ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1) Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων , στο αντίστοιχο σημείο χ_0

α) $f(x)=\chi^3+1$,με $\chi_0=3$

β) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, με $x_o=2$

γ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, με $x_0=0$

δ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, με $x_0=0$

ε) $f(x)=5|x|$, με $x_0=0$

2) Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}5x.....\alpha\nu.\chi\leq 0\\ 3x^2....\alpha\nu.\chi>0\end{cases}$

3) Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\eta\mu\dfrac{1}{\chi}.....\alpha\nu.\chi\neq 0\\ 0............\alpha\nu.\chi=0\end{cases}$

4) Να βρεθούν οι τιμές των κ,λ∈R ,αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+\kappa x+\lambda.....\alpha\nu.\chi\leq 2\\ \sqrt{\chi^2+5}.........\alpha\nu.\chi>2\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$

5) Να βρεθούν οι τιμές των α,β∈R ,ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha\chi-\beta....\alpha\nu.\chi>2\\ \chi^2..........\alpha\nu.\chi\leq 2\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$

6) Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=x^3+x-\dfrac{2}{x}+5$ β) $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3+1$

γ) $f(\chi)=5\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi-\chi$ δ) $f(x)=x\ln x-x$

ε) $f(x)=x^3\ln x-\dfrac{x^3}{3}$ στ) $f(x)=e^x\ln x$

ζ) $f(x)=xe^x\ln x$ η) $f(\chi)=\varepsilon\phi\chi+\sigma\phi\chi$

θ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$ ι) $f(x)=\dfrac{\eta\mu\chi}{1+\varepsilon\phi\chi}$

7) Όμοια των συναρτήσεων

α) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ β) $f(x)=\dfrac{e^x}{\eta\mu\chi}$

γ) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ δ) $f(x)=5^{\eta\mu\chi}$

ε) $f(x)=x^x$ στ) $f(x)=(\eta\mu\chi)^{\chi}$

ζ) $f(x)=(\eta\mu\chi)^{\eta\mu\chi}$ η) $f(x)=(\eta\mu\chi)^{\ln x}$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x$. Να βρεθεί ο β∈ R ,ώστε να ισχύει ότι $:f'(0)f'(1)=3$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\eta\mu x$. Να δείξτε ότι ισχύει $f^{(\nu)}(\chi)=2^{\frac{\nu}{2}}e^x\eta\mu\left(x+\frac{\nu\pi}{4}\right)$, για κάθε ν∈N

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, με α∈R. Να δείξτε ότι ισχύει: $f^{(\nu)}(\chi)=\alpha^{\nu}e^{\alpha\chi}$, για κάθε ν∈N

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu\alpha x$, με α∈R. Να δείξτε ότι για κάθε ν∈N, ισχύει ότι : $f^{(\nu)}(\chi)=\alpha^{\nu}\sigma\upsilon\nu\left(\alpha\chi+\frac{\nu\pi}{2}\right)$

12) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-x$ επαληθεύει τη σχέση : $4xf''(x)\left[x+f(x)\right]+1=0$, για κάθε χ>0

13) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x)=xe^{-x}$ επαληθεύει τη σχέση : $xf'(x)+(x-1)f(x)=0$,για κάθε χ∈R

14) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}\eta\mu x$ επαληθεύει τη σχέση : $f''(x)+2f'(x)+2f(x)=0$, για κάθε χ∈R.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3e^x$. Να υπολογιστούν οι τιμές των α,β,γ∈R ,ώστε αυτή να επαληθεύει τη σχέση : $\alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=12xe^x$

16) Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, ικανοποιεί τη σχέση $f\left(x^2\right)=x^5$, να δείξτε ότι $f'(4)=20$

17) Αν η συνάρτηση f, ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\left(x^2+2x+6\right)\phi(x)$, όπου για την ϕ ,ισχύουν τα εξής : $\phi(0)=5$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\phi(\chi)-5}{\chi}=4$, να υπολογισθεί η $f'(0)$

18) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση g ,με $g(\alpha)\neq 0$, όπου το α είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=|x-\alpha|g(x)$, δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=\alpha$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=P(x)|x-2|$, όπου το P(x) είναι πολυώνυμο νι-οστού βαθμού. Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f, για κάθε $x\in R$, να δείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον ρ=2

20) Αν για την συνάρτηση f ,ισχύει ότι : $x-x^2\le f(x)\le x+x^2$ για κάθε $x\in(-1,1)$, να δείξτε ότι υπάρχει η $f'(0)$ και είναι $f'(0)=1$

21) Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει ότι $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για κάθε $x\in R$ και οι f,h είναι παραγωγίσιμες στο $\alpha\in R$, με $f'(\alpha)=h'(\alpha)$ και $f(\alpha)=g(\alpha)=h(\alpha)$ να αποδείξτε ότι και η g είναι παραγωγίσιμη στο χ=α

22)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$,να δείξτε ότι :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$$

23)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f .Να δείξτε ότι :

α) Αν η f είναι άρτια , τότε η f' είναι περιττή

β) Αν η f είναι περιττή ,τότε η f' είναι άρτια

γ) Αν η f είναι περιοδική με περίοδο Τ, τότε και η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο Τ

24) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0,2]$ και πληρούν τη σχέση $[2f(x)]^2-[g(x)]^3+9=0$ για κάθε $x\in[0,2]$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1)=3$ και $f'(1)=-2$, να βρεθούν τα : $g(1)$ και $g'(1)$

25) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ,ορισμένες σε ένα διάστημα Α, παραγωγίσιμες σε αυτό, με $g(x)\ne 0$ για κάθε $x\in A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(\chi)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Να δείξτε ότι αν $\Phi'(\rho)=0$, τότε $\Phi(\rho)=\dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$, όπου $g'(\rho)\ne 0$

26)Δίνεται η συνάρτηση f , που είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο R. Αν η συνάρτηση $g(x)=\left(\dfrac{x^2}{4}+2\right)f(x)+3x$, να δείξτε ότι $g'(0)=3$

27) Δίνεται η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι $f(x+\psi)=f(x)f(\psi)$ για κάθε χ,ψ$\in R$. Αν $f(0)=1$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο χ=0, να δείξτε ότι υπάρχει η παράγωγος της f για κάθε $x\in R$,και ισχύει ότι $f'(x)=f(x)f'(0)$

28) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f(x+\psi)=\dfrac{f(x)+f(\psi)}{1-f(x)f(\psi)}$ για κάθε $\chi,\psi\in R$ με $f(x)f(\psi)\neq 1$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ να δείξτε ότι $f'(x)=1+f^2(x)$

29) Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύουν τα εξής :

α) $f'(0)=2$ και β) $f(x+\psi)=e^x f(\psi)+e^\psi f(x)$ για κάθε $x,\psi\in R$

Να δείξτε ότι :

α) $f(0)=0$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και γ) $f'(x)=f(x)+2e^x$ για κάθε $x\in R$

30) Δίνεται η συνάρτηση f ,για την οποία ισχύουν τα εξής:

α) $f(1)=1$ β) $f(3)=25$ και γ) $f(x+\psi)=f(x)+\alpha x\psi+4\psi^2$ για κάθε $\chi,\psi\in R$

i) Να βρεθεί το α$\in R$

ii) Να δείξτε ότι υπάρχει η παράγωγος της f, και είναι $f'(x)=4x$

31) Να βρεθεί πολυώνυμο Ρ(χ) τρίτου βαθμού ώστε να ισχύει $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}'(0)=\mathrm{P}''(0)=5$ και $\mathrm{P}''(1)=17$

32)Για ένα πολυώνυμο Ρ(χ) ,ισχύει ότι $\left[\mathrm{P}'(\chi)\right]^2=\mathrm{P}(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$

α) Να βρείτε τον βαθμό του

β) Να βρείτε το πολυώνυμο

33) α) Αν $f(\chi)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\nu\geq 2$, να αποδείξτε ότι:

$$f(\chi)=(\chi-\rho)^2\Pi(\chi)\Leftrightarrow f(\rho)=f'(\rho)=0$$

β) Να αποδείξτε ότι το $(\chi-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$f(\chi)=\nu\chi^{\nu+1}-\chi^{\nu-1}-(\nu^2+1)\chi+\nu^2-\nu+2 \text{ με } \nu\geq 2$$

γ) Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες το $(\chi-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου : $f(\chi)=\alpha\chi^{2\nu}+\beta\chi^{\nu-1}+4$ με $\nu\geq 2$

34) Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $|f(x)|\leq x^2$ για κάθε $x\in R$. Να δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε χ$\in R$, και ότι $f'(x)=0$

35) Αν f,g,h παραγωγίσιμες συναρτήσεις , να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{(f.g.h)'}{f.g.h}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}+\frac{h'}{h} \quad \text{με } f(x).g(x).h(x)\neq 0 \quad x\in R$$

36) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει $f'(x).g'(x)=0$ και $f(x).g(x)\neq 0$ $x\in R$. Δείξτε ότι αν $\phi(\chi)=f(x).g(x)$

α) $\frac{\phi''}{\phi}=\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}$ και β) $\frac{\phi'''}{\phi}=\frac{f'''}{f}+\frac{g'''}{g}$

37) Είναι γνωστό , ότι αν το πολυώνυμο $\pi(\chi)$ έχει τον πραγματικό αριθμό ρ ρίζα πολλαπλότητας κ ,τότε μπορεί να γραφεί με την μορφή $\pi(\chi)=(\chi-\rho)^{\kappa}\phi(\chi)$ με $\phi(\rho)\neq 0$ και αντίστροφα. Να δείξτε ότι αν το $\pi(\chi)$ έχει το ρ ρίζα με πολλαπλότητα κ, τότε η παράγωγος αυτού, έχει το ρ ρίζα με πολλαπλότητα κ-1

38) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο αντίστοιχο σημείο Α με $\chi=\chi_0$

α) $f(\chi)=2\chi^3$ στο $\chi_0=-1$ β) $f(\chi)=\frac{2}{\chi}$ στο $\chi_0=2$

γ) $f(\chi)=\eta\mu^2\chi$ στο $\chi_0=0$ δ) $f(\chi)=\sqrt{\chi+1}$ στο $\chi_0=3$

ε) $f(\chi)=\ln(\chi+1)$ στο $\chi_0=0$ στ) $f(\chi)=e^{\chi-1}$ στο $\chi_0=1$

39) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο που τέμνει αυτή , τον άξονα των ψ

α) $f(\chi)=\begin{cases} \text{συνχ} & \text{αν } \chi\leq 0 \\ \chi^3+1 & \text{αν } \chi>0 \end{cases}$ β) $f(\chi)=\begin{cases} \text{ημχ}+3 & \text{αν } \chi<0 \\ 2\chi^2+1 & \text{αν } \chi\geq 0 \end{cases}$

40) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\frac{3}{4}\chi^2-\frac{1}{2}\chi-3$ που :

α) είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi=\frac{5}{2}\chi$ β) είναι κάθετη στην ευθεία $\psi=2\chi-6$

γ) σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα των χ δ) διέρχεται από το σημείο Σ(1,-4)

41) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $\chi'\chi$, όταν :

α) $f(\chi)=\chi^2-\frac{16}{\chi}$ β) $f(\chi)=\frac{\ln\chi}{\chi^2}$ γ) $f(\chi)=\frac{\chi^2+1}{\chi}$

42) Αν $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi$, να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο Α(1,5) εφαπτομένη με κλίση 8

43) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης , της παραβολής $\psi=\chi^2$, που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α(-2,4)

44) Να αποδείξτε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(\chi)=\begin{cases} \chi^4 & \text{αν } \chi<0 \\ \sqrt{\chi} & \text{αν } \chi\geq 0 \end{cases}$ στα κοινά σημεία με την ευθεία χ-5ψ+6=0 είναι κάθετες

45) Αν $f(\chi)=\begin{cases} \chi^2-\frac{9}{4} & \text{αν } \chi\le\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{3}}{4\chi} & \text{αν } \chi>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ να αποδείξτε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με $\chi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{\pi}{3}$

46) Να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$ στο σημείο με $\chi=\frac{\pi}{2}$, σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\frac{\pi^2}{8}$

47) Αν $f(\chi)=\begin{cases} \alpha\chi^2+\beta & \text{αν } \chi<1 \\ \frac{\gamma}{\chi} & \text{αν } \chi\ge 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των α,β,γ για τις οποίες η γραφική παράσταση της, στο σημείο με $\chi = 1$, έχει εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $4\chi-\psi-2=0$

48) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^3-\chi$ που διέρχεται από το σημείο P (-2,2)

49) Να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-4\chi+5$ στο σημείο με $\chi = 3$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(\chi)=\chi^2+2\chi-4$

50) Να βρείτε πολυώνυμο 3ου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση, να διέρχεται από τα σημεία Ο(0,0) και Α(1,1) και οι εφαπτομένες στα σημεία αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα $\chi'\chi$

51) Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=\frac{3\chi^2+\chi+1}{\chi}$ και $g(\chi)=2\chi^2+\alpha\chi+\beta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 2

52) Να βρείτε για ποιά τιμή του α, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\frac{\chi^2+\chi-1}{\chi}$ στο σημείο με $\chi=1$, εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(\chi)=2\chi^2+6\chi-\alpha$