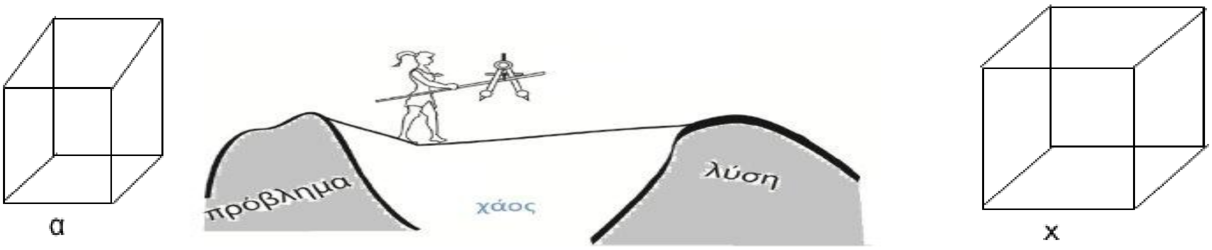
Τα Τρία Διάσημα Προβλήματα της Αρχαίας Ελλάδας

Κώστας Γ. Σάλαρης

Είναι γνωστό ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίζεται στα αξιώματα της, και χρησιμοποιεί σαν όργανα τον κανόνα και τον διαβήτη προκειμένου να επιτύχει γεωμετρικές κατασκευές σχημάτων με την απόλυτη ακρίβεια. Όταν λέμε λοιπόν, ότι ένα γεωμετρικό πρόβλημα έχει λύση εννοούμε ότι κατά την διαδικασία επίλυσής του χρησιμοποιούμε τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σαν κατασκευαστικά εργαλεία τον κανόνα και τον διαβήτη. Τα παρακάτω τρία προβλήματα της Αρχαίας Ελλάδας, όπως συνηθίζουμε να τα αποκαλούμε, είναι Το Δήλιο πρόβλημα, Η Τριχοτόμηση της γωνίας και Ο Τετραγωνισμός του κύκλου, εξακολουθούν μέχρι σήμερα να μην έχουν λύση. Έχει μαθηματικά αποδειχθεί, ότι οι κατασκευές στις οποίες αναφέρονται δεν επιτυγχάνονται με εργαλεία τον κανόνα και τον διαβήτη.. Βέβαια από την αρχαιότητα έχουν ανακαλυφθεί μέθοδοι και εργαλεία που προσφέρουν αξιόλογες λύσεις πάντοτε όμως εκτός δυνατοτήτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όχι με την απόλυτη ακρίβεια που αυτή «επιβάλλει».

Το Δήλιο πρόβλημα

Το Δήλιο πρόβλημα ή ο διπλασιασμός του όγκου του κύβου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε μια έντονη ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Το Δήλιο πρόβλημα απόκτησε δημοσιότητα όταν αναφέρεται, σε μια τραγωδία ότι ο Βασιλιάς της Κρήτης Μίνως διαμαρτυρόμενος γιατί το κενοτάφιο, που προοριζόταν για το γιό του Γλαύκο, ήταν πολύ μικρό για βασιλικό μνημείο και απαιτούσε το διπλασιασμό του όγκου του χωρίς να αλλάξει το κυβικό του σχήμα. Μια άλλη εκδοχή αναφέρει ότι ο χρησμός, που δόθηκε στους κατοίκους της Δήλου κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ., προκειμένου να υποχωρήσει η αρρώστια τους, συμβούλευε να κατασκευάσουν ένα κυβικό βωμό διπλάσιου όγκου από τον ήδη υπάρχοντα. Με τα σημερινά δεδομένα των Μαθηματικών το πρόβλημα διατυπώνεται. «Αν α είναι η πλευρά του κύβου και x η ζητούμενη πλευρά του κύβου που έχει διπλάσιο όγκο τότε θα ισχύει η εξίσωση $x^3 = 2\alpha^3$ ή $x = \alpha\sqrt[3]{2}$.» Η πλευρά x του ζητούμενου κύβου δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί με τα εργαλεία κανόνα και διαβήτη. Έτσι το πρόβλημα χαρακτηρίζεται άλυτο.



Κατασκευή Κύβου με όγκο διπλάσιο από δοθέντα Κύβο **(Άλυτο πρόβλημα)**

Το σημαντικότερο βήμα για την λύση του προβλήματος είχε κάνει ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ανακάλυψε το 460 π.Χ. , την εύρεση δύο μέσων αναλόγων μεταξύ ενός τμήματος και του διπλάσιού του, δηλαδή τα τμήματα x, y τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2\alpha}$, όπου α το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $x^3=2\alpha^3$ ή $x=\alpha\sqrt[3]{2}$ δηλαδή ο x είναι το μήκος της πλευράς ενός κύβου διπλάσιου όγκου από κύβο δοθείσης πλευράς. α. Το ευθύγραμμο τμήμα x δεν κατασκευάζεται με τους κανόνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες όταν οι προσπάθειές τους με το χάρακα και το διαβήτη δεν απέδωσαν, στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. . Οι γνωστότεροι αρχαίοι γεωμέτρες που ασχοληθήκανε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας είναι:

Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.) Αρχύτας ο Ταραντίνος (428-365 π.Χ.) Πλάτων (427-347π.Χ.) Μέναιχμος (375- π.Χ.) Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) Ερατοσθένης (276-194 π.Χ.) Απολλώνιος (265-170 π.Χ.) Νικομήδης (έζησε γύρω στο 200 π.Χ.) Ήρων ο Αλεξανδρινός (1ος -2ος αι. μ.Χ.) Διοκλής (1ος αι. π.Χ.) Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ χ)

Η Τριχοτόμηση γωνίας

Σήμερα δεν γνωρίζουμε κάτω από ποιες συνθήκες τέθηκε το πρόβλημα της τριχοτόμησης τυχούσας οξείας γωνίας (εκτός ειδικών περιπτώσεων, όπως της γωνίας π/3) στην ελληνική αρχαιότητα. Ξέρουμε όμως ότι αποτελούσε ένα από τα τρία μεγάλα προβλήματα μετά το Δήλιο και τον Τετραγωνισμό του κύκλου. Ουσιαστικά το πρόβλημα έγκειται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, διότι αν είναι αμβλεία και έχουμε επιτύχει την τριχοτόμηση οξείας γωνίας που προκύπτει από την αφαίρεση της ορθής από την αμβλεία αυτή γωνία, τότε στο 1/3 της οξείας γωνίας προσθέτουμε το 1/3 της ορθής που είναι κατασκευάσιμο και έχουμε την γωνία που είναι το 1/3 της αμβλείας.

Τριχοτόμηση οξείας γωνίας**(Άλυτο πρόβλημα)**

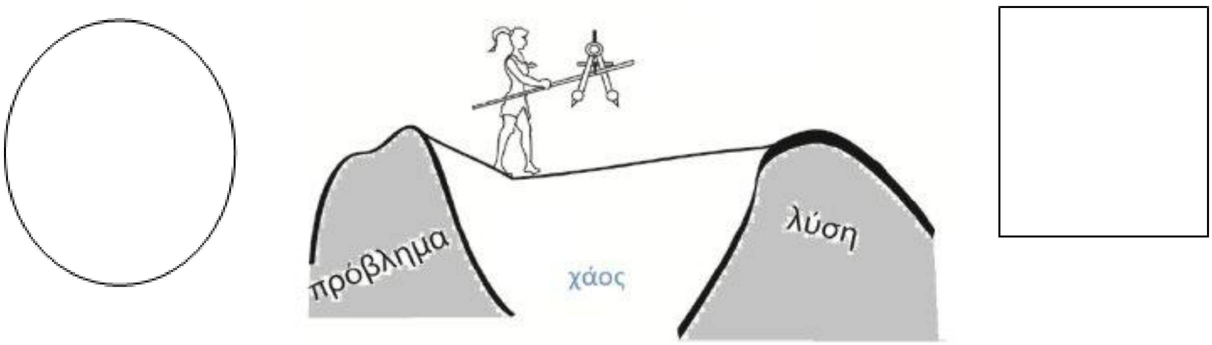
Η τριχοτόμηση μίας οξείας γωνίας είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με χάρακα και διαβήτη γιατί η εξίσωση που την εκφράζει είναι εν γένει εξίσωση τρίτου βαθμού χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου. Πράγματι από τη τριγωνομετρία μας είναι γνωστή η σχέση $\varepsilon\varphi 3\theta = \frac{3\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi^3\theta}{1-3\varepsilon\varphi^3\theta}$ ή $\varepsilon\varphi 3\theta - 3\varepsilon\varphi 3\theta \bullet \varepsilon\varphi^3\theta = 3\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi^3\theta$ εφ3θ=3, αν θέσουμε εφ3θ=α και εφθ=x και κάνουμε τις πράξεις θα φθάσουμε στην τρίτου βαθμού εξίσωση $x^3 - \alpha x^3 - 3x + \alpha = 0$ που η ρίζα της x ισούται με το ένα τρίτο της γωνίας. Η κατασκευή με χάρακα και διαβήτη των ριζών αυτής της εξίσωσης είναι δυνατή μόνο αν μπορεί αυτή να αναλυθεί σε δύο παράγοντες, ένα πρωτοβάθμιο και ένα δευτεροβάθμιο, όμως αυτό αποδείχθηκε μόλις το 1837, <u>ότι είναι εν γένει αδύνατο.</u>

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες όταν οι προσπάθειές τους με το χάρακα και το διαβήτη δεν απέδωσαν, στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η επινόηση από τον Ιππία τον Ηλείο της πρώτης καμπύλης στην ελληνική Γεωμετρία, μετά την περιφέρεια, της <u>τετραγωνίζουσας</u>, με τη βοήθεια της οποίας έδωσε και τη πρώτη λύση του προβλήματος, έξω από τους κανόνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες που ασχολήθηκαν με την λύση του προβλήματος είναι: <u>Ιππίας ο Ηλείος</u> (περίπου 430 π.Χ.), <u>Αρχιμήδης</u> (287-212 π.Χ.), <u>Νικομήδης</u> (περίπου 200π.Χ.) <u>Πάππος ο Αλεξανδρινός </u>(3ος αι. μ.Χ.)

<u>Ο Τετραγωνισμός του κύκλου</u>

Η μέτρηση του εμβαδού του περικλειομένου από κάποιο σχήμα, ήταν σε όλους τους λαούς, από την εποχή που ακόμη η γεωμετρία ήταν εμπειρικής μορφής, βασική επιδίωξη όλων των γεωμετρών. Από τη στιγμή που διαλέξανε σαν μονάδα μέτρησης των εμβαδών, το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, αυτόματα τέθηκε και το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων.

Αρχικά "τετραγωνίστηκαν" δηλαδή προσδιορίστηκε το εμβαδόν τους, τα ορθογώνια, τα τρίγωνα, τα παραλληλόγραμμα και ορισμένα πολύγωνα. Μετά από αυτό ήταν φυσικό να επιδιωχθεί και ο τετραγωνισμός σχημάτων περικλειομένων από καμπύλες γραμμές και πρώτου από όλα του κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, το τρίτο από τα μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας, απασχόλησε πολλούς ερευνητές για πολλούς αιώνες και υπήρξε το μεγάλο εμπόδιο πάνω στο οποίο σκόνταψαν μεγάλα ονόματα. Η απαίτηση του προβλήματος είναι να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο κύκλο, αν δηλαδή είναι ρ η ακτίνα του κύκλου και x η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, πρέπει να αληθεύει η σχέση $x^2 = \pi\rho^2$ ή $x = \rho\sqrt{\pi}$, όπου π ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου του κύκλου ο οποίος, όπως αποδείχτηκε, είναι άρρητος.



Κατασκευή Τετραγώνου ίσου Εμβαδού με δοθέντα Κύκλο «**Άλυτο πρόβλημα**»

Παρόλο που εμπειρικά είχε διαπιστωθεί ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο διατηρείται σταθερός, ωστόσο η κατασκευή αυτού του λόγου και όταν ακόμη η Γεωμετρία εφοδιασμένη με την απόδειξη είχε γίνει επιστήμη, στάθηκε αδύνατη. Υπήρξαν κατασκευές του π μεγαλοφυείς κατά τη σύλληψη όχι όμως πραγματοποιημένες σύμφωνα με την απαίτηση του "χάρακα και του διαβήτη" που έθεταν τότε. Παράλληλα έγιναν μεγαλειώδεις προσπάθειες υπολογισμού της τιμής του π, οι οποίες με πρωτεργάτη τον Αρχιμήδη, έδωσαν καταπληκτικά αποτελέσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.) δάσκαλος και φίλος του Περικλή. Στη συνέχεια ασχολήθηκαν οι Ιπποκράτης ο Χίος (470- 400 π.Χ.) ο σοφιστής Αντιφών ο Αθηναίος (περί το 430 π.Χ.) ο επίσης σοφιστής Βρύσων ο Ηρακλειώτης σύγχρονος του Αντιφώντα. Ουσιαστική ώθηση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δόθηκε από τον σοφιστή Ιππία τον Ηλείο (β' μισό

του 5ου αι. π.Χ.) και από τους Πάππο (3ος αι. μ.Χ.) και τον Δεινόστρατο (4ος αι. π.Χ.) αδελφό του Μέναιχμου.
Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ.) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν :

Αρχιμήδης (267-212 π.Χ.) με τη βοήθεια της "Έλικας".
Νικομήδης (περίπου 200 π.Χ.) με την καμπύλη που ονομαζόταν "ιδίως τετραγωνίζουσα".
Απολλώνιος (265-170 π.Χ.) με την καμπύλη που ονόμαζε ο ίδιος "αδελφή της κοχλοειδούς" που ήταν όμως ίδια με την καμπύλη του Νικομήδη.
Κάρπος με κάποια καμπύλη την οποία ονομάζει απλά "εκ διπλής κινήσεως προερχομένη".

Το 1882, ο Γερμανός μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε με αυστηρή μαθηματική διαδικασία ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί. , με εργαλεία τον κανόνα και τον διαβήτη, και χρησιμοποιώντας τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.