Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στάμη Τσικοπούλου
Μαθηματικός Μ.Ε - Med Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Υπ. Διδάκτορας Παν. Αθηνών
e-mail : stsikop@hol.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή με αφορμή την εισαγωγή μιας νέας διδακτικής ενότητας στο Α.Π.Σ των Μαθηματικών του Δημοτικού, τα μοτίβα, θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τις τελευταίες απόψεις για τη φύση των Μαθηματικών και το πώς αυτές επέδρασαν στη διαμόρφωση συγκεκριμένης άποψης για τη διδακτική μεθοδολογίας τους.

Εισαγωγή

Η μελέτη των προτύπων (patterns[1]) αποτελεί, με την ευρεία έννοια, τον πυρήνα της κατανόησης εννοιών, αλλά και της απόκτησης γνώσεων σε πολλά επιστημονικά πεδία, όπως στις θετικές επιστήμες, την οικονομία, στις κοινωνικές επιστήμες κ.ά. Γιατί :

- Απεικονίζουν την εμπειρία, τη γνώση και τις ιδέες όσων τα έχουν ήδη χρησιμοποιήσει επιτυχώς.
- Είναι επαναχρησιμοποιήσιμα, καθώς παρέχουν μια έτοιμη διαδικασία προσέγγισης, που μπορεί όποτε κριθεί αναγκαίο, να προσαρμοστεί σε διαφορετικά προβλήματα.
- Παρέχουν ένα κοινό λεξιλόγιο λύσεων με το οποίο είναι δυνατόν να εκφραστεί περιληπτικά μια μεγάλη ποικιλία λύσεων.

Δεν υπάρχει όμως καμία επιστημονική περιοχή στην οποία η μελέτη των προτύπων να είναι τόσο θεμελιώδης όπως είναι στα Μαθηματικά. Τα πρότυπα πραγματικά ή φανταστικά, οπτικά[2] ή διανοητικά, στατικά ή δυναμικά[3], ποιοτικά ή ποσοτικά, περισσότερο ή λιγότερο χρηστικά, ή απλώς ψυχαγωγικά, προκύπτουν είτε από την παρατήρηση του φυσικού κόσμου, είτε από τις δραστηριότητες του ανθρώπινου νου. Η επιστήμη έχει κατορθώσει να φτάσει σε υψηλά επιτεύγματα επειδή μέσα από τα Μαθηματικά μπόρεσε να καταγράψει, να κατηγοριοποιήσει, να συσχετίσει, να γενικεύσει και με τον τρόπο αυτό να ερμηνεύσει πολλές επαναλήψεις και δεδομένα που αφορούν επαναληπτικά φαινόμενα ή καταστάσεις.

Η αναγνώριση των προτύπων μελετάται σε πολλούς τομείς, συμπεριλαμβανομένης της Ψυχολογίας, της Ηθολογίας (πρότυπα συμπεριφοράς των ζώων) και της Πληροφορικής. Ένα

---

1 Σύμφωνα με το λεξικό Penguin, **pattern** σημαίνει πρότυπο, υπόδειγμα, τύπος, μοντέλο, σχέδιο, αχνάρι, ξεν πατρόν, δείγμα (υφάσματος κλπ)(νομισμ.)δείγμα που έχει κοπεί προκειμένου να υποβληθεί προς έγκριση, (διακοσμητικόν) σχέδιο, παράσταση, μοτίβο, σχήμα, διάταξη, (δια)σχηματισμός.

Στην εργασία αυτή θα υιοθετήσουμε ως μετάφραση του όρου pattern, τον όρο **πρότυπο**. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών(Α.Π.Σ) του Δημοτικού έχει υιοθετηθεί ο ξενικός όρος **μοτίβο**.

2 Τα μαθηματικά πρότυπα μερικές φορές αντανακλούν οπτικά πρότυπα που το ανθρώπινο μάτι βρίσκει κυρίως αισθητικά. Ένα περίφημο τέτοιο πρότυπο είναι ο λόγος της χρυσής τομής, που τον συναντάμε στη φύση, στο σύμπαν και στα ανθρώπινα δημιουργήματα κυρίως τα καλλιτεχνικά έργα.

3 Ένα πρότυπο μετακίνησης είναι η ταλάντωση.

πρότυπο λογισμικού είναι μια γενική επαναλαμβανόμενη λύση σε ένα συχνά εμφανιζόμενο πρόβλημα, που μπορεί να μετασχηματιστεί άμεσα σε κώδικα. Είναι μια περιγραφή ή ένα πρότυπο για το πώς να λυθεί ένα πρόβλημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές διαφορετικές καταστάσεις. Στην αεροπορία, ένα "σχέδιο πτήσης" είναι μια πορεία πτήσης, ένα πρότυπο πτήσης, που μπορεί να επαναληφθεί κάθε φορά που χορηγείται στο αεροσκάφος άδεια απογείωσης. Στη Γεωμετρία, το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι ένα πρότυπο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί όποτε είναι αναγκαίο να αποδειχθεί ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, όταν είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών του.

Διερευνώντας τα πρότυπα οι μαθηματικοί : υποθέτουν, δοκιμάζουν, ελέγχουν, εκφράζουν περιφραστικά και γενικεύουν. Μέσα από αυτή τη διαδικασία ανακαλύπτουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των προτύπων, ανακαλύπτουν έννοιες και σχέσεις, αναπτύσσουν μια γλώσσα για να μιλήσουν για το πρότυπο, ενοποιούν αλλά και κάνουν διακρίσεις μεταξύ του συγκεκριμένου πρότυπου που μελετούν και άλλων προτύπων που έχουν ήδη μελετήσει. Όταν επιπλέον μελετούν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων σ’ ένα πρότυπο, τότε καταλήγουν σε μαθηματικές σχέσεις και συναρτήσεις.

Αποκαλύπτοντας κρυμμένα πρότυπα τα Μαθηματικά μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα τον φορτωμένο με πληροφορία κόσμο στον οποίο ζούμε. Άλλωστε σήμερα, εκτός από την Αριθμητική και τη Γεωμετρία, ασχολούνται με στοιχεία, μετρήσεις και παρατηρήσεις, με την επαγωγή, την αφαίρεση, την απόδειξη και τα μαθηματικά μοντέλα των φυσικών φαινόμενων, της ανθρώπινης συμπεριφοράς και των κοινωνικών συστημάτων. Ο κύκλος από τα στοιχεία στην αφαίρεση και στην εφαρμογή, επαναλαμβάνεται οπουδήποτε χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά, από τις καθημερινές εργασίες έως σημαντικά διαχειριστικά προβλήματα όπως ο σχεδιασμός της κυκλοφορίας αερογραμμών ή η διαχείριση των χαρτοφυλακίων επένδυσης.

Τις δύο τελευταίες δεκαετίες πολλοί μαθηματικοί θεωρούν την εργασία τους ως τη μελέτη κανονικοτήτων και δομών δηλαδή, τη μελέτη των προτύπων και της τάξης. Τα πρωταρχικά αντικείμενα της ενασχόλησή τους δεν είναι τα μόρια ή τα κύτταρα αλλά, οι αριθμοί, η πιθανότητα, η μορφή, οι αλγόριθμοι και η αλλαγή. Ο Devlin Keith (1994) στο πολύ ενδιαφέρον βιβλίο του «Mathematics: The science of Patterns» υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη των προτύπων και διακρίνει έξη κατηγορίες : **πρότυπα αρίθμησης** (φυσικοί αριθμοί), **πρότυπα δικαιολόγησης και επικοινωνίας** (γλώσσα και λογική[4]), **πρότυπα κίνησης και αλλαγής** (calculus-λογισμός), **πρότυπα μορφής** (γεωμετρία), **πρότυπα συμμετρίας και κανονικότητας** (πλακοστρώσεις, διακοσμητικές ταινίες) και **πρότυπα θέσης** (τοπολογία, κόμβοι, δίκτυα).

Τα πρότυπα και η Θεωρία κατασκευής της γνώσης

Το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκεται υπό συνεχή διαπραγμάτευση, με αποτέλεσμα οι μεταρρυθμίσεις της, κυρίως από την δεκαετία του ’50, να διαδέχονται η μια την άλλη. Οι πόλεμοι για τα μαθηματικά («The math wars») δεν αφορούν μόνο αντιπαραθέσεις για τις μεθόδους και το περιεχόμενο των Προγραμμάτων Σπουδών. Πίσω τους όπως υποστηρίζει ο Schoenfeld (2004) βρίσκονται σημαντικές διαφορές ως προς τη φύση των Μαθηματικών και ως προς το ερώτημα «Τι είναι τα Μαθηματικά». Το κύμα της τελευταίας μεταρρύθμισης στη μαθηματική εκπαίδευση ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Αντιδρώντας στα «νέα

[4] Η πρώτη συστηματική προσπάθεια να περιγραφούν τα πρότυπα που περιλαμβάνονται στην απόδειξη έγινε από τους αρχαίους Έλληνες και ειδικότερα από τον Αριστοτέλη. Αυτές οι προσπάθειες οδήγησαν στη δημιουργία *της αριστοτελικής λογικής.* Η ύπαρξη μιας απόδειξης έχει να κάνει με κάποιο αφηρημένο πρότυπο ή μια αφηρημένη δομή που συνδέεται με το επιχείρημα. (Devlin, 1994).

Μαθηματικά»[5] της δεκαετίας του 1960 και 1970, οι εκπαιδευτικοί άρχισαν να ανταποκρίνονται στο αίτημα για «επιστροφή στη βασική παιδεία»,“back to basics”. Αυξημένο ήταν το ενδιαφέρον για εστίαση στην επίλυση προβλημάτων, ως κεντρικού άξονα του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών. Την ίδια εποχή το έργο του Piajet και των άλλων εξελικτικών ψυχολόγων έστρεψε την προσοχή των εκπαιδευτικών **από την ύλη των μαθηματικών, στον τρόπο με τον οποίον τα παιδιά μπορούν να μάθουν καλύτερα μαθηματικά**.

Στη δεκαετία του ’80 «η επίλυση προβλήματος» απετέλεσε κεντρικό στόχο στη μαθηματική εκπαίδευση[6] και «η επίλυση προβλήματος» κατά Polya επέστρεψε[7]. Οι σημαντικότερες φιλοσοφικές και παιδαγωγικές προτάσεις του Polya βασίστηκαν στην πεποίθηση ότι τα μαθηματικά γεγονότα υποτίθενται αρχικά και αποδεικνύονται στη συνέχεια Οι μαθηματικές απόψεις του Polya[8] ταυτίζονταν με τις επιστημονικές απόψεις του Popper και του Lakatos[9]. Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες, η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης δεν ακολουθεί την αξιωματική ή την παραγωγική διαδικασία. Μάλλον μια παραγωγική προσέγγιση χρησιμοποιείται για να καταδείξει την αλήθεια ενός ιδιαίτερου θεωρήματος, μόλις προσεγγιστεί μέσω της άσκησης της δημιουργικότητας, της μαθηματικής διαίσθησης και του επαγωγικού» (Toumasis, 1997). Στο τέλος της δεκαετίας του ’80 η κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης υιοθέτησε μια ημι-εμπειρική αντίληψη των Μαθηματικών.

Ο προβληματισμός και οι μελέτες του Piajet για τον τρόπο οικοδόμησης της γνώσης απετέλεσε τη βάση της θεωρίας του κονστρουκτιβισμού (κατασκευαστική θεωρία της γνώσης). Η θεωρία κατασκευής της γνώσης εξετάζει όχι μόνο τη γνώση αλλά και τους μηχανισμούς δημιουργίας της. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η γνώση δεν θεωρείται ως το αποτέλεσμα συσσώρευσης και συνδυασμού πληροφοριών αλλά, ως το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας διαντίδρασης ανάμεσα στο άτομο και το περιβάλλον η οποία παράγει ένα σύστημα οργανωμένης γνώσης. Η υιοθέτηση όμως της υπόθεση της κατασκευής της γνώσης οδηγεί σε

[5] Το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών της δεκαετίας του ’50 και του ’60 έδινε έμφαση στη διδασκαλία αφηρημένων μαθηματικών εννοιών ήδη από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης των μαθητών. Για παράδειγμα μεταξύ άλλων στο Δημοτικό συγκαταλέγονταν η διδασκαλία της θεωρίας των συνόλων, τα διάφορα αριθμητικά συστήματα […] Τα «νέα Μαθηματικά» ήταν μια προσπάθεια να κατανοηθούν τυπικές μαθηματικές αρχές και έννοιες όπως δομή, απόδειξη, γενίκευση και αφαίρεση ήδη από τις πρώτες τάξης του Δημοτικού. Στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης ήταν η κατανόηση και όχι απλά ο χειρισμός των συμβόλων καθώς και η ακριβής και ορθή χρήση της μαθηματικής γλώσσας[…]. Η ψυχολογική θεωρία που στήριζε το κίνημα των «νέων μαθηματικών» ήταν η ψυχολογία gestalt. (Ε Κολέζα 2006, σελ 136).

[6] Η δεκαετία του ’80 άρχισε με τη δήλωση της Επιτροπής του NCTM (Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων των Μαθηματικών των ΗΠΑ)στην *Ατζέντα Δράσης* (NCTM 1980), ότι «Τα σχολικά μαθηματικά πρέπει να εστιάζουν στην επίλυση προβλήματος».

[7] Η έννοια του problem solving δεν είναι δημιούργημα της δεκαετίας του ’80 καθώς είχε μια σημαντική κληρονομιά που ξεκινούσε από το βιβλίο του Polya «Πως να το λύσω»(1954). Είναι όμως για τη δεκαετία αυτή μια νέα κίνηση.

[8] «Εάν η μάθηση των Μαθηματικών έχει κάποια σχέση με την ανακάλυψη των Μαθηματικών, πρέπει να δοθεί κάποια ευκαιρία στο μαθητή να ασχοληθεί με τα προβλήματα στα πλαίσια των οποίων αρχικά θα διατυπώσει κάποιες υποθέσεις και στη συνέχεια θα αποδείξει κάποιο μαθηματικό γεγονός σε ένα κατάλληλο επίπεδο» (G. Polya, 1991).

[9] Ο Popper υποστήριξε ότι η ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης αρχίζει με ένα πρόβλημα, κατόπιν ακολουθεί μια δοκιμαστική λύση, μια υπόθεση, μια κριτική και μια διόρθωση των λαθών (Popper, 1959). Ο Lakatos είχε δώσει έμφαση στο πρόβλημα και θεωρούσε ότι ξεκινώντας από ένα πρόβλημα ή μια εικασία, ταυτόχρονα υπήρχε και η αναζήτηση για αποδείξεις και αντι-παραδείγματα (Lakatos, 1996).

ενεργητικές (κατασκευαστικές) μεθόδους μάθησης. Αλλά στα Μαθηματικά ενεργητικές μέθοδοι μάθησης σημαίνει Λύση Προβλήματος (Ν. Κλαουδάτος 1989, σελ 43). Η βασικότερη άλλωστε αρχή της κατασκευαστικής θεωρίας μάθησης είναι ότι η μάθηση προκύπτει με τη δράση κατά την επίλυση προβλημάτων. Μια από τις στρατηγικές-ευρετικές που συντελούν στη βελτίωση της ικανότητας για επίλυση προβλήματος είναι να ψάξουμε να βρούμε μήπως υπάρχει ένα πρότυπο (look for a pattern), μια γενίκευση.

Από τα μέσα της δεκαετίας του ’80, σε διεθνές επίπεδο, σταδιακά αλλά συστηματικά άρχισαν να σημειώνονται μεταβολές στη μαθηματική εκπαίδευση οι οποίες αφορούν όλες τις συνιστώσες της δηλαδή, τους σκοπούς, τους στόχους, το περιεχόμενο, τα είδη των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, τη διάρθρωση του Προγράμματος σπουδών και των διδακτικών βιβλίων, τις διδακτικές μεθόδους αλλά και τις μεθόδους αξιολόγησης. Οι αλλαγές στα εκπαιδευτικά προγράμματα των Μαθηματικών στις διάφορες χώρες υπήρξαν αργές και σταδιακές αλλά σήμερα είναι πλέον ορατές[10].

Το 1989, το NCTM εξέδωσε το Πρόγραμμα Σπουδών και την Αξιολόγηση των Κριτηρίων για τα Σχολικά Μαθηματικά *(*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics). Πέντε είναι τα Κριτήρια περιεχομένου (θεματικές ενότητες) που προτείνονται στο κείμενο αυτό : **Αριθμοί και Πράξεις**, **Άλγεβρα**, **Γεωμετρία**, **Μέτρηση και Ανάλυση Δεδομένων**, **Πιθανότητες**. Ταυτόχρονα έθεσε και τέσσερα Κριτήρια Διαδικασίας (μαθηματικής διαδικασίας μέσω της οποίας οι μαθητές αφομοιώνουν τη μαθηματική γνώση) : **Επίλυση προβλημάτων**, **Συλλογιστική και Αποδείξεις**, **Επικοινωνία**, **Συσχετισμοί**. Η έκδοση αυτή, που συμπληρώθηκε πολλές φορές τα επόμενα χρόνια, υπήρξε ορόσημο για τα σχολικά Μαθηματικά καθώς δημιούργησε ένα μεταρρυθμιστικό κίνημα στη μαθηματική εκπαίδευση που υιοθετήθηκε όχι μόνο από τις ΗΠΑ και τον Καναδά αλλά και από ολόκληρο τον κόσμο. Πολλές χώρες έχουν εφαρμόσει τα Κριτήρια του NCTM πολύ πιο αποτελεσματικά απ’ ό,τι οι ίδιες οι ΗΠΑ (Van de Walle , 2001).

Το κείμενο των Standards του 1989, έθεσε ως στόχο της μαθηματικής εκπαίδευση σε όλα τα επίπεδα, από το προνήπιο μέχρι και την Γ΄ Λυκείου, τη μελέτη των **Προτύπων,** των **Συναρτήσεων,** και της **Άλγεβρας**[11](την ανάπτυξη της αλγεβρικής συλλογιστικής και των αλγεβρικών εννοιών). Από τότε, στα Α Π Σ. των Μαθηματικών όλων των βαθμίδων, εισήχθη η μελέτη των προτύπων, ως του πλέον ενδεδειγμένου εργαλείου, για την επίτευξη των παραπάνω στόχων. Για αυτό η δεκαετία του ’90 χαρακτηρίζεται από πολλούς ως η **δεκαετία των προτύπων**. Το 2000 το NCTM δημοσίευσε ένα νέο αναθεωρημένο κείμενο των Standards, το Principles and Standards for School Mathematics (Αρχές και Κριτήρια για τα Σχολικά

---

[10] Από το 1996 συντελέστηκαν σημαντικές αναμορφώσεις στη μαθηματική εκπαίδευση και στη χώρα μας. Εκπονήθηκε το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ) (για περισσότερα Ευκλείδης Γ, τεύχη 48-49-50-51, τόμοι 14-15, 1997-1998) και συντάχθηκαν Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για την εννιάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση και την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου. Με βάση τα προγράμματα αυτά γράφηκε το εγχειρίδιο για την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου.

Το 2003 δημοσιεύθηκε το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και τα νέα Α.Π.Σ των Μαθηματικών της εννιάχρονης υποχρεωτικής εκπαίδευσης, με βάση τα οποία γράφτηκαν τα διδακτικά εγχειρίδια που διδάσκονται από το σχολικό έτος 2006-2007 στο Δημοτικό και από τη φετινή σχολική χρονιά και στο Γυμνάσιο.

[11] NCTM Standards (1998): Τα εκπαιδευτικά προγράμματα των Μαθηματικών πρέπει να δώσουν προσοχή στα πρότυπα, στις συναρτήσεις, τα σύμβολα και τα μοντέλα έτσι ώστε όλοι οι μαθητές : να καταλάβουν τους διάφορους τύπους προτύπων και συναρτησιακών σχέσεων - να χρησιμοποιούν συμβολικές μορφές για να αναπαραστήσουν και να αναλύσουν μαθηματικές καταστάσεις και δομές - να χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα και να αναλύουν την αλλαγή σε πραγματικά και αφηρημένα πλαίσια.

Μαθηματικά) προσθέτοντας και ένα 5^{o} κριτήριο διαδικασίας, την Αναπαράσταση (Van de Walle , 2001).

Μαθηματικά και πρότυπα

Βασικός στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών των περισσοτέρων Α.Π.Σ. είναι να γίνουν οι μαθητές ικανοί λύτες προβλήματος. Ο στόχος όμως αυτός μετά βίας γίνεται σαφής. Ασαφής είναι επίσης και ο ρόλος που πρέπει να διαδραματίσει η επίλυση προβλήματος στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών. Ποιοι επομένως είναι οι στόχοι για την διδασκαλία των Μαθηματικών και πώς η επίλυση προβλήματος εντάσσεται μέσα σε αυτούς; Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992) «τέτοιου είδους ερωτήσεις είναι σύνθετες». Οι στόχοι για τη διδασκαλία των Μαθηματικών εξαρτώνται από το πώς κάποιος αντιλαμβάνεται τι είναι τα Μαθηματικά και πως τα κατανοεί. Τέτοιες αντιλήψεις ποικίλλουν ευρέως. Από τη μία πλευρά του φάσματος, η μαθηματική γνώση θεωρείται ως το σώμα των δεδομένων και των διαδικασιών που εξετάζουν τις ποσότητες, τα μεγέθη, τις μορφές και τις μεταξύ τους σχέσεις. Το να γνωρίζει κανείς μαθηματικά σημαίνει ότι μπορεί και να χειρίζεται και να κατέχει πλήρως τα δεδομένα και τις διαδικασίες. Στο άλλο άκρο του φάσματος, τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως η "επιστήμη των προτύπων"[12] μια ημι-εμπειρική επιστήμη, η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τις άλλες επιστήμες καθώς αυτές δίνουν έμφαση στην αναζήτηση πρότυπου, στηριζόμενες σε εμπειρικά δεδομένα.

Η πρώτη οπτική σύμφωνα πάντα με τον Schoenfeld, μειώνει τη σημασία των Μαθηματικών, καθώς ένα πρόγραμμα σπουδών που στηρίζεται στην κατοχή ενός σώματος μαθηματικών δεδομένων και διαδικασιών γίνεται ασήμαντο, όπως συμβαίνει με ένα πρόγραμμα εκμάθησης της αγγλικής γλώσσας αν αυτό εστίαζε την προσοχή του αποκλειστικά, στα ζητήματα της γραμματικής. Ο Schoenfeld χαρακτηρίζει τα μαθηματικά «ως μια εγγενώς κοινωνική δραστηριότητα», στην οποία η κοινότητα των μαθηματικών συμμετέχει στην επιστήμη των προτύπων, καταβάλλοντας συστηματικές προσπάθειες, βασισμένες στην παρατήρηση, τη μελέτη και τον πειραματισμό, για να καθορίσουν τη φύση ή τις αρχές των κανονικοτήτων στα συστήματα που καθορίζονται αξιωματικά ή θεωρητικά «καθαρά Μαθηματικά» ή τα πρότυπα των συστημάτων που αφαιρούνται από τα πραγματικά αντικείμενα «εφαρμοσμένα Μαθηματικά». Τα εργαλεία των Μαθηματικών είναι αφαίρεση, η συμβολική αντιπροσώπευση και ο χειρισμός των συμβόλων. Αυτός ο μετασχηματισμός των απόψεων για τη φύση των Μαθηματικών υποδεικνύει αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο της διδασκόμενης ύλης όσο και στον τρόπο διδασκαλίας τους. Αφορά μια ανανεωμένη προσπάθεια που εστιάζει στην :

- Αναζήτηση λύσεων και όχι την απομνημόνευση διαδικασιών.
- Διερεύνηση προτύπων και όχι την απομνημόνευση τύπων.
- Διατύπωση υποθέσεων και όχι απλώς την επίλυση ασκήσεων.

Καθώς η διδασκαλία αποδίδει έμφαση στα παραπάνω οι μαθητές έχουν ευκαιρίες να μελετήσουν τα μαθηματικά ως μια διερευνητική, δυναμική, εξελισσόμενη επιστήμη παρά ως ένα άκαμπτο, απόλυτο, κλειστό σώμα κανόνων και σχέσεων που πρέπει να απομνημονεύονται. Η σπουδή των Μαθηματικών μέσα από αυτή την προσέγγιση αποκτά μια δυναμική. Γιατί, αν και η γλώσσα των μαθηματικών στηρίζεται στους κανόνες που πρέπει να μαθευτούν, είναι πολύ σημαντικό προκειμένου να κρατηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών να μπορούν να πάνε πέρα από τους κανόνες, προκειμένου να μπορέσουν να εκφραστούν στη γλώσσα των Μαθηματικών.

---

[12] Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη των προτύπων και της τάξης. Αυτή τη εκπληκτικά απλή περιγραφή των Μαθηματικών διατυπώνεται στο κείμενο του NCTM Everybody Counts (MSEB, 1989 βλ. επίσης και Shoenfeld, 1992). Ο ορισμός αυτό αποτελεί πρόκληση για την δημοφιλή κοινωνικά άποψη ότι στα μαθηματικά κυριαρχούν οι υπολογισμοί και οι αναιτιολόγητοι κανόνες.

Μοτίβα : μια νέα διδακτική ενότητα στο Α.Π.Σ των Μαθηματικών του Δημοτικού

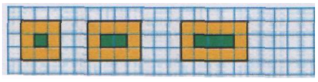
Η εισαγωγή νέων σχολικών βιβλίων για τα Μαθηματικά, αν και με καθυστέρηση πολλών ετών, είναι μια θετική αλλαγή προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας. Στο νέο Α.Π.Σ των Μαθηματικών του Δημοτικού εισάγεται για πρώτη φορά, ως διδακτέα ενότητα σε όλες τις τάξεις, το **μοτίβο**. Σύμφωνα με το Α.Π.Σ η διδασκαλία της ενότητας αυτής εντάσσεται, σε όλες τις τάξεις, στο κεφάλαιο των μετρήσεων(!!!). Οι συγγραφικές όμως ομάδες των σχολικών βιβλίων έχουν εντάξει δραστηριότητες με μοτίβα και σε άλλες ενότητες. Τα μοτίβα που παρουσιάζονται είναι το γεωμετρικό, το αριθμητικό και το σύνθετο.

Σύμφωνα με το βιβλίο του μαθητή της Στ΄ τάξης:

*Το στοιχείο που επαναλαμβάνεται και δημιουργεί ένα σχέδιο ονομάζεται **γεωμετρικό μοτίβο.** Για να δημιουργήσουμε ή να επεκτείνουμε ένα σχέδιο με επαναλαμβανόμενα μέρη, αρκεί να γνωρίζουμε το μοτίβο και τον τρόπο με τον οποίο αυτό επαναλαμβάνεται (σελ 128)*

*Σε μια σειρά αριθμών που υπάρχει μια σχέση σταθερή και επαναλαμβανόμενη ανάμεσα στους αριθμούς, ο κανόνας που ορίζει τη σχέση αυτή και μας δείχνει πως δημιουργήθηκε η σειρά των αριθμών λέγεται **αριθμητικό μοτίβο**. (π.χ. 5, 10, 15, 20, 25, … α, α + 5) (σελ 130)*

*Ένα σχέδιο που ακολουθεί ταυτόχρονα γεωμετρικό και αριθμητικό μοτίβο, λέγεται **σύνθετο μοτίβο.***



Σ' ένα τέτοιο σχέδιο ενώ διακρίνουμε εύκολα το γεωμετρικό μοτίβο για να διακρίνουμε το αριθμητικό χρειάζεται να καταγράψουμε τα δεδομένα σε έναν πίνακα (σελ 132.)

Τα μοτίβα όπως αναφέρεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Στ΄ τάξης, σελ 124, είναι περισσότερο **μια διαδικασία ανακάλυψης** παρά μια μαθηματική έννοια που θα διδαχθεί το παιδί. **Είναι ο δρόμος που θα οδηγήσει τη σκέψη του στην Άλγεβρα.** Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να τεκμηριώσουμε τη άποψη αυτή, επειδή αποτελεί το βασικό λόγο για την εισαγωγή των μοτίβων στο Α.Π.Σ των Μαθηματικών.

Ο ρόλος των προτύπων στην ανάπτυξη της αλγεβρικής συλλογιστικής

Η θέση και ο ρόλος της Άλγεβρας στα σχολικά Μαθηματικά σήμερα εξετάζεται από πολλές πλευρές και ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλία της, φαίνεται ότι έχει ανάγκη ενός θεμελιακά νέου τρόπου αντιμετώπισης. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα στις διασυνδέσεις με άλλα πεδία εντός και εκτός των μαθηματικών και συχνά βλέπουν την Άλγεβρα ως ένα φορμαλιστικό απομονωμένο σύστημα όπου κυριαρχεί ο χειρισμός συμβόλων και κανόνων (Kieran, 1991, Linchevski & Herscovics, 1994). Από την άλλη μεριά οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, διαπιστώνουν ότι οι γνώσεις των μαθητών στην Άλγεβρα από τις χαμηλότερες βαθμίδες είναι ελλιπείς. Η Άλγεβρα είναι μια διαδρομή για τα ανώτερα Μαθηματικά, αλλά συγχρόνως αποτελεί και εμπόδιο για πολλούς μαθητές, που τους αναγκάζει να πάρουν μιαν άλλη εκπαιδευτική κατεύθυνση (Kaput, 1995).

Τις τελευταίες δεκαετίες, η διδασκαλία και η εκμάθηση της άλγεβρας, ως τμήμα της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Το ενδιαφέρον τους έχει μετακινηθεί από τις συμπεριφορικές (behaviouristic) προοπτικές προς μια βαθιά ανάλυση των γνωστικών ικανοτήτων που περιλαμβάνονται στην εκμάθηση της Άλγεβρας. Η αλγεβρική συλλογιστική περιλαμβάνει την αναπαράσταση, τη γενίκευση, την τυποποίηση καταστάσεων και τη κανονικότητα σε όλες τις πλευρές των Μαθηματικών. Όπως σημειώνει ο Kaput (1998) είναι δύσκολο να βρούμε μια περιοχή των μαθηματικών η οποία να μη συνεπάγεται τη γενίκευση και την τυποποίηση με κάποιο ουσιώδη τρόπο. Αυτός όμως ο τύπος της συλλογιστικής βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών ως επιστήμης των προτύπων και της τάξης.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα έχουν αποδοθεί στις ασυνέπειες της με την αριθμητική, όπως για παράδειγμα ότι μια μεταβλητή μπορεί ταυτόχρονα να αντιπροσωπεύσει πολλούς αριθμούς, το γράμμα μπορεί να επιλεχτεί τυχαία κ.λ.π. Οι μεταβλητές όμως είναι βασικό εργαλείο για τις γενικεύσεις, καθώς είναι σύμβολα που παίρνουν τη θέση αριθμών ή πεδίων αριθμών και έχουν διαφορετικές σημασίες ανάλογα με το κατά πόσον χρησιμοποιούνται ως αναπαραστάσεις ποσοτήτων που αλλάζουν, αναπαραστάσεις συγκεκριμένων αγνώστων τιμών ή ως σύμβολα σε μια γενική έκφραση ή τύπο. Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής είναι θεμελιώδης για την επιτυχία των μαθητών στην Άλγεβρα. Η έννοια αυτή είναι περιπλοκότερη από ότι νομίζουμε και είναι συχνά η αιτία να μπει φραγμός στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μας (NCTM 1989).

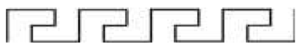
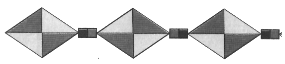
Παραδοσιακά, μια πρώτη σύγκρουση των μαθητών με μια μεταβλητή είναι σε μια εξίσωση, όπου αντιπροσωπεύει έναν άγνωστο αριθμό. Εγχειρίδια που ακολουθούν αυτήν την προσέγγιση εισαγωγής της μεταβλητής, λίγες ευκαιρίες δίνουν στους μαθητές να ερευνήσουν και να βιώσουν την «κατασκευή» της Άλγεβρας. Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι πολλοί μαθητές, για να φθάσουν σε σημείο να μπορούν να διαχειρίζονται με νόημα μεταβλητές και συμβολικές εκφράσεις, θα χρειαστεί να αποκτήσουν μεγάλη εμπειρία στην ερμηνεία των σχέσεων που συνδέουν μεγέθη μιας ποικιλίας προβλημάτων από διάφορα πλαίσια. Το πεδίο εστίασης είναι τα πρότυπα, οι συναρτήσεις και η ικανότητα να αναλύουμε καταστάσεις με τη βοήθεια των συμβόλων. Τα προγράμματα σπουδών συστήνουν τώρα άτυπες, συγκεκριμένες δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές ερευνούν πρότυπα με σχήματα και αριθμούς, διατυπώνουν λεκτικούς κανόνες για να περιγράψουν αυτά τα σχέδια και στη συνέχεια ψάχνουν τρόπους να γενικεύσουν την κατάσταση που διερευνούν (Morelli 1992, NCTM 1989).

Η χρήση των συμβόλων στα μαθηματικά και οι γραφικές αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών και καταστάσεων αντιμετωπίζονταν από τα παραδοσιακά Μαθηματικά σαν διαφορετικές γνωστικές ενότητες με μικρή μεταξύ τους σύνδεση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές, ακόμη και στο Γυμνάσιο να αντιμετωπίζουν δυσκολία στο να συνδέσουν τη «συμβολική γλώσσα» με τις γραφικές αναπαραστάσεις (English & Warren, 1998). Συγκεκριμένα οπτικά, ή γεωμετρικά σχήματα, σπάνια προσφέρονται ως ενισχύσεις, ιδιαίτερα κατά τη μελέτη νέων αριθμητικών σχέσεων, παρόλο που η εκμάθηση αφηρημένων κυρίως εννοιών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από οπτικά ερεθίσματα όπως έχει διαπιστωθεί από πολλούς ερευνητές.

Η προσπάθεια ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης από τις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, με την εξερεύνηση των προτύπων σε «ρεαλιστικά προβλήματα» και η προσπάθεια κατανόηση των σχέσεων και των λειτουργιών των προτύπων αυτών, οδηγεί σε διαδικασίες «συμβολικής αναπαράστασης» (Kaput, !995). Στην πορεία αυτή πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση *στις* πολλαπλές αναπαραστάσεις (λεκτικές, συμβολικές, γραφικές) των προτύπων οι οποίες συνδέουν τη μάθηση σε διαφορετικά πλαίσια που βοηθούν τους μαθητές όχι μόνο να αποσαφηνίσουν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες αλλά και να τις συνδέσουν μεταξύ τους. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των προτύπων βοηθούν ακόμη τους μαθητές να γενικεύσουν, δηλαδή να αντιληφθούν και να συνδέσουν τις συγκεκριμένες έννοιες των δραστηριοτήτων με τις οποίες ασχολήθηκαν με τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Ferrini-Mundy, Lappan & Phillips, 1997). Η γενίκευση χρειάζεται μια ορισμένη περιγραφή με τη χρήση συμβόλων, η οποία δεν συνεπάγεται απαραίτητα τη χρήση γραμμάτων στη θέση συμβόλων. Τα σύμβολα μπορεί να είναι λεκτικά, εικονικά, γεωμετρικά ή αλγεβρικής φύσης, «η έμφαση πρέπει να δοθεί στην προσπάθεια της γενίκευσης και όχι στα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να την πετύχουν»(βιβλίο εκπαιδευτικού Στ΄ τάξης)

Από την απλή παρατήρηση προτύπων στη συνάρτηση

Τα απλά επαναλαμβανόμενα πρότυπα είναι τα πρότυπα που βασίζονται στην επανάληψη. Σ' αυτά συνδυάζονται χωρίς τροποποίηση διάφορα αντίγραφα ενός αρχικού σχεδίου ή προτύπου.

 ○○○●○○○● 

Τα γεωμετρικά μοτίβα έτσι όπως ορίζονται στο σχολικό βιβλίο της Στ΄ τάξης του Δημοτικού, είναι επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα μπορούν να διερευνηθούν από τα χρόνια του νηπιαγωγείου, χρησιμοποιώντας για το σκοπό αυτό πραγματικά υλικά, όπως χρωματιστά κυβάκια, ξυλάκια, κουμπιά, χάνδρες, κ.τ.λ.

Εκτός από τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα υπάρχουν και πρότυπα που εμπεριέχουν μια σταδιακή εξέλιξη. Τα πρότυπα αυτά δεν είναι άλλα από τις γνωστές μας αριθμητικές ακολουθίες (τα αριθμητικά και τα σύνθετα μοτίβα, έτσι όπως ορίζονται στο σχολικό βιβλίο της Στ΄ τάξης ανήκουν σε αυτή την κατηγορία των προτύπων).

Πολλά και ενδιαφέροντα πρότυπα μπορούμε να σχηματίσουμε μόνο με τους αριθμούς[13]. Αριθμητικά πρότυπα όπως το 3, 6, 9,…., μας είναι γνωστά, δεδομένου ότι είναι μεταξύ των προτύπων που μαθαίνουμε ως νέοι μαθητές. Όταν τα μικρά παιδιά αρχίζουν να μετρούν, μετρούν τους αριθμούς 1-1, έπειτα 2-2, 5-5, και τέλος 10-10. Στην απαρίθμηση των αριθμών υπάρχει μια σειρά, μια τάξη, είτε οι αριθμοί μετρούνται προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω. Αυτά τα αριθμητικά πρότυπα[14] δίνουν στα μικρά παιδιά μια φυσική στρατηγική για να καταλάβουν την **πρόσθεση.** Όταν ο μικρός μαθητής εξετάζει ένα πρότυπο όπως το 2, 4, 6, ... , αναρωτιέται, ποιον αριθμό πρέπει να **προσθέσει** για να φτάσει στον επόμενο αριθμό και στον επόμενο και στον επόμενο. Καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν, η ενασχόληση με τα πρότυπα τους ωθεί από τα αθροίσματα **στα γινόμενα**[15]. Όταν ο μικρός μαθητής αναρωτιέται για το ποιος είναι ο 50ος αριθμός στο παραπάνω πρότυπο, ξέρει να πολλαπλασιάζει 2 φορές το 50.

Τα πρότυπα των αριθμών είναι δομικά στοιχεία της μαθηματικής γνώσης αλλά και εκπαιδευτικά υλικά με βάση τα οποία οι μαθητές, παρατηρούν και ανακαλύπτουν κανονικότητες, που ενισχύουν την ανακάλυψη της κρυμμένης τυπικής μαθηματικής δομής. Βοηθούν επίσης τους μαθητές να ανακαλύψουν κανόνες και να κατακτήσουν καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών.

Παρατηρώντας ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο, το πρώτο που πρέπει να ανακαλύψουν τα παιδιά είναι τον πυρήνα του, το μικρότερο επαναλαμβανόμενο τμήμα του, δηλαδή τον τρόπο που επαναλαμβάνεται. Θεωρούμε ότι οι μαθητές έχουν διερευνήσει ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο όταν, έχουν συνειδητοποιήσει το μήκος του πυρήνα του, γιατί τότε μόνο μπορούν να το επεκτείνουν. Σε επόμενη φάση πρέπει να προκληθούν να προσπαθήσουν να προβλέψουν

---

[13] Υπάρχουν πολλά πρότυπα αριθμών όπως, τα πρότυπα των περιττών, των άρτιων, των πρώτων ή σύνθετων, των τέλειων τετραγώνων, αυτών που ικανοποιούν διάφορες εξισώσεις κ.ά. Η μελέτη των προτύπων των φυσικών αριθμών είναι άλλωστε το αντικείμενο της **Θεωρίας Αριθμών**.

[14] Στο Α.Π.Σ της Β΄ τάξης του Δημοτικού στην ενότητα μοτίβα μια από τις προτεινόμενες ενδεικτικές δραστηριότητες είναι : «Σχηματισμός αριθμητικών μοτίβων ανεβαίνοντας ή κατεβαίνοντας 2-2, 3-3, 5-5, και 10-10 μέχρι το 100 ».

[15] Στο Α.Π.Σ της Γ΄ τάξης του Δημοτικού, ένας από τους στόχος της ενότητας μοτίβα είναι «Να μπορούν οι μαθητές να διπλασιάζουν (στη Δ΄ τάξη να τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν κλπ) φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους στη σειρά ».

ποιο στοιχείο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θέση[16]. Στην πλειονότητα των επαναλαμβανόμενων προτύπων τα στοιχεία τους μπορούν να αριθμούνται με 1, 2, 3, κ.τ.λ. Όταν τους ζητηθεί για παράδειγμα να προβλέψουν το 15ο ή το 30ο στοιχείο του προτύπου τότε, επειδή είναι δύσκολο να ελέγξουν την πρόβλεψή τους, επεκτείνοντας το πρότυπο και βρίσκοντας όλα τα προηγούμενα στοιχεία, θα πρέπει να προσπαθήσουν να βρουν έναν κανόνα[17] με τον οποίο θα το προσδιορίσουν. Παρατηρώντας το πρότυπο ή τον πίνακα με τον οποίο έχει πιθανόν περιγραφεί το πρότυπο (ο πίνακας αποτελεί μια ακόμη μορφή αναπαράστασης του προτύπου) πρέπει να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν, τη σταθερή και επαναλαμβανόμενη σχέση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς του, δηλαδή τον κανόνα που ρυθμίζει τη σχέση που έχει ένας αριθμός με τον επόμενό του και μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο δημιουργήθηκε το πρότυπο (βιβλίο μαθητή Στ΄ τάξης, σελ 131-132). Σ'αυτή τη διαδικασία το πιο σημαντικό είναι η συλλογιστική που αναπτύσσεται πίσω από κάθε πρόβλεψη. Ο κανόνας μπορεί στην αρχή να διατυπωθεί λεκτικά, με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους

Από μαθηματική σκοπιά τα παιδιά θα έχουν κάνει ένα πολύ σημαντικό βήμα, όταν διαπιστώσουν ότι δυο πρότυπα που έχουν κατασκευαστεί από διαφορετικά υλικά είναι στην πραγματικότητα ίδια έχουν δηλαδή, την ίδια δομή, γιατί τότε θα έχουν επικεντρώσει την προσοχή τους σε σχέσεις, που είναι η ουσία των προτύπων.

Αργότερα στο Γυμνάσιο, θα πρέπει να προσπαθήσουν να ανακαλύψουμε μια σχέση που να συνδέει τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε στάδιο με τον αριθμό του σταδίου. Ένας τέτοιος κανόνας συνιστά μια συναρτησιακή σχέση. Όταν οι μαθητές ανακαλύψουν την αριθμητική έκφραση για κάθε στάδιο εξέλιξης του προτύπου χρησιμοποιώντας τους αριθμούς των σταδίων τότε, ο αριθμός μπορεί να αντικατασταθεί από ένα γράμμα ή μια μεταβλητή, οπότε καταλήγουμε σε έναν γενικό τύπο, που αποτελεί μια ακόμη μορφή αναπαράστασης του προτύπου, τη συμβολική του αναπαράσταση.

Τα αριθμητικά δεδομένα ενός προτύπου μπορούν να αποτυπωθούν αργότερα και γραφικά. Από το γράφημα, που μας προσφέρει μια ακόμη μορφή αναπαράστασης του προτύπου, μπορούν οι μαθητές ιδίως αν η σχέση που συνδέει τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε στάδιο με τον αριθμό του σταδίου είναι γραμμική, να προβλέψουν την εξέλιξη του προτύπου.

Η εργασία με τα αριθμητικά πρότυπα οδηγεί άμεσα στην έννοια της συνάρτησης δηλαδή, στην τυπική περιγραφή των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών ποσοτήτων και μπορεί να αρχίζει από μικρές ηλικίες.

Από τα προαναφερθέντα γίνεται φανερό ότι η διερεύνηση των προτύπων καλλιεργεί επιπλέον και τον επαγωγικό τρόπο συμπερασμού. Η επαγωγή είναι η διαδικασία της ανακάλυψης γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδυασμού ειδικών περιπτώσεων - παραδειγμάτων. Με αυτή γίνεται μετάβαση από το μερικό στο γενικό. Πυρήνας άλλωστε του επαγωγικού τρόπου συμπερασμού είναι η ανακάλυψη της δομής, του προτύπου. Από τη στιγμή που θα αποκαλυφθεί αυτή η δομή-κανονικότητα, το πέρασμα στη γενίκευση προκύπτει με τρόπο φυσικό αφού ο επαγωγικός τρόπος εξαγωγής του συμπεράσματος είναι πιο κοντά στη φυσική λογική του μαθητή. Αυτό όμως σχεδόν αγνοείται από τα ΑΠ.Σ των Μαθηματικών, τα οποία ωθούν από πολύ νωρίς το μαθητή πριν, αυτός να είναι ώριμος, στο ασφυκτικό

---

[16] Στο Α.Π.Σ της Γ΄ τάξης η προτεινόμενη δραστηριότητα είναι : Δίνονται, ο κανόνας "πολλαπλασίασε επί 2"και η σειρά των αριθμών 1, 2, 4, 8, 16, 32, … και ζητείται να συνεχίσουν τη σειρά των αριθμών αυτών και να βρουν το 13ο όρο.

[17] Στο ΑΠ.Σ της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού, στόχοι της ενότητας μοτίβα είναι :

- Να μπορούν (οι μαθητές) να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.
- Να μπορούν να διατυπώσουν έναν κανόνα για κάποιο απλό αριθμητικό ή γεωμετρικό μοτίβο.

περιβάλλον του παραγωγικού συλλογισμού. Διερευνώντας πολλά και διαφορετικά πρότυπα, η απόδειξη της γενικής περίπτωσης δεν θα φανεί στους μαθητές αργότερα στο Λύκειο, ως μία διαδικασία δύσκολη και ακατανόητη, αφού η βασική ιδέα της μαθηματικής επαγωγής είναι η ίδια μ' αυτή των ειδικών και συγκεκριμένων περιπτώσεων.

Συμπεράσματα

Στις μικρές τάξεις το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών στηρίζεται στην εμπειρία των μαθητών. Η εμπειρία των μαθητών περιλαμβάνει την αναγνώριση και την επέκταση των προτύπων, την ανάλυση, την περιγραφή και τη δημιουργία τους. Όταν δίνεται ένα πρότυπο, οι μαθητές του Δημοτικού καλούνται να το συνεχίσουν, να συζητήσουν τα χαρακτηριστικά του ή να παραγάγουν ένα πρότυπο από μια απλή κατάσταση. Στις μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να γενικεύουν τα πρότυπα με λέξεις ή με σύμβολα. Η εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές με την ενασχόλησή τους με τα πρότυπα στο Δημοτικό, θέτει στέρεα θεμέλια για τη ανακάλυψη των προτύπων που θα χρησιμοποιηθούν, ως εργαλεία, για να λύνουν προβλήματα αργότερα στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Εάν μπορεί κάποιος όταν εξετάζει συστηματικά παραδείγματα, να «βλέπει» ένα πρότυπο, τότε μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό το πρότυπο για να γενικεύσει ένα πρόβλημα.

Οι διερευνήσεις των προτύπων επιτρέπουν στους μαθητές να κατασκευάσουν διάφορες έννοιες, να δικαιολογήσουν τις ενέργειές τους, να επικοινωνήσουν με τους συμμαθητές τους για την κατανόησή τους και να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις με άλλα μαθηματικά θέματα. Η εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές διερευνώντας πρότυπα στο Δημοτικό σχολείο θέτει στέρεα θεμέλια για εκείνο το είδος των προτύπων που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για τη λύση προβλημάτων στο Γυμνάσιο. Η εμπειρία αυτή τους βοηθά να συνεχίσουν να ερευνούν πρότυπα και συναρτήσεις, να χρησιμοποιούν ποικίλες αναπαραστάσεις, να μεταφράζουν εικόνες, διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, λεκτικές διατυπώσεις και σύμβολα. Τους βοηθά ακόμη να αναπτύξουν την ικανότητα να περνούν από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη, με συνέπεια και ακρίβεια χωρίς αντιφάσεις.

Η μέθοδος διδασκαλίας που χρησιμοποιεί τα patterns για να ερευνήσει τις καταστάσεις ενός προβλήματος επιτρέπει στους μαθητές να σκεφτούν πριν και πέρα από την απάντηση : να «δουν» τα πρότυπα, να τα γενικεύσουν, να τα επεκτείνουν, να τα συνδέσουν και να τα αξιολογήσουν. Με αυτές τις ενέργειες, οι μαθητές ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν έννοιες και σχέσεις πέρα από την απάντηση και το αρχικό πρόβλημα .

Τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη αντικειμένων που χαρακτηρίζονται από πρότυπο κανονικότητας και μια λογική τάξη. Βρίσκοντας και διερευνώντας αυτή τη κανονικότητα ή την τάξη και κατόπιν κατανοώντας την, είναι το επιστέγασμα αυτού που λέμε "κάνω Μαθηματικά". Η διαδικασία "κάνω" Μαθηματικά σημαίνει κάτι πολύ περισσότερο από τον ακριβή υπολογισμό ή την αφαίρεση καθώς περιλαμβάνει την παρατήρηση των προτύπων, τη δοκιμή των υποθέσεων και την εκτίμηση των αποτελεσμάτων.

Βιβλιογραφία

Brenner, M.E., Mayer, R.E., Moseley, B., Brar, T., Curan, R., Reed, B.S, & Webb, D. (1997). Learning by understanding : The role of multiple representations in learning algebra. American Educational Research Journal, 34(4), pp. 663-689.

Devlin Keith, (1994). Mathematics: The science of Patterns. New York: W. H. Freeman.

English L., Warren E. (1998), Introducing the Variable through, Pattern Exploration. The Mathematics Teacher, vol 91, No 2, February, pp. 166-170.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. & Phillips E. (1997), Experiences with patterning, Teaching Children Mathematics, 3, pp. 282-288.

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994), A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics, 27, pp. 59-78

Herscovics N., L. Linchevski (1996), Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. Educational Studies in Mathematics, Vol. 30, No. 1 pp. 39-65.

Von Glasersfeld E. (1995), A Constructivist approach to teaching, in Steffe and Gale (eds), Constructivism in Education, Lawrence Eribaum, pp.3-15.

Kaput J.J. (1995), A research base supporting long term algebra reform. Paper presented at the 16th meeting of the PME-NA, Annual Meeting Columbus, OH.

Kieran, C. (1991), Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition (pp 96-112). ICMI Study Series. Cambridge University Press.

Lakatos Imre (1996), Αποδείξεις και ανασκευές. Εκδόσεις Τροχαλία.

Morelli Lynn (1992), A visual approach to Algebra Concepts. Mathematics Teacher, vol 85, September, pp 434-437.

NCTM (1980), Agenda for action - (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics - (1991), Professional standards for teaching mathematics - (1997), Algebric Thinking, Focus Issue, Mathematics Theachers, 90(2) - (2000), Principals and Standards for School Mathematics, Reston, VA: National Council of Teachers.

Polya George (1954), Mathematics and Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning. Priceton.

Polya George (1991), «Πως να το λύσω », εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Schoenfeld Alan.(1992), Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.334-370). New York: Mac Millan.

Toumasis, C. (1997),The NCTM Standards and the Philosophy of Mathematics, Studies in Philosophy and Education 16, pp 317-330.

Van de Walle J. (2001), Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο : Μια εξελικτική Διδασκαλία, εκδόσεις Δαρδανός *τυπωθήτω*.

Δημάκος Γ., Βλάμος Π. (2000), Αξιολόγηση μαθηματικών μοντέλων ανεξαρτήτων τεχνολογίας, Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών θεμάτων, τεύχος 3, σελ 130-142.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών-Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης, ΥΠΕΠΘ-Π.Ι, τόμος Α΄, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2002.

Σχολικό βιβλίο μαθητή και εκπαιδευτικού, τάξη, ΣΤ΄, Ο.Ε.Δ.Β 2006.

Κλαουδάτος Νίκος (1997), Η διδασκαλία των μαθηματικών ως λύση προβλήματος: Ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων, Διάσταση τεύχος 2,.

Κολέζα Ευγενία (2006), Μαθηματικά και σχολικά Μαθηματικά, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Τσικοπούλου Στάμη (2006), Λύσε ένα πρόβλημα : Βρες τον κανόνα, «Ευκλείδης Α», Ε.Μ.Ε., τεύχος 61.

Abstract

Having in mind the introduction of a new chapter in the curriculum of Mathematics taught in the elementary school, the author of this paper proceeds to a critical appraisal of the latest views concerning the nature of Mathematics as well the influence these views have exerted in the shaping of a concrete teaching methodology.