'\chi$

Παραδείγματα

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(1,1) , Β(-1,3) και Γ(2,-4). Να βρεθούν:

α) η εξίσωση της πλευράς ΒΓ

β) η εξίσωση του ύψους ΑΔ

γ) η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ

δ) η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ

ε) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$, του τριγώνου

- α) Επειδή η ευθεία ΒΓ , διέρχεται από δύο γνωστά σημεία Β(-1,3) και Γ(2,-4), έχει εξίσωση : $\psi - 3 = \frac{-4-3}{2-(-1)}\left(\chi - (-1)\right) \Leftrightarrow \psi = -\frac{7}{3}\chi + \frac{2}{3}$

β) Το ύψος ΑΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ, οπότε $\lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1$.

Αλλά $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{-4-3}{2-(-1)} = -\frac{7}{3}$. Άρα $\lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} = \frac{3}{7}$$

Οπότε η εξίσωση του ύψους είναι : $\psi - 1 = \frac{3}{7}(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{7}\chi + \frac{4}{7}$

γ) Η διάμεσος ΑΜ, διέρχεται από την κορυφή Α(1,1) και το μέσο Μ της ΒΓ, δηλαδή το σημείο $\text{Μ}\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) = \text{Μ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Οπότε , έχει εξίσωση : $\psi - 1 = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = \chi$

δ) Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ, διέρχεται από το μέσο $\text{Μ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ της ΒΓ και είναι κάθετη σ'αυτή, οπότε έχει $\lambda = \frac{3}{7}$ (όπως και το αντίστοιχο ύψος)

Άρα έχει εξίσωση : $\psi - \frac{1}{2} = \frac{3}{7}\left(\chi - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{7}\chi + \frac{25}{14}$

ε) Για την γωνία $\hat{\text{Α}}$, έχουμε ότι : $\sigma\upsilon\nu\text{Α} = \frac{\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΓ}}}{\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|\left|\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right|}$

Αλλά $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = (-1-1, 3-1) = (-2, 2)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = (2-1, -4-1) = (1, -5)$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\text{Α} = \frac{\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΓ}}}{\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|\left|\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right|} = \frac{-2\cdot 1 + 2\cdot(-5)}{\sqrt{(-2)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-5)^2}} = \frac{-12}{\sqrt{8}\sqrt{26}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Παρατήρηση

Την εξίσωση μίας ευθείας , μπορούμε να την υπολογίσουμε και από την γενική εξίσωση της ευθείας ή από τις ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας , προσδιορίζοντας κάθε φορά τους αντίστοιχους συντελεστές

Παραδείγματα

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(1,1) , Β(-1,3) και Γ(2,-4). Να βρεθούν:

α) η εξίσωση της πλευράς ΒΓ

β) η εξίσωση του ύψους ΑΔ

- α) Η ευθεία ΒΓ δεν είναι κατακόρυφη, αφού οι τετμημένες των σημείων Β(-1,3) και Γ(2,-4) είναι διαφορετικές

Έστω $\psi = \lambda\chi + \beta$ η εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

Επειδή αυτή διέρχεται από το σημείο Β(-1,3) , πρέπει : $3 = \lambda\left(-1\right) + \beta \Leftrightarrow -\lambda + \beta = 3$

Επίσης , αυτή διέρχεται από το σημείο Γ(2,-4), άρα : $-4 = \lambda \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 2\lambda + \beta = -4$

Από τις παραπάνω εξισώσεις , προκύπτει ότι $\lambda = -\dfrac{7}{3}$ και $\beta = \dfrac{2}{3}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΒΓ ,είναι $\psi = -\dfrac{7}{3}\chi + \dfrac{2}{3}$

β) Έστω $\psi = \lambda\chi + \beta$ η εξίσωση του ύψους ΑΔ

Επειδή το ύψος ΑΔ είναι κάθετο στη πλευρά ΒΓ , θα είναι

$\lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(-\dfrac{7}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{7}$

Επίσης το ύψος ΑΔ, διέρχεται από το σημείο Α(1,1) ,άρα πρέπει

$1 = \lambda \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \lambda + \beta = 1$. Αλλά $\lambda = \dfrac{3}{7}$, οπότε $\beta = \dfrac{4}{7}$

Επομένως , η εξίσωση του ύψους ΑΔ, είναι $\psi = \dfrac{3}{7}\chi + \dfrac{4}{7}$

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Β(1,2). Το ύψος και η διάμεσος , που διέρχονται από ίδια κορυφή έχουν εξισώσεις χ-2ψ+1=0 και χ-ψ=0 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

- Επειδή οι συντεταγμένες του σημείου Β(1,2), δεν επαληθεύουν τις εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου, διότι : $1 - 2 \cdot 2 + 1 = -2 \neq 0$ και $1 - 2 = -1 \neq 0$, το ύψος και η διάμεσος δεν διέρχονται από το Β, αλλά από άλλη κορυφή. Έστω την Α

Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου

Οι συντεταγμένες του Α, αποτελούν λύση του συστήματος $\begin{cases} \chi - 2\psi + 1 = 0 \\ \chi - \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \psi = 1 \end{cases}$

Άρα το Α(1,1)

Επειδή το ύψος ΑΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ, είναι

$\lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΒΓ}} = -2$

Άρα η πλευρά ΒΓ , διέρχεται από το σημείο Β(1,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=-2, οπότε έχει εξίσωση $\psi - 2 = -2\left(\chi - 1\right) \Leftrightarrow \psi = -2\chi + 4$

Η διάμεσος ΑΜ και η πλευρά ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, που έχει συντεταγμένες την λύση του συστήματος $\begin{cases} \chi - 2\psi + 1 = 0 \\ \psi = -2\chi + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{7}{5} \\ \psi = \frac{6}{5} \end{cases}$ Άρα $\text{Μ}\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

Επειδή το σημείο Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ, αν είναι Γ(α,β) ,τότε

$\dfrac{7}{5} = \dfrac{\alpha + 1}{2}$ και $\dfrac{6}{5} = \dfrac{\beta + 2}{2}$ οπότε $\alpha = \dfrac{9}{5}$ και $\beta = \dfrac{2}{5}$ άρα $\Gamma\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

Η πλευρά ΑΓ, διέρχεται από τα σημεία Α(1,1) και $\Gamma\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ άρα έχει εξίσωση

$$\psi - 1 = \frac{\frac{9}{5} - 1}{\frac{2}{5} - 1}\left(\chi - 1\right) \Leftrightarrow \psi = -\frac{4}{3}\chi + \frac{7}{3}$$

Η πλευρά ΑΒ, διέρχεται από τα σημεία Α(1,1) και $B(1,2)$ άρα έχει εξίσωση χ=1, αφού οι τετμημένες των δύο σημείων είναι ίσες, οπότε η ΑΒ είναι κατακόρυφη ευθεία.

<u>Περίπτωση 4η</u>

Όταν μας δίνεται μία παραμετρική εξίσωση και μας ζητούνε να δείξουμε ότι αυτή παριστάνει οικογένεια ευθειών, που πληρεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα . Συνήθως, ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες μεταξύ τους

<u>Οικογένεια ευθειών</u> , ονομάζονται όλες οι ευθείες , που προκύπτουν από μία παραμετρική εξίσωση, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου

- Τότε στην εξίσωση Αχ+Βψ+Γ=0 αποδεικνύουμε ότι $|A|+|B|\neq 0$,δηλαδή ότι δεν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου, που να μηδενίζουν ταυτόχρονα και το Α και το Β
- Για να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες μίας οικογένειας , διέρχονται από το ίδιο σημείο, βρίσκουμε δύο ευθείες της οικογένειας (δίνοντας δύο αυθαίρετες τιμές στην παράμετρο) και βρίσκουμε το σημείο τομής τους. Κατόπιν , αποδεικνύουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας , διέρχονται από αυτό το σημείο (αρκεί οι συντεταγμένες του σημείου, να επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου)
- Για να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες μίας οικογένειας , είναι παράλληλες μεταξύ τους , αρκεί να αποδείξουμε ότι έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης , ο οποίος δεν εξαρτάται από την παράμετρο

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται η εξίσωση $\chi-\psi+1+\lambda(\chi+2\psi-1)=0$, με $\lambda\in R$

α) Για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία

β) Να δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες, διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρεθεί

γ) Να βρείτε ποια από τις παραπάνω ευθείες διέρχεται από το σημείο Α(-1,2)

- α) Η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$\chi-\psi+1+\lambda(\chi+2\psi-1)=0 \Leftrightarrow \chi-\psi+1+\lambda\chi+2\lambda\psi-\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)\chi+(-1+2\lambda)\psi+1-\lambda=0$$

Η οποία για να παριστάνει ευθεία πρέπει $|1+\lambda|+|-1+2\lambda|\neq 0$, το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε $\lambda\in R$

β) Η παραπάνω εξίσωση :

για λ=0 γίνεται χ-ψ+1+0(χ+2ψ-1)=0 $\Leftrightarrow \chi-\psi+1=0$

για λ=1 γίνεται χ-ψ+1+1(χ+2ψ-1)=0 $\Leftrightarrow 2\chi+\psi=0$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις τέμνονται στο σημείο Μ , του οποίου οι συντεταγμένες αποτελούν λύση του συστήματος $\begin{cases}\chi-\psi+1=0\\ 2\chi+\psi=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=-\frac{1}{3}\\ \psi=\frac{2}{3}\end{cases}$ άρα το $M\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Επειδή $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1+\lambda\left(-\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}-1\right)=0 \Leftrightarrow 0\lambda=0$ (δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση , για οποιαδήποτε τιμή του λ , όλες οι ευθείες αυτές διέρχονται από το σημείο Μ

γ) Επειδή η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(-1,2) , πρέπει
$-1-2+1+\lambda\left(-1+2\cdot 2-1\right)=0 \Leftrightarrow -2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

Άρα η ζητούμενη έχει εξίσωση , που προκύπτει από την παραμετρική, για λ=1
Οπότε $\chi-\psi+1+1\left(\chi+2\psi-1\right)=0 \Leftrightarrow 2\chi+\psi=0$

Παρατήρηση

Το παραπάνω πρόβλημα , μπορεί να επιλυθεί και ως εξής :
Το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας , έχει συντεταγμένες που αποτελούν λύση της παραμετρικής εξίσωσης, ανεξάρτητα από την τιμή του λ. Οπότε πρέπει να ισχύει ότι :

$\begin{cases} \chi-\psi+1=0 \\ \chi+2\psi-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=-\frac{1}{3} \\ \psi=\frac{2}{3} \end{cases}$ άρα το σημείο είναι $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Περίπτωση 5$^{\eta}$

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ενός σημείου $\mathrm{M}\left(\chi_0,\psi_0\right)$, από μία ευθεία με εξίσωση Αχ+Βψ+Γ=0.

Τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο $d\left(\mathrm{M},\varepsilon\right)=\dfrac{\left|\mathrm{A}\chi_0+\mathrm{B}\psi_0+\Gamma\right|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$

Στην ειδική περίπτωση , κατά την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών , τότε υπολογίζουμε την απόσταση , ενός τυχαίου σημείου της μίας, από την άλλη παράλληλη

Παραδείγματα

1) Δίνονται τα σημεία Α(1,2) , Β(3,0) και Γ(5,4) . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας , που διέρχεται από το Α και τα σημεία Β και Γ ισαπέχουν από αυτή

- Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το Α(1,2) , έχει εξίσωση χ=1

Το σημείο Β(3,0) απέχει από την ευθεία χ=1 , απόσταση $d_1=\dfrac{\left|3-1\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3$

Το σημείο Γ(5,4) απέχει από την ευθεία χ=1 , απόσταση $d_2=\dfrac{\left|5-1\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=4$

Άρα , η κατακόρυφη αυτή ευθεία δεν αποτελεί, την ζητούμενη
Έστω ψ=λχ+β η ζητούμενη. Επειδή αυτή διέρχεται από το σημείο Α(1,2) , πρέπει
$2=\lambda\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \lambda+\beta=2$

Η ζητούμενη γράφεται ως εξής : $\psi=\lambda\chi+\beta \Leftrightarrow \lambda\chi-\psi+\beta=0$.

Οπότε $d\left(\mathrm{B}.\varepsilon\right)=d\left(\Gamma,\varepsilon\right) \Leftrightarrow \dfrac{\left|\lambda\cdot 3-0+\beta\right|}{\sqrt{\lambda^2+\left(-1\right)^2}}=\dfrac{\left|\lambda\cdot 5-4+\beta\right|}{\sqrt{\lambda^2+\left(-1\right)^2}}$

$\Leftrightarrow \left|3\lambda+\beta\right|=\left|5\lambda+\beta-4\right|$

$\Leftrightarrow 3\lambda+\beta=5\lambda+\beta-4$ ή $3\lambda+\beta=-\left(5\lambda+\beta-4\right)$

$\Leftrightarrow \lambda=2$ ή 4λ+β=2

-Αν λ=2 , τότε από την εξίσωση λ+β=2 προκύπτει ότι β=0. Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι : ψ=2χ

-Αν 4λ+β=2 , τότε από την λ+β=2 , προκύπτει ότι λ=0 και β=2 . Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι ψ=0χ+2 $\Leftrightarrow$ ψ=2

2) Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 , με αντίστοιχες εξισώσεις $7\chi-5\psi+3=0$ και $7\chi-5\psi-2=0$.

α) Να δειχτεί ότι αυτές είναι παράλληλες

β) Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου ευθείας

- α) Επειδή $\lambda_1=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$ και $\lambda_2=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$, οι δύο ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους

β) Το σημείο Α(1,2) , είναι σημείο της ε_1, αφού : $7\cdot1-5\cdot2+3=0$,

Άρα $d\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)=d\left(\mathrm{A},\varepsilon_2\right)=\frac{|7\cdot1-5\cdot2-2|}{\sqrt{7^2+(-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{74}}=\frac{5\sqrt{74}}{74}$

γ) Η μεσοπαράλληλος ευθεία, είναι μία ευθεία παράλληλη στις άλλες δύο και ισαπέχει από αυτές.

Το σημείο Α(1,2) είναι σημείο της ε_1 (από τα παραπάνω) . Επίσης το σημείο $\mathrm{B}(1,1)$ είναι σημείο της ε_2, αφού $7\cdot1-5\cdot1-2=0$

Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ,έχει συντεταγμένες $\mathrm{M}\left(\frac{1+1}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\mathrm{M}\left(1,\frac{3}{2}\right)$

Επειδή η μεσοπαράλληλη είναι παράλληλη στις άλλες δύο, έχει $\lambda=\frac{7}{5}$ και αφού διέρχεται από το σημείο Μ , έχει εξίσωση $\psi-\frac{3}{2}=\frac{7}{5}(\chi-1)\Leftrightarrow\psi=\frac{7}{5}\chi+\frac{1}{10}$