Ανισότητες-ανισώσεις

Η απόδειξη μίας ανισότητας ή η επίλυση μίας ανίσωσης με την βοήθεια θεωρημάτων της Ανάλυσης, στηρίζεται σε ορισμούς ή θεωρήματα που περιέχουν ή μπορούν να εμφανίσουν ανισότητες. Τέτοια είναι :

Ορισμοί μονοτονίας

$\mapsto$ Μία συνάρτηση f , λέμε ότι είναι **γνησίως αύξουσα** στο σύνολο Α , όταν: για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{A}$ με $\chi_1 < \chi_2$ είναι και $f(\chi_1) < f(\chi_2)$

$\mapsto$ Μία συνάρτηση f , λέμε ότι είναι **γνησίως φθίνουσα** στο σύνολο Α , όταν: για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{A}$ με $\chi_1 < \chi_2$ είναι $f(\chi_1) > f(\chi_2)$

Ορισμοί ακροτάτων

$\mapsto$ Λέμε ότι η συνάρτηση f , παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο με $\chi = \chi_0$ όταν είναι $f(\chi) \leq f(\chi_0)$ για κάθε χ σε μια περιοχή του χ_0

$\mapsto$ Λέμε ότι η συνάρτηση f , παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο με $\chi = \chi_0$ όταν είναι $f(\chi) \geq f(\chi_0)$ για κάθε χ σε μια περιοχή του χ_0

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε : $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία κυρτότητας

$\mapsto$ Αν μία συνάρτηση f είναι **κυρτή** σ'ένα διάστημα Α, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Α , βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση (με εξαίρεση το σημείο επαφής). Δηλαδή $f(\chi) > \psi$ για κάθε $\chi \in \mathrm{A}$

$\mapsto$ Αν μία συνάρτηση f είναι **κοίλη** σ'ένα διάστημα Α, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Α , βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση (με εξαίρεση το σημείο επαφής). Δηλαδή $f(\chi) < \psi$ για κάθε $\chi \in \mathrm{A}$

Ανισότητες <u>με μονοτονία</u>

$\mapsto$ Πηγαίνουμε όλους τους όρους της ανισότητας στο 1ο μέλος της
Θεωρούμε συνάρτηση , με τύπο, τον αντίστοιχο του 1ου μέλους
Μελετούμε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
Εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο ορισμό μονοτονίας για κάθε διάστημα ξεχωριστά και διαμορφώνουμε την ανισότητα , ανάλογα

Παρατήρηση : Μπορούμε να διαμορφώσουμε κατάλληλα την ανισότητα , διαιρώντας , πολλαπλασιάζοντας κ.λ.π. με κατάλληλες ποσότητες, πριν να θεωρήσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

Παράδειγμα

Να δείξτε ότι : $\ln\chi \le \chi - 1$ για κάθε $\chi > 0$

$\mapsto$ Η ανισότητα γίνεται $\ln\chi \le \chi - 1 \Leftrightarrow \ln\chi - \chi + 1 < 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(\chi) = \ln\chi - \chi + 1$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη για κάθε $\chi > 0$, με $f'(\chi) = \dfrac{1}{\chi} - 1 = \dfrac{1-\chi}{\chi}$

Είναι : $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\chi}{\chi} = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$

χ	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		+	-
$f(\chi)$		↗	↘

Άρα στο διάστημα $(0,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[1,+\infty)$γνησίως φθίνουσα. Επομένως έχουμε

Αν $\chi \in (0,1] \Leftrightarrow \chi \le 1 \Leftrightarrow f(\chi) \le f(1) \Leftrightarrow \ln\chi - \chi + 1 \le 0$

Αν $\chi \in [1,+\infty) \Leftrightarrow \chi \ge 1 \Leftrightarrow f(\chi) \ge f(1) \Leftrightarrow \ln\chi - \chi + 1 \ge 0$

Άρα για κάθε $\chi > 0$ είναι $\ln\chi \le \chi - 1$

Ανισότητες <u>με ακρότατα</u>

Δουλεύουμε , όπως ακριβώς και με την μονοτονία. Συγκεκριμένα:

$\mapsto$ Πηγαίνουμε όλους τους όρους της ανισότητας στο 1ο μέλος της
Θεωρούμε συνάρτηση , με τύπο, τον αντίστοιχο του 1ου μέλους
Μελετούμε την συνάρτηση ως προς τα ακρότατα
Εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο ορισμό ακρότατου για κάθε ακρότατο ξεχωριστά και διαμορφώνουμε την ανισότητα , ανάλογα

Παράδειγμα

Να δείξτε ότι : $e^{\chi} \geq \chi + 1$ για κάθε $\chi \in R$

$\mapsto$ Η ανισότητα γίνεται : $e^{\chi} \geq \chi + 1 \Leftrightarrow e^{\chi} - \chi - 1 \geq 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(\chi) = e^{\chi} - \chi - 1$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi) = e^{\chi} - 1$

Είναι : $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow e^{\chi} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\chi} = 1 \Leftrightarrow \chi = 0$

χ	0	
$f'(\chi)$	-	+
$f(\chi)$	$\searrow$	$\nearrow$

Έχουμε ότι : για χ<0 είναι $f(\chi) > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > 0$

για χ>0 είναι $f(\chi) > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > 0$

για χ = 0 είναι $f(\chi) = 0$

Γενικά, για κάθε $\chi \in R$ είναι $f(\chi) \geq 0 = f(0)$, άρα η f , παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο χ = 0 το $f(0)$=0

Άρα $f(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi} - \chi - 1 \geq 0$, για κάθε $\chi \in R$

Συνοψίζοντας

Να δείξτε ότι $\underline{f(\chi) \geq g(\chi)}$ για κάθε $\chi \in \mathrm{A}$

Τότε :

<u>1η μέθοδος</u> : Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ την οποία μελετάμε , ως προς την μονοτονία στο Α

<u>2η μέθοδος</u>: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ την οποία μελετάμε , ως προς τα ακρότατα στο Α

Παρατηρήσεις

1) Η εμπειρία έχει δείξει ότι αν η εξίσωση $f'(\chi) = 0$, λύνεται εύκολα τότε προτιμάμε τη μέθοδο των ακρότατων

Αν η εξίσωση $f'(\chi) = 0$ δεν λύνεται εύκολα , τότε προτιμάμε τη μέθοδο της μονοτονίας

2) Αν δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f'(\chi)$, τότε εξετάζουμε τη μονοτονία της f' (ή μέρους αυτής!!), με τη βοήθεια του προσήμου της $f''(\chi)$

Παράδειγμα : Να δείξτε ότι : $\eta\mu\chi > \chi - \frac{\chi^3}{6}$ για κάθε $\chi \in (0, 2\pi)$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \eta\mu\chi - \chi + \frac{\chi^3}{6}$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη στο (0,2π) με $f'(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi-1+\frac{\chi^2}{2}$

(είναι δύσκολο να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f'(\chi)$)

Είναι : $f''(\chi)=-\eta\mu\chi+\chi>0$ για κάθε $\chi\in(0,2\pi)$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (0,2π) , οπότε έχουμε ότι :

$\chi\in(0,2\pi)\Leftrightarrow 0<\chi<2\pi\Leftrightarrow f'(0)<f'(\chi)<f'(2\pi)\Leftrightarrow f'(\chi)>0=f'(0)$

Επομένως η συνάρτηση f , είναι γνησίως αύξουσα στο (0,2π)

Άρα : $\chi\in(0,2\pi)\Leftrightarrow f(0)<f(\chi)\Leftrightarrow f(\chi)>0$. Δηλαδή : $\eta\mu\chi>\chi-\frac{\chi^3}{6}$

Ανισότητες <u>με το θεώρημα μέσης τιμής</u>

$\mapsto$ Από τη μορφή και τα περιεχόμενα της ανισότητας, βρίσκουμε τη συνάρτηση και το διάστημα, στο οποίο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα

Εφαρμόζουμε το θεώρημα

Από το διάστημα, στο οποίο βρίσκεται το ξ , δημιουργούμε ανισότητα για το $f'(\xi)$ (είτε κατασκευαστικά είτε με τη μονοτονία γνωστών συναρτήσεων)

Αντικαθιστώντας το $f'(\xi)$ και τα υπόλοιπα του θεωρήματος ($f(\alpha), f(\beta)$) , διαμορφώνουμε την ανισότητα, μέχρι να φτάσουμε στη ζητούμενη

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ να δείξτε ότι : $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta<\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

- Η ανισότητα γράφεται ισοδύνασμα :

$$\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta<\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{\alpha-\beta}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$ αφού α>β

Από αυτή γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση για την οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα είναι η $f(\chi)=\varepsilon\phi\chi$ και το διάστημα το [β,α]. Πράγματι :

Η f είναι συνεχής στο [β,α]

παραγωγίσιμη στο (β,α)

άρα υπάρχει $\xi\in(\beta,\alpha)$, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ Δηλαδή $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}=\frac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{\alpha-\beta}$

Αλλά $\xi\in(\beta,\alpha)$ $\beta<\xi<\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\alpha$ αφού η συνάρτηση $g(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu^2\beta>\sigma\upsilon\nu^2\xi>\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\frac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{\alpha-\beta}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

που είναι και η ζητούμενη

Παρατηρήσεις

1) Η παραπάνω ανισότητα είναι διπλή , αυτό όμως δεν πρέπει να αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα για τις άλλες μεθόδους , αφού μπορεί εύκολα να διασπαστεί σε δύο άλλες : τις $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta$ και $\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta < \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

2) Η ανισότητα , έχει δύο μεταβλητές, αλλά και αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί, σχετικά εύκολα , αν θέσουμε τη μία μεταβλητή με χ (π.χ. χ =α ή χ =β) οπότε θα έχουμε προς απόδειξη τις ανισότητες

$\frac{\chi-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\phi\chi - \varepsilon\phi\beta$ για $0 < \beta < \chi < \frac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\chi < \frac{\alpha-\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ για $0 < \chi < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3) Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι , αν η ανισότητα έχει δύο μεταβλητές , τότε είναι προτιμότερη η μέθοδος του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονοτονία

Μία μεταβλητή $\langle$

Ανισότητα $\langle$ Ακρότατα

Δύο μεταβλητές $\rightarrow$ θεώρημα μέσης τιμής

Ανισότητες <u>με τη βοήθεια της κυρτότητας</u>

Μ'αυτή τη μεθόδευση , δεν αποδεικνύονται όλες οι ανισότητες. Αποδεικνύονται ανισότητες στις οποίες το ένα μέλος μπορεί να πάρει τη μορφή πολυωνύμου α βαθμού (δηλαδή εξίσωσης ευθείας)

$\mapsto$ Στο α μέλος της ανισότητας , διαμορφώνουμε τον τύπο μίας συνάρτησης και στο δεύτερο, την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής , σε κάποιο σημείο. Κατόπιν , χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα κυρτότητας (όπως είναι διατυπωμένα παραπάνω)

Παράδειγμα

Να δείξτε ότι : $e^\chi > e\chi$ για κάθε $\chi \in R$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi$

Έχουμε ότι : $f'(\chi) = e^\chi$ και $f''(\chi) = e^\chi$

Επειδή $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$, η f είναι είναι κυρτή στο R.

Επειδή $f(1) = e$ και $f'(1) = e$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο χ =1 είναι

$\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - e = e(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = e\chi$

Αφού η f είναι είναι κυρτή στο R, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε οποιοδήποτε σημείο του R, θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .
Δηλαδή θα ισχύει : $f(\chi) > \psi \Leftrightarrow e^\chi > e\chi$ για κάθε $\chi \in R$

Ώρα για εξάσκηση

Να αποδείξτε τις ανισότητες :

1) $\chi\sigma\upsilon\nu\chi < \eta\mu\chi$ για κάθε $\chi \in (0,\pi)$

2) $e^{\chi} > e\chi$ για κάθε $\chi \in R$

3) $\frac{\chi}{\chi+1} < \ln(\chi+1)$ για κάθε χ>0

4) $(1+\chi)^{1+\chi} > e^{\chi}$ για κάθε χ >0

5) $\frac{2}{2\chi+1} < \ln\frac{\chi+1}{\chi} < \frac{1}{\chi}$ για κάθε χ > 0

6) $\chi - \frac{\chi^2}{2} < \ln(\chi+1) < \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3}$ για κάθε χ > 0

7) $\ln\chi \le \chi - 1 \le \chi\ln\chi$ για κάθε χ >0

8) $\chi^{e} e^{\frac{1}{x}} \ge 1$ για κάθε χ >0

9) $2\sqrt{\chi} + \frac{1}{\chi} > 3$ για κάθε χ >1

10) $\chi - \frac{\chi^2}{2} < \frac{\chi}{\sqrt{1+\chi}} < \chi$ για κάθε χ >0

Επίλυση ανισώσεων

$\mapsto$ Διαμορφώνουμε τα δύο μέλη της ανίσωσης , έτσι ώστε σε κάθε ένα από αυτά να παρουσιαστεί , τιμή κάποιας (της ίδιας συνάρτησης) συνάρτησης

Αφού θεωρήσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση, την μελετάμε , ως προς την μονοτονία

Με χρήση των ανισοτήτων του ορισμού της μονοτονίας, προχωράμε στην επίλυση της ανισότητας

Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση : $e^{3\chi^2-1} - e^{3-\chi} > -3\chi^2 - \chi + 4$

- Η ανίσωση γράφεται :

$$e^{3\chi^2-1} - e^{3-\chi} > -3\chi^2 - \chi + 4 \Leftrightarrow e^{3\chi^2-1} + \left(3\chi^2 - 1\right) > e^{3-\chi} + (3-\chi) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = e^{\chi} + \chi$

Αυτή έχει : $f'(\chi) = e^{\chi} + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in R$, Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης, η δοθείσα ανίσωση (1) γράφεται :

$f\left(3\chi^2 - 1\right) > f(3-\chi)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα είναι :

$3\chi^2 - 1 > 3 - \chi \Leftrightarrow 3\chi^2 + \chi - 4 > 0 \Leftrightarrow \chi < -\frac{4}{3}$ ή $\chi > 1$