

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

α) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2006$

β) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$

γ) $f(x) = x \ln x$

δ) $f(x) = e^x - x - 1$

ε) $f(x) = x - 2\eta\mu x$, με $x \in [0, 2\pi]$

2) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

α) $f(x) = 2e^x - x + 1$

β) $f(x) = x(3 - 2 \ln x)$

γ) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta\mu^2 x + \frac{2}{3} \sigma\upsilon\nu^3 x$, με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

δ) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

ε) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 3 \\ 2x - 3, & x > 3 \end{cases}$

3) α) Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x=1 \end{cases}$$

i) Να δειχτεί ότι η f , είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

ii) Να δειχτεί ότι $f'(1) = -\frac{1}{2}$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

α) Να μελετηθεί η f , ως προς την μονοτονία

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$, με $x \in (0, \pi)$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

8) Αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , να υπολογιστούν τα α, β

9) Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες

α) $e^{2x} > 1 - x$, για $x > 0$

β) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για $x > 0$

10) Να αποδειχτούν οι παρακάτω ανισότητες

α) $x - \frac{x^3}{6} \leq \eta\mu x \leq x$, για $x \geq 0$

β) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

11) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$ και για τις οποίες ισχύουν τα εξής

$f(0) = g(0) = 1$, $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f'(x)g(x) < g'(x)$ για κάθε $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) < 1 + \ln g(x)$ για κάθε $x > 0$

12) Δίνεται η συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν τα εξής

i) Η f συνεχής στο \mathbb{R} ii) η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ iii) $f(0) = 0$ και

iv) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι

η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

13) Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $|f(x) + xf'(x)| \leq \mu$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\mu > 0$. Να δείξετε ότι

α) Η συνάρτηση $g(x) = \mu x + xf(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

β) Η συνάρτηση $h(x) = xf(x) - \mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

14) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 2\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ έχει μόνο μία ρίζα πραγματική

15) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x = \sigma\nu\nu x$ έχει μία μόνο ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

16) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x \ln x = \lambda$ έχει μία μόνο ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

17) Αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln 2x + \frac{\beta}{x} + \alpha$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1, το $2 + \ln 2$, να βρείτε τα α, β .

18) Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία είναι 1-1 και παραγωγίσιμη. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης, στο $x=1$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Αν η f' είναι συνεχής και 1-1 συνάρτηση και η $f \circ f$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x=2$ να υπολογίστε την $f^{-1}(1)$

19) Αν για την συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \ln x$, ισχύει ότι: $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$, να βρεθεί το α .

20) Αν για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι: $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq \alpha$, να βρεθεί το α

21) Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, να δείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο (α, β)

22) Να μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

β) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

γ) $f(x) = x(x-1)^2(x-3)^3$

δ) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ε) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

23) Να μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

β) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

γ) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

δ) $f(x) = \eta\mu 3x - 3\sigma\upsilon\nu x$

ε) $f(x) = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3$

24) Να μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = x \ln x$

β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- γ) $f(x) = xe^x$
 δ) $f(x) = e^x - xe^x - 1$
 ε) $f(x) = |x^2 - 1|$

25) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + x$ να παρουσιάζει στα σημεία με $x=1$ και $x=2$ ακρότατα. Τι είδους ακρότατα είναι αυτά;

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε και μόνο τότε αν $\alpha^2 \leq 3\beta$

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Αν τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι $\beta\gamma = 9\alpha\delta$

28) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων, στα αντίστοιχα διαστήματα

α) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad x \in [-4, 2]$

β) $f(x) = -x + \eta\mu 2x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

γ) $f(x) = x^2 \ln x \quad x \in [1, e]$

29) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + 1}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

30) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $e^x = x + 1$

β) $\ln(x+1) = x$

31) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ισχύει ότι :

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } \beta^2 < 3\gamma$$

α) Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα

β) Δείξτε ότι η f , είναι γνησίως αύξουσα

γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

32) Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι :

$$f^3(x) + \sqrt{f(x)} = 2e^x - x + 1 - \ln 2 \quad \text{κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να μελετήσετε την f , ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \lambda x$, με $\lambda > 0$

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f

β) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του λ , για την οποία ισχύει ότι :

$$\ln x \leq \lambda x \text{ για κάθε } x > 0$$

γ) Για την τιμή του λ , που βρήκατε προηγουμένως, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$

34) Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB=2\lambda$. Θεωρούμε σημείο Γ του τμήματος και γράφουμε δύο κύκλους, διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα. Να βρεθεί η θέση του σημείου Γ , για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων, γίνεται ελάχιστο

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ και τυχαίο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο M , τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B . Να βρεθεί για ποια τιμή του ξ , το εμβαδό του τριγώνου OAB γίνεται ελάχιστο

36) Η αντοχή μίας δοκού με ορθογώνια διατομή, όταν στηρίζεται οριζόντια, είναι ανάλογη του πλάτους και του κύβου του ύψους. Να υπολογιστεί το πλάτος της δοκού που μπορούμε να πάρουμε από κορμό κυλινδρικού δέντρου, διαμέτρου δ , που έχει μέγιστη αντοχή

37) Να μελετήστε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής, τις συναρτήσεις

α) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x$

β) $f(x) = x^6(x-1)$

γ) $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$

δ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ε) $f(x) = x^2 + 2\eta\mu x$

στ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

ζ) $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 9}$

38) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες, η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \text{ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, για κάθε } x \in R$$

39) Δίνεται η συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f . Να δείξετε ότι :

α) Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα Δ , τότε για κάθε

$$\alpha, \beta \in \Delta \text{ με } \alpha \neq \beta \text{ ισχύει ότι } f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

β) Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα Δ , τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύει ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

40) Δίνεται η συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι: $f'(\chi) < \frac{f''(\chi)+f(\chi)}{2}$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi)e^{-\chi}$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο \mathbb{R}

41) Δίνεται η συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι $f''(0) = 0$. Αν η f' είναι κοίλη στο \mathbb{R} , να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση f

42) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = \chi \eta \mu \chi$ παρουσιάζει καμπή σε σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(\chi) = \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2+4}}$

43) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$, με $\alpha \neq 0$ παρουσιάζει πάντα ένα σημείο καμπής.

Αν είναι $\beta^2 = 3\alpha\gamma$ τότε η f , έχει ένα σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 \ln \chi$

α) Να μελετήσετε την f , ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f , ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f