

ΕΛΛΕΙΨΗ

- 1) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, όταν :
- Διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $B(2, 0)$
 - Έχει εστία $E(2\sqrt{3}, 0)$ και ισχύει ότι : $a=2b$
 - Διέρχεται από το σημείο $A(4, 6)$ και ισχύει ότι : $b=2^a$
 - Έχει εστίες $E'(0, -1)$ και $E(0, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
 - Διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$ και εφάπτεται της ευθείας : $x + 6y - 20 = 0$
- 2) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, όταν :
- Έχει εστίες $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 10
 - Έχει εκκεντρότητα $e = \frac{1}{3}$ και $a=6$
 - Έχει εστιακή απόσταση ίση με 8, εκκεντρότητα $\frac{2}{3}$ και οι εστίες της βρίσκονται πάνω στον άξονα $\psi'\psi$
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, όταν η εστιακή απόσταση είναι 12 και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 20
- 4) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που εφάπτεται στις ευθείες με εξισώσεις :
 $\varepsilon_1 : x = 3$ και $\varepsilon_2 : 2x + 3y = 12$
- 5) Ναδειχτεί ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ τέμνονται σε τέσσερα σημεία που είναι ομοκυκλικά
- 6) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, που είναι παράλληλη στην ευθεία $3y + 4x - 1 = 0$
- 7) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x + y - 5 = 0$
- 8) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, που σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα $x'x$
- 9) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, που κόβει από τους θετικούς ημιάξονες ίσα τμήματα
- 10) Να βρεθεί η απόσταση του κέντρου της έλλειψης από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$
- 11) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ που φέρεται από το σημείο $P(4, 2)$

- 12) Ναδειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μίας έλλειψης, από τυχαία εφαπτομένη της, είναι σταθερό
- 13) Η εφαπτομένη μίας έλλειψης σε ένα τυχαίο σημείο της τέμνει την διευθετούσα $\chi = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ στο σημείο B. Αν E η αντίστοιχη εστία της έλλειψης, να δείξετε ότι η γωνία $\angle AEB = 90^\circ$
- 14) Να υπολογιστεί η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, όταν οι εστίες της «βλέπουν» τον μικρό άξονα με ορθή γωνία
- 15) Από τις χορδές της έλλειψης $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, που διέρχονται από την εστία E, να βρεθεί εκείνη που έχει το μικρότερο μήκος
- 16) Να βρεθεί σημείο M, της έλλειψης $\frac{\chi^2}{16} + \frac{\psi^2}{9} = 1$, με εστίες E και E', τέτοιο ώστε η γωνία $\angle E'ME$ να είναι ορθή
- 17) Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2$. Από την εστία E της έλλειψης, φέρνουμε ευθεία κάθετη προς τον άξονα $\chi'\chi$, που τέμνει την έλλειψη στο σημείο M και τον κύκλο στο N. Ναδειχτεί ότι: $d(M, N) = \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha}$
- 18) Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Ναδειξτε ότι οι εφαπτόμενες, που φέρνονται από τυχαίο σημείο M του κύκλου προς την έλλειψη, είναι κάθετες μεταξύ τους
- 19) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις: $\frac{\chi^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$ και $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$ και $\lambda \in R$, έχουν τις ίδιες εστίες
- 20) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις: $\frac{\chi^2}{\alpha^2 \lambda} + \frac{\psi^2}{\beta^2 \lambda} = 1$ και $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$ και $\lambda > 0$, είναι όμοιες
- 21) Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$. Αν το τρίγωνο που σχηματίζουν οι δύο εστίες με την κορυφή B, είναι ισόπλευρο, να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης
- 22) Δίνονται η παραβολή $C_1: \chi^2 = 4\sqrt{3}\psi$ και ο κύκλος $C_2: 2\chi^2 + 2\psi^2 - \chi - 2\sqrt{15}\psi = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που έχει μία εστία, την εστία της παραβολής και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου