

## Επίλυση εξισώσεων

Στις προηγούμενες τάξεις, εξετάστηκε διεξοδικά, η επίλυση εξισώσεων διαφόρων μορφών, όπως : πολυωνυμικές, κλασματικές, άρρητες, τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές  
Υπάρχουν όμως και εξισώσεις ( κυρίως μεικτής μορφής) οι οποίες δεν μπορούν να επιλυθούν, με τις παραπάνω μεθοδεύσεις.  
Π.χ. οι εξισώσεις :  $\eta\mu\chi + 2 = \chi^2 + \chi$  ή  $e^x + 1 = \ln(x-1) - x$

Μερικές φορές, η επίλυση αυτή, μπορεί να προσεγγιστεί , με την βοήθεια των θεωρημάτων της Ανάλυσης. Μερικά από αυτά είναι τα εξής:

- **Θεώρημα Bolzano** : Αν η συνάρτηση  $f$  , είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha)f(\beta) < 0$  , τότε η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$
- **Θεώρημα Rolle** : Αν η συνάρτηση  $f$  , είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  , με  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε η εξίσωση  $f'(\chi) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$
- **Θεώρημα μέσης τιμής** : Αν η συνάρτηση  $f$  , είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε :  

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Επίσης πολύ χρήσιμες προτάσεις για την επίλυση εξισώσεων είναι και οι :

- Αν η συνάρτηση  $f$  , είναι **γνησίως μονότονη** στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό
- Κάθε **πολυωνυμική** εξίσωση **περιττού βαθμού** έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα
- Αν το **σύνολο τιμών** της συνάρτησης  $f$  , περιέχει το 0 ( δηλ.  $0 \in f(A)$ ), τότε η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο A

Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να επιλύσουμε ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων. Γι' αυτό διακρίνουμε τις παρακάτω βασικές περιπτώσεις .

### Περίπτωση 1η

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει **μία τουλάχιστον** ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$

- ⇒ Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση  $f$  , στο  $(\alpha, \beta)$
- ⇒ Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση  $F$ , στο  $(\alpha, \beta)$ . Η  $F$  είναι τέτοια ώστε :  $F'(\chi) = f(\chi)$
- ⇒ Εξετάζουμε εάν το 0, ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  ( το  $f([\alpha, \beta])$  )
- ⇒ Προσπαθούμε να βρούμε μία προφανή ρίζα της  $f$  , στο  $(\alpha, \beta)$

### Παραδείγματα

- 1) Δείξτε ότι η εξίσωση :  $\eta\mu\chi + 1 = \chi$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, \pi)$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(\chi) = \eta\mu\chi + 1 - \chi$ . Αυτή :  
Είναι συνεχής στο  $(0, \pi)$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων  
Είναι  $f(0)f(\pi) < 0$  αφού  $f(0) = \eta\mu 0 + 1 - 0 = 1 > 0$  και  
 $f(\pi) = \eta\mu\pi + 1 - \pi = 1 - \pi < 0$   
Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, \pi)$
- 2) Δείξτε ότι η εξίσωση :  $3\lambda\chi^2 + 2\mu\chi = \lambda + \mu$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$
- Εξετάζουμε, αν εφαρμόζεται το **θεώρημα Bolzano** για τη συνάρτηση  
 $f(\chi) = 3\lambda\chi^2 + 2\mu\chi - \lambda - \mu$  στο  $[0, 1]$   
Είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική  
Επειδή  $f(0) = -(\lambda + \mu)$  και  $f(1) = 2\lambda + \mu$  το γινόμενο  
 $f(0)f(1) = -(\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)$  για κάποιες των  $\lambda, \mu$  είναι θετικό και για άλλες είναι αρνητικό, οπότε **δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano**  
Γι' αυτό εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το **θεώρημα Rolle** για την  
 $F(\chi) = \lambda\chi^3 + \mu\chi^2 - (\lambda + \mu)\chi$  στο  $[0, 1]$  (είναι  $F'(\chi) = f(\chi)$ )  
Η  $F$  συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική  
Η  $F$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  με  $F'(\chi) = f(\chi) = 3\lambda\chi^2 + 2\mu\chi - \lambda - \mu$   
 $F(0) = 0 = F(1)$   
Άρα από το θεώρημα Rolle η εξίσωση  $F'(\chi) = 0$  άρα και η  
 $f(\chi) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda\chi^2 + 2\mu\chi - (\lambda + \mu) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$
- 3) Δείξτε ότι η εξίσωση :  $2\sqrt{\chi-1} + e^\chi = 3$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα
- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(\chi) = 2\sqrt{\chi-1} + e^\chi - 3$   
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $A = [1, +\infty)$   
Επειδή  $f'(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\chi-1}} + e^\chi > 0$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$   
Επειδή το  $f(1) = e - 3 < 0$  και  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = +\infty$  το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  
το  $f(A) = [e - 3, +\infty)$ . Αφού το  $0 \in f(A)$  υπάρχει ένα τουλάχιστον  
 $\chi \in A$  τέτοιο ώστε  $f(\chi) = 0$ .  
Δηλαδή η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα

**Περίπτωση 2η**

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει **μία το πολύ** ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$

↳ Εξετάζουμε, αν η συνάρτηση  $f$ , είναι **γνησίως μονότονη** στο  $(\alpha, \beta)$

↳ εργαζόμαστε με τη μέθοδο της **απαγωγής σε άτοπο**, αφού υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει 2 ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$

**Παρατήρηση**

Συνήθως, στη δεύτερη μεθόδευση, οδηγούμαστε σε άτοπο, είτε γιατί η εξίσωση  $f'(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ , είτε γιατί οι ρίζες της, είναι εκτός του διαστήματος  $(\alpha, \beta)$

**Παραδείγματα**

- 1) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $2^x + 3^x = 4^x$  έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα  
 - Η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$2^x + 3^x = 4^x \Leftrightarrow \frac{2^x + 3^x}{4^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1$

Επειδή  $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4} < 0$  αφού  $\ln \frac{1}{2} < 0$  και  $\ln \frac{3}{4} < 0$

η συνάρτηση  $f$ , είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει μία το πολύ ρίζα

- 2) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^5 - 80x + \lambda = 0$  έχει μία το πολύ ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$  για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^5 - 80x + \lambda$  και έστω ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 < \rho_2$ . Τότε θα είναι  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Η συνάρτηση  $f$ , είναι συνεχής στο  $[\rho_1, \rho_2]$  ως πολυωνυμική

Είναι παραγωγίσιμη στο  $(\rho_1, \rho_2)$  με  $f'(x) = 5x^4 - 80$

Άρα από το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\rho_1, \rho_2)$

Αλλά η εξίσωση  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 80 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Δηλαδή οι ρίζες της βρίσκονται εκτός του διαστήματος  $(\rho_1, \rho_2)$ . Άρα, άτοπο. Οπότε η εξίσωση  $x^5 - 80x + \lambda = 0$  έχει το πολύ μία ρίζα στο  $(-1, 1)$

### Περίπτωση 3η

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει **μία ακριβώς** ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$   
 $\mapsto$  Αποδεικνύουμε, με έναν οποιονδήποτε από τους προηγούμενους τρόπους είναι εφικτό, ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$  και μετά ότι έχει μία το πολύ ρίζα σ' αυτό

### **Παράδειγμα**

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(x-1)e^x + 1 = 0$  έχει μοναδική πραγματική ρίζα

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = (x-1)e^x + 1$

Επειδή  $f(0) = 0$  η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα (την  $x = 0$ )

Έστω ότι αυτή έχει και άλλη ρίζα, την  $x = \rho$ , με  $\rho \neq 0$

Αν  $\rho > 0$ , τότε στο διάστημα  $[0, \rho]$  η  $f$  είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών

Στο  $(0, \rho)$  είναι παραγωγίσιμη, με  $f'(x) = xe^x$

Επίσης είναι:  $f(0) = f(\rho) = 0$

Άρα από το θεώρημα Rolle, η εξίσωση  $f'(x) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, \rho)$ . Αλλά  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Άτοπο, διότι  $0 \notin (0, \rho)$  Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη του μηδενός

Αν  $\rho < 0$ , όμοια όπως προηγουμένως, θεώρημα Rolle, στο  $[\rho, 0]$

### Περίπτωση 4η

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει **κ τουλάχιστον** ρίζες στο  $(\alpha, \beta)$

$\mapsto$  Χωρίζουμε το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σε  $\kappa$  υποδιαστήματα ξένα μεταξύ τους και σε κάθε ένα από αυτά, εφαρμόζουμε, τα αντίστοιχα της 1ης περίπτωσης

### **Παράδειγμα**

Αν  $\alpha + \beta + 1 < 0$  και  $\beta > 0$  να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 + \alpha x^2 + \beta = 0$  έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο  $(-1, 1)$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$

Διασπώ το διάστημα  $[-1, 1]$  σε δύο υποδιαστήματα, τα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$

Σε κάθε ένα από αυτά η συνάρτηση είναι συνεχής, ως πολυωνυμική

Επίσης είναι:  $f(-1) = -1 + \alpha + \beta < 0$  και  $f(0) = \beta > 0$  άρα  $f(-1)f(0) < 0$

και  $f(0) = \beta > 0$ ,  $f(1) = 1 + \alpha + \beta < 0$  άρα  $f(1)f(0) < 0$

οπότε από το θεώρημα Bolzano, σε κάθε διάστημα ξεχωριστά, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα, επομένως σε ολόκληρο το διάστημα, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες

**Περίπτωση 5η**

Να δείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει **κ το πολύ** ρίζες στο  $(\alpha, \beta)$

↳ εργαζόμαστε με τη μέθοδο της **απαγωγής σε άτοπο**, αφού υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει  $k+1$  ρίζες στο  $[\alpha, \beta]$

Στα  $k+2$  υποδιαστήματα που δημιουργούνται από τις ρίζες αυτές, εφαρμόζουμε αντίστοιχα θεώρημα Rolle και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο, αφού λάβουμε υπόψη την παρατήρηση της 2ης περίπτωσης

**Παράδειγμα**

Να δείξτε ότι η εξίσωση  $x^{2\nu} + \alpha x + \beta = 0$  με  $\nu \in \mathbb{N}$ , έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^{2\nu} + \alpha x + \beta$

Έστω ότι η δοθείσα εξίσωση έχει 3 ρίζες, τις  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Τότε θα είναι  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$

Στα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2]$  και  $[\rho_2, \rho_3]$  η συνάρτηση  $f$ , είναι συνεχής, ως πολυωνυμική

Επίσης στα  $(\rho_1, \rho_2)$  και  $(\rho_2, \rho_3)$  είναι παραγωγίσιμη, με  $f'(x) = 2\nu x^{2\nu-1} + \alpha$

Άρα από το θεώρημα Rolle, η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά

Αλλά  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\nu x^{2\nu-1} + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^{2\nu-1} = -\frac{\alpha}{2\nu}$  έχει μόνο μία πραγματική

ρίζα, αφού είναι διωνυμική με περιττό εκθέτη. Άτοπο. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

**Περίπτωση 6η**

Να δείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει **κ ακριβώς** ρίζες στο  $(\alpha, \beta)$

↳ Εφαρμόζουμε τα αντίστοιχα βήματα της 4ης και 5ης περίπτωσης

**Παράδειγμα**

Να δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - x \eta \mu x = \sigma \nu x$  έχει δύο ακριβώς ρίζες στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x \eta \mu x - \sigma \nu x$

Αυτή είναι συνεχής στα  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  και  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ως διαφορά συνεχών συνιστησών

Επίσης είναι  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$  και  $f(0) = -1 < 0$  και  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$

Άρα με βάση το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  και  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Δηλαδή έχει δύο τουλάχιστον

ρίζες στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Είναι } f'(x) = 2x - x \sin x = x(2 - \sin x)$$

Άρα, αν  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  είναι  $f'(x) < 0$  οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό και θα έχει μία το πολύ ρίζα

Αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τότε  $f'(x) > 0$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό, άρα θα έχει μία το πολύ ρίζα

Δηλαδή, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ δύο ρίζες στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  και αφού έχει και δύο τουλάχιστον, αυτές θα είναι και μοναδικές.

### Περίπτωση 7η

Να βρείτε το **πλήθος** των **ριζών** της εξίσωσης  $f(x) = 0$

⇒ Σχηματίζουμε το πίνακα μεταβολών της συνάρτησης, και σε κάθε ένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται, εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει και πόσες λύσεις

⇒ Εφαρμόζουμε την παρακάτω πρόταση που αφορά την ακολουθία Rolle

Αν η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει  $k$  διαφορετικές ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  στο  $[a, b]$  τότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τόσες ρίζες στο  $[a, b]$  όσες οι εναλλαγές προσήμου που παρουσιάζει η

ακολουθία:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(\rho_1), f(\rho_2), \dots, f(\rho_k), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

### **Παράδειγμα**

Να βρείτε, πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση:  $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 5 = 0$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 5$

Προφανώς είναι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Επίσης είναι  $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$  και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

| $x$     | $-\infty$ | $-2$             | $-1$             | $1$               | $+\infty$               |
|---------|-----------|------------------|------------------|-------------------|-------------------------|
| $f'(x)$ |           | -                | +                | -                 | +                       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow$<br>13 | $\nearrow$<br>18 | $\searrow$<br>-14 | $\nearrow$<br>$+\infty$ |

Από τον πίνακα μεταβολών, γίνονται φανερά τα εξής:

Για κάθε  $x \in (-\infty, -1]$  είναι  $f(x) \geq 13$ . Άρα η εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζες στο διάστημα αυτό

Στο διάστημα  $(-1, 1]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η αντίστοιχη εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ μία ρίζα. Αλλά είναι και  $f(x) \in [-14, 18]$  οπότε  $0 \in [-14, 18]$  επομένως έχει μία τουλάχιστον ρίζα σ' αυτό. Τελικά έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $(-1, 1]$

Στο διάστημα  $(1, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και  $f(x) \in (-14, +\infty)$  άρα όπως προηγουμένως και εδώ η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα

Συμπερασματικά, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει 2 ακριβώς ρίζες.

### Άλλος τρόπος

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 5$

Προφανώς είναι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Επίσης είναι  $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$  και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Σχηματίζουμε την ακολουθία:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Δηλαδή την:  $+\infty, 13, 18, -14, +\infty$

Επειδή αυτή παρουσιάζει 2 εναλλαγές προσήμου ( $18 \rightarrow -14$  και  $-14 \rightarrow +\infty$ ) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει 2 ακριβώς ρίζες.

### Περίπτωση 8η

Να λύστε την εξίσωση  $f(x) = 0$

$\mapsto$  Βρίσκουμε, τυχόν, προφανείς ρίζες και αποδεικνύουμε ότι αυτές είναι μοναδικές

### Παραδείγματα

1) Να λύστε την εξίσωση:  $\ln(x-1) + x^2 + x = 6$

-Πρέπει  $x > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln(x-1) + x^2 + x - 6$

Είναι  $f(2) = \ln(2-1) + 2^2 + 2 - 6 = 0$ , άρα η εξίσωση έχει ρίζα το  $x = 2$

Επίσης είναι  $f'(x) = \left[ \ln(x-1) + x^2 + x - 6 \right]' = \frac{1}{x-1} + 2x + 1 > 0$  αφού  $x > 1$

Επομένως η συνάρτηση  $f$ , είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$  και θα έχει μία το πολύ ρίζα. Αφού έχει μία, την  $x = 2$ , αυτή είναι μοναδική

2) Να λύστε την εξίσωση:  $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$

- Η παραπάνω εξίσωση, γράφεται:  $3^x - 2^x = 5^x - 4^x$  (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $f(t) = t^x$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(t) = xt^{x-1}$

Στα  $[2,3]$  και  $[4,5]$  η  $f$ , είναι συνεχής και στα  $(2,3)$ ,  $(4,5)$  παραγωγίσιμη .

Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής , υπάρχουν  $\xi_1 \in (2,3)$  και  $\xi_2 \in (4,5)$  τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 3^x - 2^x \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 5^x - 4^x$$

Επομένως , με βάση την (1) έχουμε :  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Leftrightarrow \chi \xi_1^{x-1} = \chi \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \chi = 0$  ή

$$\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \left( \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{αφού} \quad \xi_1 \neq \xi_2 \neq 0$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι :  $\chi = 0$  ή  $\chi = 1$

### Ωρα για εξάσκηση

- 1) Να λύστε την εξίσωση :  $\chi^{2014} + 4\chi = 5$
- 2) Αν είναι  $\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{2} + \varepsilon = 0$  να δείξετε ότι η εξίσωση :  
 $\alpha\chi^4 + \beta\chi^3 + \gamma\chi^2 + \delta\chi + \varepsilon = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$
- 3) Να δείξετε ότι η εξίσωση :  $5\chi^4 = 9\chi + 3 = 0$  έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες
- 4) Να δείξετε ότι η εξίσωση :  $\chi^4 + 3\chi^2 = \chi + 2$  έχει ακριβώς δύο ρίζες στο  $(-1,1)$
- 5) Να δείξετε ότι η εξίσωση :  $\eta\mu 2\chi - 2 + 2\chi = 0$  έχει μία μόνο ρίζα στο  $(0,1)$
- 6) Να λύστε την εξίσωση :  $\chi e^x + 1 = e^x$
- 7) Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση :  $\chi(\chi^2 - 4)(\chi + 3) = -5$
- 8) Πόσες ρίζες έχει στο  $\mathbb{R}$ , η εξίσωση :  $\chi e^x = 5$ ;
- 9) Αν  $\alpha\beta > 0$  να δείξετε ότι η εξίσωση :  $\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta = 0$  έχει το πολύ δύο ρίζες στο  $\mathbb{R}$
- 10) Να δείξετε ότι η εξίσωση :  $\chi^5 - 2014\chi + 1998 = 0$  έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες
- 11) Να λύστε την εξίσωση :  $3^x = 4\chi + 1$
- 12) Να λύστε την εξίσωση :  $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$