

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

- 1) Να δείξετε ότι:
- $a^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
 - $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$
 - $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$
 - $\alpha^2 + \beta^2 \geq 12\alpha + 4\beta - 40$
 - $(\alpha^2 + \beta^2)(\chi^2 + \psi^2) \geq (\alpha\chi + \beta\psi)^2$
- 2) Να δείξετε ότι :
- $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$
 - $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$
 - $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2 > 0$
 - $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha + 2 > 0$
 - $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta - 1$
- 3) Αν $\alpha > 1$ να δείξετε ότι :
- $\alpha^2 > \alpha$
 - $\alpha^3 + \alpha > \alpha^2 + 1$
- 4) Αν $\chi < 2 < \psi$ να δείξετε ότι :
- $(\chi - 2)(\psi - 2)(\chi - \psi) > 0$
 - $\chi^2 + 2\psi > \chi\psi + 2\chi$
- 5) Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\alpha^2 > \beta^2$ να δείξετε ότι : $\alpha > \beta$
- 6) Αν $\alpha > \beta > 0$ να δείξετε ότι :
- $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} < \frac{\beta + 2}{\beta}$
 - $\frac{\alpha + 2\beta}{1 + 2\beta} > \frac{\alpha}{1 + \alpha}$
- 7) Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ να δείξετε ότι :
- $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$
 - $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$
- 8) Αν $-1 < \chi < 2$ και $0 < \psi < 1$ να δείξετε ότι :
- $-1 < \chi + \psi < 3$
 - $-3 < 3\chi + \psi < 7$
 - $-2 < \chi - \psi < 2$
 - $-2 < \chi - 2\psi + 1 < 3$
- 9) Αν $2 < \alpha < 3$ και $1 \leq \beta \leq 4$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχονται οι παρακάτω παραστάσεις :
- $\alpha + \beta$
 - $\alpha - \beta$
 - $\frac{\alpha}{\beta}$
 - $2\alpha + 3\beta$
 - $\alpha^2 - \beta^2$
- 10) Αν $\chi < -2$ και $\psi > -1$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\chi\psi + 2$ και $-\chi - 2\psi$
- 11) Αν $0 < \alpha < \beta$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς
- $$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$
- 12) Αν $\alpha > 0$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς
- $$\frac{\alpha + 8}{\alpha + 3}, \frac{\alpha + 6}{\alpha + 7}, 1, \frac{\alpha + 6}{\alpha + 5}$$

- 13) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $3^{17}17^{31}$ και $3^{31}17^{17}$
- 14) Να συγκρίνετε τους αριθμούς
 α) $2^3 + 3^3$ και 5^3 β) $2^{2004} + 3^{2004}$ και 5^{2004}
- 15) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός a για τον οποίο ισχύει ότι :
 $a^2 - 4a + 9 = 0$
- 16) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς χ και ψ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi - 2\psi + 2 = 0$
 β) $\chi^2 + \psi^2 + 10 = 2(\chi - 3\psi)$
 γ) $\chi^6 + \psi^8 + 1 = 2\chi^3$
 δ) $2\chi^2 + 2\chi\psi + 1 - 2\chi + \psi^2 \leq 0$
 ε) $\chi^2 + \psi^2 + 4\psi \leq 10\chi - 29$
- 17) α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \geq 0$
 β) Αν $\alpha + \beta + \gamma \geq 0$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$
- 18) Να εκτιμήσετε την περίμετρο και το εμβαδό ενός ορθογωνίου , με πλευρές α και β αν γνωρίζετε ότι :
 $3 \leq \alpha \leq 4$ και $5 \leq \beta \leq 7$
 Αν από το παραπάνω ορθογώνιο αφαιρέσουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου α , να εκτιμήσετε το εμβαδό του σχήματος που απομένει