

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3 \quad \beta) f(x) = 2x^4 - 5x + 1$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} \quad \delta) f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\epsilon) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \sigma\tau) f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

2) Όμοια των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \epsilon\phi 3x \quad \beta) f(x) = \sigma\phi 2x$$

$$\gamma) f(x) = \log \frac{x+1}{x-1} \quad \delta) f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$$

$$\epsilon) f(x) = \log(1-x^2) \quad \sigma\tau) f(x) = (3-x)^x$$

3) Όμοια των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}} \quad \beta) f(x) = (x-1)^{x+1}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \quad \delta) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{5}{|x-3|-1} \quad \sigma\tau) f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x - 1} + \frac{1}{\epsilon\phi x - 1} \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\zeta) f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$$

4) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + \lambda x + 4}$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} , των πραγματικών αριθμών

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Να βρείτε :

α) Για ποιες τιμές του x , η γραφική παράσταση της f , βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

β) Τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$

γ) Τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f , την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 3x + 2$

6) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{5-x}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις

$$f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad f \circ g \quad \text{και} \quad g \circ f$$

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ και $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

α) Να ορισθεί η σύνθεση $g \circ f$

β) Να βρεθεί μία συνάρτηση h , τέτοια ώστε, $(f \circ h)(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (-3,3)$

8) Να αναλυθούν οι παρακάτω συναρτήσεις, ως σύνθεση δύο ή περισσότερων στοιχειωδών συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt{\varepsilon\phi \frac{x-1}{x+3}}$ β) $f(x) = \ln \sigma\nu\sqrt{x^3}$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x + 2$. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση g , για την οποία να ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = x^2 + x - 2$

10) Δίνεται η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,3]$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g(x) = f(x^2 + 1)$ και $h(x) = f(\ln x)$

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις

$2f$, f^2 και $\frac{f}{f}$

Στην συνέχεια να σχεδιάστε, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τις γραφικές τους παραστάσεις

12) Να βρεθούν τα σύνολα τιμών, των συναρτήσεων :

α) $f(x) = -x^2 + x + 6$ β) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3$

γ) $f(x) = 2x^2 + x + 3$ δ) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ε) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ στ) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$

13) Όμοια των συναρτήσεων

α) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 4x + 3}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \in [2,3) \\ x - 1, x \in [3,5) \end{cases}$ δ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1, x \in [-3,2) \\ x^2, x \in [2,7] \end{cases}$

14) Να προσδιοριστούν οι τιμές του μ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \mu x + 1}{x^2 + x + 1}$ να

έχει σύνολο τιμών, το διάστημα $[-2,3]$

15) Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - \lambda}{x^2 - 2x + \lambda}$ να

έχει σύνολο τιμών όλο το \mathbb{R}

16) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(\chi\psi) = f(\chi) + f(\psi)$ για κάθε $\chi, \psi \in \mathbb{R} - \{0\}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(1) = 0$

β) $f\left(\frac{1}{\chi}\right) = -f(\chi)$

γ) $f(\chi^\nu) = \nu \cdot f(\chi)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και $\chi \neq 0$

17) Να βρεθεί συνάρτηση f , η οποία να πληρεί τη σχέση : $2f(\chi) - 3f\left(\frac{1}{\chi}\right) = \chi^2$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R} - \{0\}$

18) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία, τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(\chi) = \chi^3 + \chi + 1$

β) $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi + 4}$

γ) $f(\chi) = 1 - \sqrt{2\chi - 1}$

δ) $f(\chi) = -\chi^2 + \sigma\upsilon\nu\chi$ για $\chi \in [0, \pi]$

ε) $f(\chi) = 2 + 2e^{2-\chi}$

στ) $f(\chi) = 3\ln(2 - \chi) + 1$

19) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , ορισμένες σε ένα σύνολο A . Να δείξετε ότι αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στο A , τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A

20) Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο σύνολο A . Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f , είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο A

21) α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi - 3^{-\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $e^{x^2-3x} - e^{2-2x} = -3^{2(x-1)} + 3^{3x-x^2}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x^2-4} - 3^{4-x^2} < 0$

22) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι :

$$|f(\chi) - f(\psi)| < \frac{1}{2} |\chi - \psi| \text{ για κάθε } \chi, \psi \in \mathbb{R} \text{ με } \chi \neq \psi. \text{ Να αποδείξετε ότι η}$$

συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) - \frac{\chi}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

23) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα, τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(\chi) = \chi^4 - 5$

β) $f(\chi) = (\chi - 2)^2 - 3$

γ) $f(\chi) = \chi^2 - 6\chi + 8$

δ) $f(\chi) = 1 - \sqrt{2\chi - 1}$

24) α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$

25) Από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε ποιες είναι 1-1 και για κάθε μία από αυτές να βρείτε την αντίστροφη της

α) $f(x) = \log \frac{x}{2}$

β) $f(x) = 10^{x+1}$

γ) $f(x) = x^2 + 2$

δ) $f(x) = x^2 + 2$ με $x > 0$

ε) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

στ) $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

26) α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες, να δείξετε ότι η σύνθεση τους $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση

β) i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι η σύνθεση τους $f \circ g$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

ii) Να λύσετε την ανίσωση : $f(g(e^x - x)) < f(g(1 - x))$

iii) Να λύσετε την εξίσωση : $f(g(x^2 - 1)) = f(g(3x + 1))$

27) Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f .

α) Δείξτε ότι αντιστρέφεται

β) Δείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση, είναι και αυτή γνησίως αύξουσα

28) Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει :

$$f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

29) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι : $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) η συνάρτηση f , είναι 1-1

β) η συνάρτηση f , δεν είναι γνησίως μονότονη

γ) $f(0) = 0$

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$

α) Να δείξετε ότι η f , αντιστρέφεται

β) Να βρείτε, αν ορίζεται, τον αριθμό $f^{-1}(4)$

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις : $f(x) = 12$ και $f^{-1}(x) = -2$

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} με τους άξονες και την ευθεία $\psi = x$

ε) Να λύσετε την εξίσωση : $(2 - \eta\mu^2 x)^3 = \eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x + \eta\mu x - 2$

στ) Να λύσετε τις ανισώσεις : $f^{-1}(x) < 3$ και $f^{-1}(x+1) \geq x+5$

ζ) Να μελετήσετε την f^{-1} , ως προς την μονοτονία