ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1) Να βρείτε την συνάρτηση f, αν :

α) $f'(\chi)=\eta\mu\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=6$

β) $f'(\chi)=e^{x}-e^{-x}$ και $f(0)=4$

γ) $f''(\chi)=6\chi+2$ και $f(1)=5$, $f(2)=7$

δ) $f''(\chi)=-\frac{1}{\chi^{2}}$, χ>0 και $f'(e)=0$, $f(1)=\frac{2}{e}$

2) Να βρείτε την συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι : $f'(\chi)e^{f(x)}=2\chi+1$ για κάθε χ>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της, στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{3}{5}$

3) Να βρείτε την συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι : $f''(\chi)=12\chi^{2}+2$ για κάθε $\chi\in R$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της, στο σημείο Α(1,1) έχει συντελεστή διεύθυνσης 3

4) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{2}^{4}(3x^{2}-5x+1)dx$ β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu2\chi+3\sigma\upsilon\nu3\chi)dx$

γ) $\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\chi^{2}}\right)dx$ δ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}\chi}-\frac{1}{\eta\mu^{2}\chi}\right)dx$

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{1}^{2}\left(\frac{\chi^{2}-3\chi+2}{\chi}\right)dx$ β) $\int_{1}^{2}\left(\frac{2\chi^{3}-5\chi^{2}+6\chi-1}{\chi^{2}}\right)dx$

γ) $\int_{1}^{4}\left(\frac{\chi+\sqrt{\chi}-1}{\sqrt{\chi}}\right)dx$ δ) $\int_{1}^{8}\left(\frac{\chi+\sqrt{\chi}}{\sqrt[3]{\chi}}\right)dx$

6) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{2}^{4}\frac{3\chi+2}{\chi-1}dx$ β) $\int_{0}^{1}\frac{5\chi+1}{2\chi+1}dx$

γ) $\int_{1}^{2}\frac{6\chi-3}{-3\chi+1}dx$ δ) $\int_{1}^{2}\frac{6\chi^{2}-2}{2x-1}dx$

7) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{4}^{6}\frac{1}{\chi^{2}-5\chi+6}dx$ β) $\int_{3}^{4}\frac{2x-1}{\chi^{2}-3\chi+2}dx$

γ) $\int_{2}^{4}\frac{3x+1}{3\chi^{2}-5\chi+2}dx$ δ) $\int_{2}^{4}\frac{2x-2}{3\chi^{2}-6\chi+3}dx$

ε) $\int_{0}^{1}\frac{2x^{3}-3x^{2}-1}{\chi^{2}-\chi-2}dx$ στ) $\int_{2}^{3}\frac{3\chi^{2}+4\chi=7}{\chi^{2}-5\chi+4}dx$

8) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 \frac{2x+1}{\chi^2+\chi+1}dx$ β) $\int_0^1 \frac{4x-2}{\chi^2-\chi+1}dx$

γ) $\int_e^{e^2} \frac{1}{\chi \ln \chi}dx$ δ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi\varepsilon\phi\chi}dx$

ε) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$ στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x-\eta\mu\chi}{e^x+\sigma\upsilon\nu\chi}dx$

9) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2\chi}dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi\chi dx$ δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^2\chi dx$

10) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 |2\chi-1|dx$ β) $\int_{-2}^2 \left(3|x+1|-2|x-1|\right)dx$

γ) $\int_{-1}^1 |e^x-1|dx$ δ) $\int_{-3}^3 |\chi^2-4|dx$

ε) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu\chi|dx$ στ) $\int_0^4 \left|\sqrt{\chi}-\chi\right|dx$

11) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$ όπου

$$f(\chi)=\begin{cases} e^{\chi}+1 & \text{αν } \chi>0 \\ \text{συνχ}+1 & \text{αν } \chi\leq 0 \end{cases}$$

12) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)dx$ όπου

$$f(\chi)=\begin{cases} \chi^2+1 & \text{αν } \chi\leq 1 \\ 3\chi-1 & \text{αν } \chi>1 \end{cases}$$

13) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$ όπου

$$f(\chi)=\begin{cases} 2\chi+3 & \text{αν } \chi<0 \\ \chi^2-\chi+1 & \text{αν } 0\leq\chi<1 \\ 3\chi-2 & \text{αν } \chi\geq 1 \end{cases}$$

14) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_1^2 \chi^2 \ln \chi dx$ β) $\int_1^2 \frac{\ln\chi}{2\sqrt{\chi}}dx$

γ) $\int_0^{\pi} \chi\eta\mu\chi dx$ δ) $\int_0^{\pi} \chi\sigma\upsilon\nu\chi dx$

ε) $\int_0^{\alpha} (3\chi+1)e^x dx$ στ) $\int_{-1}^1 \chi e^x dx$

ζ) $\int_0^{\pi} 3^x \sigma\upsilon\nu\chi dx$ η) $\int_0^{\pi} e^{\alpha\chi}\eta\mu\beta\chi dx$, $\alpha,\beta\in R$

15) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_0^{\frac{1}{2}} (4\chi+2)^3 dx$ β) $\int_0^1 (5\chi-3)^5 dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 3\chi \cdot 2^{\sigma\upsilon\nu 3\chi}\, dx$ δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(3\chi + \frac{\pi}{2}\right)dx$

ε) $\int_1^7 \sqrt[3]{\chi+1}\,dx$ στ) $\int_0^1 \frac{1}{3\chi+1}\,dx$

ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\varepsilon\phi\chi}}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}dx$ η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu\chi}{\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}dx$

θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi\eta\mu 4\chi^2 dx$ ι) $\int_1^0 \frac{e^{\ln x}}{\chi}dx$

16) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{-1}^1 \chi e^{x-|x|}dx$ β) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \chi|\eta\mu\chi|dx$

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 + \chi + 1$

α) Να αποδείξτε ότι η f, αντιστρέφεται

β) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f^{-1}(\chi)dx$

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

α) Να αποδείξτε ότι η f, αντιστρέφεται

β) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(\chi)dx$

19) Αν $\mathrm{I}_\nu = \int_0^\pi \chi^\nu \sigma\upsilon\nu\chi dx$ να δείξετε ότι : $\mathrm{I}_\nu + \nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu-2} = -\nu\pi^{\nu-1}$

20) Αν $\mathrm{I}_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^\nu \chi dx$ να δείξετε ότι

α) $\mathrm{I}_{\nu+2} = \dfrac{\nu+1}{\nu+2}\mathrm{I}_\nu$

β) $\mathrm{I}_{2\kappa} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\kappa-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\kappa)}\dfrac{\pi}{2}$

γ) $\mathrm{I}_{2\kappa+1} = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\kappa)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\kappa+1)}$

21) $\mathrm{I}_\nu = \int_0^{\ln 2} \chi^\nu e^\chi dx$ να δείξετε ότι : $\mathrm{I}_{\nu+1} + (\nu+1)\mathrm{I}_\nu = 2(\ln 2)^{\nu+1}$

22) Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύουν ότι : $\int_0^\pi (f(\chi) + f''(\chi))\eta\mu\chi dx$ και $f(\pi) = 2$. Να υπολογιστεί το $f(0)$

23) Αν η συνάρτηση f, είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] , να δείξτε ότι

α) $\int_\alpha^\beta f(\chi)dx = \int_{\alpha+\lambda}^{\beta+\lambda} f(\chi-\lambda)dx$, $\lambda \in R$

β) $\int_\alpha^\beta f(\chi)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha}^{\lambda\beta} f\left(\frac{\chi}{\lambda}\right)dx$, $\lambda \in R - \{0\}$

γ) $\int_\alpha^\beta f(\lambda-\chi)dx = \int_{\lambda-\beta}^{\lambda-\alpha} f(\chi)dx$, $\lambda \in R$

24) Αν η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] , να δείξτε ότι
$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-\chi)dx$

Με την βοήθεια του παραπάνω να υπολογίστε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{\nu}}^{\pi-\frac{\pi}{\nu}} \chi\eta\mu^3\chi dx$

25) α) Αν η συνάρτηση f , είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα [-α,α] , να δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\chi)dx = 0$

β) Αν η συνάρτηση f , είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα [-α,α] , να δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\chi)dx = 2\int_{0}^{a} f(\chi)dx$

26) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(\chi) = \int_{-1}^{\chi} \sqrt{t^2-t}\,dt$ β) $f(\chi) = \int_{2}^{\chi-3} \sqrt{t-2}\,dt$

γ) $f(\chi) = \int_{1}^{\chi} \frac{6}{t}dt$ δ) $f(\chi) = \int_{0}^{\chi-1} \frac{1}{t-2}dt$

ε) $f(\chi) = \int_{5-x}^{\ln\chi} \sqrt{t-1}\,dt$ στ) $f(\chi) = \int_{x^2-1}^{2\chi-4} \sqrt{t^2-4}\,dt$

27) Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(\chi) = \int_{0}^{\chi} (1+t+t^2)dt$ β) $f(\chi) = \int_{1}^{\chi} \left(e^{t^2}\right)dt$

γ) $f(\chi) = \int_{0}^{1-\chi} (1-2t+3t^2)dt$ δ) $f(\chi) = \int_{0}^{\sqrt{\chi}} \ln(t^2)dt$

ε) $f(\chi) = \int_{\chi^2}^{\chi^3} (e^{t+1})dt$ στ) $f(\chi) = \int_{\frac{1}{\chi}}^{\sqrt{\chi}} (\sigma\upsilon\nu(t^2))dt$

28) Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(\chi) = \int_{1}^{\chi} \frac{\chi\eta\mu t}{t}dt$ β) $f(\chi) = \int_{3}^{\chi} \frac{\chi e^t}{t}dt$

γ) $f(\chi) = \int_{1}^{\chi+1} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\chi^2}dt$ δ) $f(\chi) = \int_{1}^{\chi} \frac{\chi^2 \ln t}{t}dt$

29) Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(\chi) = \int_{1}^{2} f(2\chi-t)dt$ β) $g(\chi) = \ln x + x\int_{1}^{x} f(\chi-t)dt$

γ) $g(\chi) = \chi^3 - \chi\int_{1}^{2} f(\chi t)dt$ δ) $g(\chi) = \chi^4 + \chi^2\int_{1}^{2} tf^2(\chi t)dt$

30) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{\chi\to 1} \frac{3\int_{1}^{\chi} e^{t^2}dt}{\chi^3-1}$ β) $\lim_{\chi\to 1} \frac{3\int_{1}^{\chi} (e^t-e)dt}{\chi^2-2\chi+1}$

γ) $\lim_{\chi\to 0} \frac{3\int_{0}^{\chi} (\sigma\upsilon\nu t-1)dt}{\eta\mu\chi}$ δ) $\lim_{\chi\to 0} \frac{\int_{0}^{\chi} f(\chi-t)dt}{\eta\mu\chi}$ όπου $f(\chi) = \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$

31) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση , να δειχτούν τα παρακάτω

α) $\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{u} f(t)dt\right)du = \int_{0}^{x}(x-u)f(u)du$

32) Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(\chi)=\int_0^{\chi}\left(\int_0^t \eta\mu^5 u du\right)dt$ β) $f(\chi)=\int_0^{\chi}\left(\int_1^t \frac{\eta\mu u}{e^u}du\right)dt$

γ) $f(\chi)=\int_1^{\chi}\left(\int_2^t e^{t-u}\ln u du\right)dt$ δ) $f(\chi)=\int_0^{\chi}\left(\int_1^{2t+1} e^{u-1}u du\right)dt$

33) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1\left(\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt\right)dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\chi}\eta\mu u^2 du\right)d\chi$

34) Για δύο συνεχείς στο [α,β] συναρτήσεις f και g , να δειχτεί ότι

α) Αν $f(\chi)\geq g(\chi)$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(\chi)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(\chi)dx$

β) Αν m η ελάχιστη και Μ η μέγιστη τιμή της f στο [α,β] τότε

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(\chi)dx\leq \mathrm{M}(\beta-\alpha)$$

35) Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\eta\mu\chi$, να δείξτε ότι

α) $\chi-\frac{1}{6}\chi^3\leq f(\chi)\leq\chi$ για κάθε $\chi\geq 0$ β) $\frac{11}{24}\leq\int_0^1 \eta\mu\chi dx\leq\frac{1}{2}$

36) Να αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες

α) $4\leq\int_1^3\sqrt{3+\chi^3}dx\leq 2\sqrt{30}$ β) $\frac{\sqrt{3}}{8}\leq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}dx\leq\frac{\sqrt{2}}{6}$

γ) $1\leq\int_0^1 e^{\chi^2}dx\leq e$ δ) Αν 0<α<β τότε $\int_a^b\frac{dx}{\ln\chi}<\frac{2\beta}{\ln\beta}$

37) Να αποδείξτε ότι : $\int_0^1\chi^4\sigma\upsilon\nu\chi dx\leq-\int_1^0\chi^4 dx$

38) Να αποδείξτε ότι :

α} $\int_1^{\frac{1}{\chi}}\frac{e^{\chi t}}{t^2}dt\leq e(1-\chi)$ β) $\frac{\chi}{\ln 2\chi}\leq\int_{\chi}^{2\chi}\frac{dt}{\ln t}\leq\frac{\chi}{\ln\chi}$ για κάθε χ>1

39) Δίνεται η συνεχής στο $[0,+\infty)$ συνάρτηση f , με $f'(\chi)>0$ για κάθε χ>0.

Αν $F(\chi)=\int_0^{\chi}f(\chi)dx$ να δείξτε ότι : $\frac{1}{\chi}F(\chi)<F'(\chi)$ για κάθε χ>0

40)