Γεωμετρία versus Άλγεβρας. Αρχαιοελληνικά και Δυτικά Μαθηματικά: παράλληλες ή διασταυρούμενες επιλογές από τους Έλληνες Λογίους του 18ου αιώνα;

Μαρία Τερδήμου
Μαθηματικός, Διδάκτωρ Φιλοσοφίας

Στην είσοδο της Αθωνιάδας Σχολής, είχε αναγραφεί η ρήση: *«Γεωμετρήσων εισίτω, ου κωλύω, το μη θέλοντι συζυγώσω τας θύρας»*, δηλαδή, «αυτός που αγαπά και μελετά τη Γεωμετρία ας περάσει, για τον όποιον άλλον η πόρτα (της Σχολής) είναι κλειστή». Είναι λόγια του Ευγενίου Βούλγαρη, ουσιαστικά παράφραση λόγων του Πλάτωνα, τα οποία ανεγράφησαν στην είσοδο της Σχολής όταν ο Ευγένιος ανέλαβε τη σχολαρχεία το 1753. Είναι λόγια που διατρανώνουν την πίστη στην αξία της Ευκλειδείου Γεωμετρίας, όπως αυτή συγκροτήθηκε, βασιζόμενη στις παραδοχές του Ευκλείδη. Στα *Στοιχεία,* το έργο που μετά τη Βίβλο έχει κάνει τις περισσότερες εκδόσεις παγκοσμίως, συγκεντρώθηκε όλη η μέχρι τότε υπάρχουσα μαθηματική γνώση καθιστώντας την Ευκλείδειο Γεωμετρία ως το κλασικό πρότυπο της ορθολογικής αντίληψης για τη γνώση. Τα *Στοιχεία* λειτούργησαν, όχι μόνο ως πηγή γνώσης αλλά, το σπουδαιότερο, ως πρότυπο μαθηματικής σκέψης και βοήθησαν τα μέγιστα στην εγκαθίδρυση της αξιωματικής μεθόδου στη μαθηματική μεθοδολογία.

Η Γεωμετρία ξεκινά από αλήθειες αυταπόδεικτες και προχωρώντας με αυστηρή απόδειξη φτάνει σε γνώση βέβαιη και αντικειμενική. Ως εκ τούτου εθεωρείτο από όλους ως ο πιο σταθερός και αξιόπιστος κλάδος της γνώσης. Παρά τις διαφορές που υπήρξαν ανάμεσα στα διάφορα ρεύματα προσέγγισης των Μαθηματικών στο πέρασμα των χρόνων, η ιερότητα της Γεωμετρίας παρέμενε αναμφισβήτητη. Μέχρι και τον 19ο αιώνα[1], αποτελούσε το υπέρτατο πρότυπο της δυνατότητας να υπάρχει βεβαιότητα στην ανθρώπινη γνώση (Davis and Hersh 1991, σ. 315). Η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών έγινε η αιτία να χαθεί η βεβαιότητα αυτή.

Αν θελήσουμε εν συντομία να σκιαγραφήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών από την αρχαιότητα έως την εποχή του 18ου αιώνα που μας ενδιαφέρει θα σημειώσουμε τα εξής: Η αρχαία ελληνική περίοδος χαρακτηρίζεται από έναν "εποπτικό ρεαλισμό". Για τους αρχαίους ο αριθμός (και το γεωμετρικό σχήμα) είναι μια πραγματικότητα ανεξάρτητη από τις πράξεις που τον σχηματίζουν. Οι πράξεις εκφράζουν, βέβαια, σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς, σχέσεις, όμως, που αποτελούν σταθερά και αμετάβλητα δεδομένα, τις οποίες η σκέψη δεν «κατασκευάζει» αλλά τις συναντά έξω από τη σφαίρα της και τις αναπαριστά[2].

Με τις μαθηματικές ανακαλύψεις των νέων χρόνων, την Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία και τον Απειροστικό Λογισμό αρχίζει η δεύτερη περίοδος. Οι νέες ανακαλύψεις γίνονται δυνατές με τη συνειδητοποίηση του κεντρικού ρόλου που παίζουν οι "πράξεις" στην ανάπτυξη του μαθηματικού στοχασμού. Τη θέση του συγκεκριμένου αριθμού της Αριθμητικής καταλαμβάνει η αφηρημένη ποσότητα της Άλγεβρας. Κύρια σημασία έχουν εδώ οι μετατροπές, δηλαδή οι ίδιες οι πράξεις που, όμως, σημειώνονται χωρίς να εκτελούνται (Παπανούτσος 1973, σ. 286) Να επισημάνουμε και το γεγονός, ότι η εισαγωγή της συμβολικής επισήμανσης στην Άλγεβρα, μαζί με την καθιέρωση των ινδοαραβικών αριθμητικών συμβόλων, έλυσε το επί αιώνες υπάρχον πρόβλημα που προέκυπτε από την έλλειψη του κατάλληλου συμβολισμού και έκανε δυνατή τη συνάρθρωση του "Μαθηματικού λόγου" (Hilbert 1995, σ. 29).

Με την Άλγεβρα, το μαθηματικό υποκείμενο αποκτά πλέον συνείδηση της δραστηριότητας του. Το επόμενο βήμα είναι η ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τον Descartes, η εφαρμογή της Γεωμετρίας στην Άλγεβρα, με τις γεωμετρικές σχέσεις να εκφράζονται πια με αλγεβρικές εξισώσεις. Εξαλείφονται οι αρχαιοελληνικοί περιορισμοί για την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων μόνο με κανόνα και διαβήτη και με την εισαγωγή των καρτεσιανών συντεταγμένων το σχήμα αφήνει την ποιοτική του υπόσταση, γίνεται κάτι ποσοτικό, και

[1] Μέχρι τότε οι όροι Γεωμετρία και Ευκλείδειος Γεωμετρία ήταν ταυτόσημοι.

[2] Όπως όταν «αναγνωρίζει» το γεωμετρικό σχήμα που διατυπώνει μια δεδομένη μορφή του χώρου.

εισέρχεται στη δικαιοδοσία του αλγεβρικού λογισμού. Ο Απειροστικός Λογισμός του Newton και του Leibniz, που εμφανίζεται στη συνέχεια, είναι η επέκταση της Άλγεβρας του πεπερασμένου στο χώρο του απείρου. Αποκαλύπτει τον εσώτερο δυναμισμό που έχει η νόηση όταν συλλαμβάνει το άπειρο και το συνεχές, αποτελεί δε μια έντονη και βαθιά συνειδητοποίηση της σημασίας των πράξεων στη γένεση του μαθηματικού σύμπαντος.

Ερχόμαστε τώρα στα καθ΄ ημάς του 18ου αιώνα.

Καθ' όλη τη μακρόχρονη μεταβυζαντινή ύφεση των επιστημών, τα Μαθηματικά είχαν άμεση σύνδεση μόνο με την καθημερινή πρακτική. Ο όρος "Λογαριαστική", με τον οποίο κατονόμαζαν όλα τα αριθμητικά εγχειρίδια που κυκλοφορούσαν, είναι ενδεικτικός.

Η αναβίωση, όμως, της επιστημονικής και φιλοσοφικής σκέψης που συντελείται κατά τον προεπαναστατικό αιώνα, έστω και με αργούς, κατά το πρώτο ήμισυ, ρυθμούς, αναβαθμίζει το ρόλο γενικά των θετικών επιστημών και ειδικότερα των Μαθηματικών, στα οποία προσδίδεται κυρίαρχη θέση. Οι λόγιοι πλέον θεωρούν τα Μαθηματικά ως *"την πρώτη απασών των επιστημών"* αυτά που *"επιστήμην είναι αποφαίνεται και τω της επιστήμης ονόματι καλείσθαι αξιοί"* [3], *"τα μόνα μεταξύ των ανθρωπίνων μαθήσεων ή γνώσεων, τα οποία αντισταθμούνται με το βάρος ή έκτασιν του ονόματος των επιστημών"* [4]. Στο πλαίσιο μάλιστα της γενικότερης αντίληψης περί μαθηματικοποίησης των επιστημών, τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως το θεμέλιο των υπολοίπων, *"αναγκαία τοις εις τα της φύσεως άδυτα εισδύναι βουλομένοις"* [5] αυτά που *"μετά της πείρας άγουσι το φως εις την έρευναν των μυστηρίων της φύσεως"* [6].

"Όσα διά της Γεωμετρίας μανθάνομεν, γινώσκομεν ότι εστί, και ούτως εστί, και ου ενδέχεται άλλως έχειν, ουδεμίαν γαρ άλλη επιστήμη αναγκαιοτέρας της Γεωμετρίας τας δείξεις έχει, η Γεωμετρία άρα επιστήμη εστί, και επιστημών πρωτίστη" [7]. Έτσι αποφαίνεται ο Νικηφόρος Θεοτόκης για τη Γεωμετρία η οποία, σύμφωνα με τη γνώμη του ιδίου, δεν είναι μόνο τα του Ευκλείδου *Στοιχεία*, που ούτως

[3] Ανθρακίτης-Μπαλάνος, 1749, *Προοίμιον*, σ. ix.
[4] Βενιαμίν Λέσβιος, 1818, *Προς τους Φιλαναγνώστας*, σ. 1
[5] Ζ. Κάβρας, 1800, Πρόλογος, σ. v
[6] Βενιαμίν Λέσβιος, 1818 σ. i
[7] Ν. Θεοτόκης, *Πρόλογος χειρογράφου,* αρ. 396 της Βιβλιοθήκης της Ρουμανικής Ακαδημίας, σ. 3

ή άλλως αποτελούν το κλειδί για τα υψηλότερα Μαθηματικά, αλλά είναι και η Τριγωνομετρία και οι Κωνικές Τομές και τα Αρχιμήδεια Θεωρήματα και η Ανάλυση[8]. Για την εποχή που μελετάμε, θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε, ότι με τον όρο Γεωμετρία εννοούμε κατά κύριο λόγο την Ευκλείδειο και όσα αναφέρει ο Θεοτόκης εξαιρουμένης της Ανάλυσης και δευτερευόντως θα προσθέταμε τα Σφαιρικά των Θεοδοσίου και Πρόκλου.

Η εκτίμηση που τρέφουν οι λόγιοι του 18ου αιώνα και των προεπαναστατικών δεκαετιών για τη Γεωμετρία εκφράζεται ποικιλοτρόπως στα μαθηματικά τους εγχειρίδια. *"Αι απλούστεραι και στοιχειώδεις πασών των άλλων επιστημών, αριθμητική και γεωμετρία υπάρχουσιν"* [9] αναφέρει ο Κοσμάς Μπαλάνος και το ίδιο ακριβώς εννοεί και ο Μοισιόδαξ υποστηρίζοντας ότι *"Η Αριθμητική και η Γεωμετρία εγκολπούνται πάσαν επιστήμην μαθηματικήν"*[10]. Ο Θεοτόκης θεωρεί ότι *"Διακριτικός προσέτι δι' αυτής ο νους γίνεται,... πρώτη και μέγιστος εκ της Γεωμετρίας ωφέλειαν εστίν, η οξύτης και διάκρισις, ην δι' αυτής ο ημέτερος νους κτάται"*[11].

Είναι *"μάθημα αναγκαιότατον εις πάντα πολίτην"* και *"εάν οι μαθηταί προχωρήσωσιν εις την τελειοτέραν ακρόασιν της Γεωμετρίας, θέλουν βοηθηθήν μεγάλως από ταύτην την προάσκησιν. Εάν δ' εκλέξωσι την μερίδα των άλλων του κοινωνικού βίου ασχολιών, δεν θέλουν παρατηρείν τον αισθητόν τούτον κόσμον με νούν παντάπασιν αγεωμέτρητον"* [12]. Με αυτόν τον τρόπο εκθειάζει ο Κούμας τη γεωμετρική επιστήμη, ενώ ο Βενιαμίν Λέσβιος θα προχωρήσει ακόμη περισσότερο, αποκαλώντας την *"η χειρ δι' ήσπερ ο κάτοικος της γης συλλαμβάνει τον ουρανό"* [13] υπενθυμίζοντας μας τον πλατωνικό ορισμό που θέλει τη Γεωμετρία ως την επιστήμη του αιωνίως όντος [14]. Ο ίδιος θεωρεί τα *Στοιχεία* ως *"σύνταγμα περίφημον εξ' αυτής της γενέσεως αυτού μέχρι της συντελείας του αιώνα"* και δηλώνει ότι *"εκδίδων εις φως τα του Ευκλείδου, είτε της γεωμετρίας, εγώ εκδίδω το ουσιωδέστατον των συγγραμμάτων προς αγωγήν της νεολαίας"* [15].

[8] Ν. Θεοτόκης, 1798-99, *Τοις Αναγιγνώσκουσι*, σ. ιβ
[9] Μπαλάνος Κ., 1798, *Προοίμιον*, σ.1
[10] Ι. Μοισιόδαξ, 1780, σ. 49
[11] Ν. Θεοτόκης, χειρόγραφο, σ. 2
[12] Κ. Κούμας, 1819, Πρόλογος, σ. ια
[13] Βενιαμίν Λέσβιος, 1820, *Προς τους Φιλαναγνώστας*, σ. 2
[14] Πλάτων, *Πολιτεία*, Ζ 527 b
[15] Βενιαμίν Λέσβιος, 1820., σσ. 8, 20

Οδηγούμαστε, λοιπόν, αβίαστα στο συμπέρασμα ότι όλες οι παραπάνω εκφράσεις, οι οποίες, ναι μεν πολύ συχνά, αποτελούν εκφράσεις αρχαιομανίας και σοφολογιοτατισμού, δεν παύουν όμως να διατρανώνουν την θεμελιωμένη πίστη μιας μεγάλης μερίδας λογίων της εποχής στην αξία των ελληνικών Μαθηματικών. Εκ μέρους των περισσοτέρων γίνεται προσπάθεια αναβίωσης της αρχαιοελληνικής μαθηματικής σκέψης με τη συγγραφή ή μετάφραση μαθηματικών εγχειριδίων από τα οποία απουσιάζουν τα σύγχρονα Μαθηματικά που έχουν αναπτυχθεί στην Ευρώπη και η ύλη τους συνίσταται, κατά μεγάλο μέρος σε Αριθμητική, Κωνικές Τομές του Απολλωνίου, Αρχιμήδεια Θεωρήματα, Τριγωνομετρία, αλλά κυρίως Ευκλείδειο Γεωμετρία. Στους προλόγους υπάρχει εκτενής η ιστορία των αρχαίων Μαθηματικών με συνεχείς αναφορές στα ονόματα των Ελλήνων μαθηματικών και σπάνιες σε αυτά των Δυτικών. Για τους λογίους αυτούς, τα Μαθηματικά αποτελούν το υπόβαθρο όλων των επιστημών και πεποίθηση τους είναι ότι η αναβίωση και η διάδοση τους θα αποτελέσει τη βάση για την αναγέννηση των επιστημών στην Ελλάδα. Δηλαδή, το επιστημονικό βιβλίο λειτουργεί και ως μέσο ανάκαμψης του ελληνισμού, με κύριο χαρακτηριστικό την επιχειρούμενη διασύνδεσή του με τους αρχαίους προγόνους. Χρηστικό εργαλείο γι' αυτή την προσπάθεια αποτελεί και η γλώσσα, διότι τόσο τα κυρίως κείμενα, όσο και οι πρόλογοι των εγχειριδίων αυτών είναι γραμμένοι σε επιμελημένη γλώσσα της εποχής. Είναι συγγράμματα τα οποία, ναι μεν σε χειρόγραφη, κυρίως, μορφή χρησιμοποιήθηκαν και ως διδακτικά εγχειρίδια, αλλά τόσο το υψηλού επιστημονικού επιπέδου περιεχόμενο τους όσο και η γλωσσική τους μορφή τα κάνουν να απευθύνονται κυρίως στους λογίους της εποχής.

Το πλέον αντιπροσωπευτικό εγχειρίδιο αυτής της τάσης είναι η μνημειώδης *Οδός Μαθηματική* του Μεθοδίου Ανθρακίτη, που εκδόθηκε το 1749 από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, στον οποίο ανήκει και το μεγαλύτερο μέρος του προλόγου. Η *Οδός* είναι ένα εγχειρίδιο των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και των πρώϊμων βυζαντινών, στο οποίο παρουσιάζονται τα βιβλία του Ευκλείδη, του Πρόκλου, του Θεοδοσίου, του Υψικλή και του Ανθέμιου[16].

Το στοιχείο που πρέπει να επισημάνουμε εδώ, είναι ότι οι περισσότεροι από τους λογίους στους οποίους αναφερόμαστε ζουν και διδάσκουν πριν από

[16] Στους δύο τελευταίους αποδίδονται τα λεγόμενα "ψευδοευκλείδεια", δηλαδή το 14ο και 15ο από τα Βιβλία των *Στοιχείων*.

την περίοδο που ονομάζουμε Νεοελληνικό Διαφωτισμό. Με εξαίρεση τον Βενιαμίν Λέσβιο, είναι όλοι άνθρωποι του κλήρου και χαρακτηρίζονται από μια παραδοσιακή ματιά και αντίληψη γύρω από την επιστήμη γενικά, των Μαθηματικών συμπεριλαμβανομένων. Είναι αναμενόμενο λοιπόν να εμμένουν στην κλασική Ευκλείδειο Γεωμετρία, υλικό γνωστό και δουλεμένο τώρα και δύο χιλιετίες, το οποίο, ως σπουδαιότερο χαρακτηριστικό έχει ότι αποτελεί σίγουρη και εμπεριστατωμένη γνώση, σε αντίθεση με την Άλγεβρα, τα νεότερα δηλαδή Μαθηματικά, που από τη φύση τους εμπεριέχουν στοιχεία αβεβαιότητας.

Αναφέραμε παραπάνω το όνομα του Βενιαμίν Λεσβίου του οποίου η περίπτωση είναι πράγματι αξιοσημείωτη γιατί μολονότι πολύ μεταγενέστερος, και έχοντας ενστερνισθεί πλήρως το διαφωτιστικό πνεύμα, εν τούτοις αντιμετωπίζει τα σύγχρονα Μαθηματικά με επιφύλαξη, αποδοκιμάζοντας συχνά τις νεώτερες απόψεις. Στον πρόλογο της Γεωμετρίας (*Ευκλείδου Στοιχεία*) ο Βενιαμίν όχι μόνο τονίζει την σπουδαιότητα του μαθήματος και εξυμνεί τα αρχαία Μαθηματικά, αλλά αμφισβητεί και τους δυτικούς, καταλογίζοντας τους αδυναμία δημιουργίας γεωμετρικού συστήματος καλύτερο από το ευκλείδειο[17] και απορρίπτοντας σύγχρονες μαθηματικές απόψεις και θεωρίες.[18]

Όμως, όσο για την Άλγεβρα, και εκεί οι Έλληνες έχουν την πρωτιά, μέσω πάντα των προγόνων εννοείται:

"Κατά δε τας αρχάς του δ' αιώνος οι Έλληνες εφεύρον την Άλγεβραν, και ο Διόφαντος...υπήρξεν αυτός ούτος ο εφευρετής" [19] αποφαίνεται ο Βενιαμίν για την καταγωγή της Άλγεβρας, συνεπικουρούμενος και από πολλούς άλλους λογίους της εποχής, οι οποίοι μαρτυρούν για την πίστη της ελληνικής προέλευσης του μαθηματικού αυτού κλάδου. Δέχονται, όμως, συγχρόνως, ότι στην τελειοτέρα μορφή της την έφεραν Ευρωπαίοι επιστήμονες όπως, ο Francois Viette, ο Descartes και άλλοι[20].

---

[17] Βενιαμίν Λέσβιος, 1820, *Προοίμιον,* σ. 8

[18] Η περίπτωση αυτή δεν αποτελεί τη μοναδική αντίφαση στο επιστημονικό έργο του Βενιαμίν. Ας θυμηθούμε την πλήρη αποδοχή της θεωρίας του ηλιοκεντρικού συστήματος και τη σύγχρονη απόρριψη πτυχών της νευτώνειας φυσικής (με τη θεωρία του "Πανταχηκινήτου"), τη στιγμή που η αποδοχή της νευτώνειας φυσικής συνεπάγεται τον ηλιοκεντρισμό και αντίστροφα.

Για το θέμα, βλ. Γαβρόγλου 1995, σ. 75-86.

[19] Βενιαμίν Λέσβιος, 1820, Προοίμιον, σ. 16

Κατά τη διάρκεια των προεπαναστατικών δεκαετιών εκδόθηκαν αρκετά εγχειρίδια, τα οποία περιέχουν και Άλγεβρα. Αυτοτελή αλγεβρικά συγγράμματα, για την ακρίβεια τυπωμένα σε χωριστό τόμο, είναι αυτά του Γοβδελά και του Θεοτόκη. Στα υπόλοιπα συνυπάρχει η Αριθμητική με την Άλγεβρα, είτε ως χωριστά κεφάλαια, είτε ως ένα ενιαίο.

Στους προλόγους των εγχειριδίων παρουσιάζεται εκτενώς η ιστορική πορεία της Άλγεβρας από την αρχαιότητα έως και τον 18ο αιώνα. Χαρακτηρίζεται ως επιστήμη *"τερπνή και ακριβής"*, μέθοδος ακριβεστάτη για επίλυση πλήθους προβλημάτων, άποψη εναρμονισμένη με τη γενικότερη αντίληψη του διαφωτιστικού πνεύματος, σύμφωνα με την οποία, η Άλγεβρα είναι *"ο απλούστερος, ακριβέστερος και καλύτερος δυνατός τρόπος, είναι μαζί γλώσσα και αναλυτική μέθοδος"* (Condillac, στο C.C.Gillispie 1986, σ. 157).

Θα επιχειρήσουμε τώρα μια σύντομη περιδιάβαση στο δεύτερο μισό του 18ου αιώνα, με σκοπό να σκιαγραφήσουμε, με αδρές γραμμές, έστω, την πορεία εισαγωγής της Άλγεβρας στη μαθηματική παιδεία της εποχής. Θα ξεκινήσουμε με την περίοδο 1750-1775, όταν, δηλαδή, οι κυρίαρχες μορφές στον "επιστημονικό" χώρο είναι οι λόγιοι Βούλγαρις, Θεοτόκης και Ζερζούλης.

Σε χειρόγραφο του Βούλγαρη, του 1760 [21], εμφανίζεται για πρώτη φορά η συμβολική Αριθμητική που αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, ένα είδος εισαγωγικού κεφαλαίου στην Άλγεβρα, το οποίο δεν έχει καταγραφεί, μέχρι τότε, σε ελληνικά κείμενα. Η εισαγωγή της συμβολικής Αριθμητικής αποτελεί ένα σημαντικό βήμα στην προώθηση της ένταξης της Άλγεβρας στη νεοελληνική μαθηματική παιδεία και αυτό ακριβώς ήταν που επιζητούσε ο Βούλγαρις. Επιβεβαιώνεται και από το χειρόγραφο του με τίτλο *"Στοιχεία Αναλύσεως"* [22], στο οποίο πραγματεύεται την επίλυση εξισώσεων και τη χρήση τους στη λύση προβλημάτων, με βάση τη συμβολική Αριθμητική. Πιθανόν ο Βούλγαρις να θεωρούσε πιο αναγκαία και περισσότερο εφικτή τη διδασκαλία της Αριθμητικής και της συμβολικής Αριθμητικής από αυτή των εξισώσεων.

---

[20] *"τούτου γαρ (Διόφαντου) δη επίνοια και η θαυμαστή τέχνη ην Άλγεβραν ονομάζουσιν, η καθ' ημάς υπό Φραγκίσκου Βιέτα, και Ρενάτου Καρτεσίου και άλλων μ' εκείνους, καθολικοτέρα καταστάσα και επί πολύ ακριβείας και τελειότητος προαχθείσα"* (Ε. Βούλγαρις 1805, σ. xii).

[21] Είναι το χειρόγραφο υπ. αρ. 16 του Σπουδαστηρίου Βυζαντινής και Νεοελληνικής Φιλολογίας του Πανεπιστημίου Αθηνών.

[22] Είναι το χειρόγραφο υπ. αρ. 1242 της Εθνικής Βιβλιοθήκης .

Ακολουθεί η έκδοση, το 1767, του εγχειριδίου του Segner, *Στοιχείων Μαθηματικών*, σε μετάφραση του Βούλγαρη,[23] το οποίο περιέχει στοιχεία Άλγεβρας, χωρίς όμως να μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ολοκληρωμένο αλγεβρικό σύγγραμμα. μια και παραλείπονται τα περί εξισώσεων, αναλυτικής γεωμετρίας και απειροστικής ανάλυσης.

Όσον αφορά, τώρα, στον Νικηφόρο Θεοτόκη, ο οποίος συμπλέει σε μεγάλο βαθμό με τον Βούλγαρη, τόσο χρονολογικά όσο και ιδεολογικά, ξέρουμε, ότι παρουσίασε με ολοκληρωμένο τρόπο την Άλγεβρα στον τρίτο τόμο του μαθηματικού του έργου. Όμως, αυτό εκδόθηκε μόλις το 1799, όταν ο Θεοτόκης έχει προ πολλού απομακρυνθεί από την ενεργό διδασκαλία, άρα, λοιπόν, η αντιμετώπιση, εκ μέρους του, του μαθηματικού αυτού κλάδου κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής του δραστηριότητας, είναι ένα άλλο θέμα. Στην Ακαδημία του Ιασίου, δίδαξε ο Θεοτόκης για πρώτη φορά το 1764. Αλγεβρικά, όμως, χειρόγραφα-μαθηματάρια, μέχρι στιγμής, δεν έχουν καταγραφεί, χωρίς αυτό, βέβαια, να σημαίνει, ότι ο λόγιος δεν δίδαξε Άλγεβρα στο Ιάσιο. Το πιθανότερο είναι, ότι η διδασκαλία του θέματος μάλλον δεν υπήρξε ιδιαίτερα επίμονη και συστηματική. Δηλαδή, και σε αυτόν, όπως και στον Βούλγαρη, διακρίνουμε μια μάλλον διστακτική και κάπως επιφυλακτική αντιμετώπιση. Και ο Ζερζούλης, ο οποίος, στη διδασκαλία του, βασίστηκε στο έργο του Cristian Wolf, αγγίζει ακροθιγώς το θέμα, χωρίς, και αυτός, να το εντάξει στη μαθηματική εκπαίδευση.

Δηλαδή, κατά την περίοδο που εξετάζουμε, η Άλγεβρα δεν εμφανίζεται σε μαθηματάρια και δεν εκδίδεται ως μαθηματικό σύγγραμμα, ούτε αυτοτελές, αλλά ούτε καν ως μέρος. Αυτό σημαίνει, ότι οι πρώτες προσπάθειες εισαγωγής του μαθήματος στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν ευδοκίμησαν απόλυτα. Αν προσπαθήσουμε τώρα να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο και να εντοπίσουμε τους παράγοντες που λειτούργησαν ανασταλτικά, θα καταλήξουμε στις εξής εικασίες:

Στα Κολέγια των Ιησουϊτών αλλά και σε πολλά ευρωπαϊκά πανεπιστήμια, η διδασκαλία της Άλγεβρας βρίσκεται ακόμη σε υποτυπώδη μορφή, και δεν θα

[23] Ο Μανουήλ Γεδεών δηλώνει ότι: *"Η δε της Αριθμητικής και της Αλγέβρας διδασκαλία υπό μεν των μαθητών της εν Ιωαννίνοις Μπαλαναίας Σχολής εγένετο κατά την υπό Κοσμά Μπαλάνου Βασιλόπουλου Συνοπτικήν Εκθεσιν ...εν ετέροις δε σχολαίς κατά τα υπό Βουλγάρεως μεταφρασθέντα Μαθηματικά του Σεγνέρου..."* (Μ. Γεδεών, *Η πνευματική κίνησις* σ. 181). Όμως, ο Κοσμάς Μπαλάνος στον πρόλογο του εγχειριδίου του σημειώνει: *"Περί ταύτης τοίνυν της επιστήμης (Άλγεβρας), εν τοις καθ' ημάς έχει χρόνοις, καμοί πρόκειται, στοιχειώδη τινά τοις μαθητιώσι παραδούναι διδασκαλίαν"* (*Έκθεσις ακριβεστάτη.., Προοίμιον*, σ. 3).

αναβαθμισθεί πριν από, περίπου, το 1770. Για παράδειγμα, στην Πάντοβα, κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1760, τα *"Στοιχεία Γεωμετρίας και Ανάλυσης"* ήταν το μοναδικό μαθηματικό μάθημα που διδασκόταν, ενώ παρέκαμπταν την Άλγεβρα. Αντίθετα, στην Άλλη (Halle), χάρις στη διδασκαλία του Wolf και αργότερα του Segner, ο μαθηματικός αυτός κλάδος είχε ιδιαίτερα αναπτυχθεί. Δηλαδή, ουσιαστικά, και στα διάφορα εκπαιδευτικά πλαίσια της εποχής παρατηρείται μια μεταβατική κατάσταση της Άλγεβρας, η οποία προφανώς θα έχει και τον ανάλογο αντίκτυπο στα ελληνικά πράγματα (Καστάνης 1998, σ. 93).

Ένας άλλος ανασταλτικός παράγοντας προκύπτει από την διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στον αλγεβρικό και στον αριθμητικό-γεωμετρικό τρόπο σκέψης. Δηλαδή, ενώ η Αριθμητική και η Γεωμετρία, την εποχή αυτή, έχουν μια οντολογική βάση, η Άλγεβρα είναι συμβατοκρατική. Επομένως, το να ενσωματωθεί η Άλγεβρα σε ένα περιεχόμενο γενικής παιδείας, απαιτεί την αποδοχή ενός λόγου περισσότερο θεωρητικοποιημένου, πράγμα το οποίο δεν μπορεί να γίνει χωρίς προοδευτικό και ισχυρό θεσμικό υπόβαθρο του αντίστοιχου εκπαιδευτικού πλαισίου και χωρίς ερείσματα διεθνούς εγκυρότητας ενός τέτοιου θέματος. Πιθανόν, στο σημείο αυτό να οφείλεται και η δυστοκία της Άλγεβρας την εποχή αυτή (Καστάνης 1998, σ. 93).

Προς επίρρωσιν των όσων μόλις αναφέραμε να σημειώσουμε και τα εξής: Αν κάποιος μελετήσει τα αλγεβρικά συγγράμματα της εποχής θα διαπιστώσει πολύ εύκολα τις αδυναμίες που υπάρχουν στην κατανόηση και πρόσληψη εννοιών όπως ο αρνητικός αριθμός, ο μιγαδικός, το άπειρο κ.λπ. Για παράδειγμα, στη μελέτη των εξισώσεων. δεν αντιλαμβάνονται ότι οι μέθοδοι επίλυσης τους μπορούν να ενοποιηθούν χωρίς διάκριση θετικών ή αρνητικών συντελεστών ή παραλείπουν πολλαπλές ρίζες, ιδίως τις αρνητικές, αλλά πολύ συχνά και το μηδέν, απόρροια της ευκλείδειας γεωμετρικής θεώρησης, σύμφωνα με την οποία, αναζητούνται μόνο θετικές λύσεις, εφόσον αυτές αντιπροσωπεύουν γεωμετρικά μεγέθη.

Επίσης, οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για τους μιγαδικούς αριθμούς, *«ρίζες αδύνατες, ανύπαρκτες, κατ' επίνοιαν»*, δηλαδή κατασκευάσματα του νου, εκφράζουν μια άρνηση αντιμετώπισης τους ως συμβατά μαθηματικά μεγέθη σύμφωνα με την κοινώς αποδεκτή μαθηματική αντίληψη της εποχής, χωρίς όμως τελικά να απορρίπτονται καθολικά, γινόμενοι έστω και συμβιβαστικά αποδεκτοί.

Εύκολα διαπιστώνονται και οι δυσκολίες που επέφερε στους λογίους της εποχής η συστηματική ενασχόληση με την έννοια του απείρου και του απειροστού, που διαδραματίζουν μείζονα ρόλο στη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού. Βέβαια το φαινόμενο δεν είναι μόνο ελληνικό μια και ήδη από τη γέννηση του Απειροστικού Λογισμού, οι έννοιες αυτές, λόγω της ασάφειας με την οποία εξετάζονταν, ήταν το επίκεντρο κριτικής.

Παραδείγματος χάριν, ο G. Berkley (1685-1753), στο έργο του *The Analyst*, δημοσίευσε εντονότατη κριτική στον χειρισμό του απείρου από τον Newton, αλλά και γενικότερα στις απειροστικές μεθόδους[24]. Χρειάστηκε να περάσει πολύς χρόνος, τουλάχιστον δύο αιώνες, μέχρι να κατασταλάξουν οι μαθηματικοί σε ορθολογική αντιμετώπιση του απείρου.

Όμως παρά τα όσα αρνητικά είπαμε μέχρι στιγμής, ο πρώτος σπόρος για την εισαγωγή του αλγεβρικού κλάδου στη νεοελληνική μαθηματική παιδεία έχει ριφθεί.

Τις επόμενες δεκαετίες παρατηρείται ένα άνοιγμα της ελληνικής εκπαίδευσης προς την γαλλική αντίστοιχη. Αυτό οφειλόταν αφ' ενός στους ηγεμόνες των Παραδουνάβιων περιοχών, οι οποίοι, επηρεασμένοι από το γαλλικό διαφωτισμό, προώθησαν την εισαγωγή των γαλλικών γραμμάτων στην ελληνική παιδεία, και αφ' ετέρου στην διάλυση του Τάγματος των Ιησουϊτών (1773) καθώς και των άλλων καθολικών ταγμάτων, τα οποία προέρχονταν από τη Γαλλία και υποστηρίζονταν από τη γαλλική κυβέρνηση. Το γεγονός αυτό, της διάλυσης των ταγμάτων, είχε ως αποτέλεσμα την μείωση της πίεσης που δεχόταν η Ορθοδοξία από την καθολική προπαγάνδα. Να σημειώσουμε, επίσης, το γεγονός ότι, κυρίως μετά την κατάλυση της Ενετικής Δημοκρατίας (1797), τα ιταλικά πανεπιστήμια παύουν να αποτελούν τον κυρίαρχο τόπο σπουδών των Ελλήνων λογίων, οι οποίοι πλέον κατευθύνονται προς γαλλικά (Παρίσι), γερμανικά και γερμανόφωνα (Βιέννη) πανεπιστήμια. Η στροφή αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα και την μετάφραση αρκετών γαλλικών και γερμανικών μαθηματικών εγχειριδίων.

Την περίοδο αυτή εκδίδεται και το πρώτο ολοκληρωμένο αλγεβρικό σύγγραμμα, το *Στοιχεία Αριθμητικής και Αλγέβρας* του De Lacaille, μεταφρασμένο από τον Σπυρίδωνα Ασάνη. Στη συνέχεια, παρατηρείται, θα λέγαμε, μια εκδοτική έξαρση στον τομέα της Άλγεβρας. Ακολουθεί η έκδοση των εγχειριδίων του Κοσμά Μπαλάνου (1798), του Θεοτόκη (1799), του Euler σε μετάφραση

---

[24] Ο Berkley, για παράδειγμα, εκθέτει μια θεμελιωμένη αντίρρηση στον τρόπο με τον οποίο ο Leibniz βρίσκει την παράγωγο της συνάρτησης ψ=x2, όπου από τη μια απαλείφει το dx ως αμελητέο, δίνοντας του ουσιαστικά ιδιότητες του μηδενός και από την άλλη διαιρεί με dx.

του Κάβρα (1800), του Metzburg σε μετάφραση του Χρησταρή (1804), του Δ. Γοβδελά (1806), του Κούμα (1807), του Δούγκα (1816). Το χρονικό αυτό διάστημα η Άλγεβρα, χάρις στις προσπάθειες δασκάλων του Γένους, όπως ο, Ψαλίδας, ο Ασάνης, ο Πρώϊος, ο Κούμας, ο Δούγκας, κ.ά., αποτελεί πλέον ισότιμο μέλος, μαζί με την Αριθμητική και τη Γεωμετρία στα εκπαιδευτικά προγράμματα, και ιδιαίτερα κατά τις δύο προεπαναστατικές δεκαετίες η διδασκαλία της καθιερώνεται πλήρως στη νεοελληνική μαθηματική εκπαίδευση.

Η περιδιάβαση του πεζοπόρου τελείωσε, και αυτός έχει πια καταλάβει το νόημα της πλατωνικής ρήσης ως προμετωπίδα της Αθωνιάδας Σχολής, τι ακριβώς πίστευε ο Βούλγαρις, ο Ανθρακίτης, ο Λέσβιος και όλοι οι άλλοι που έδωσαν ξανά νόημα στη λέξη επιστήμη στον τουρκοκρατούμενο ελληνισμό.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Γαβρόγλου, Κ. (1995), Οι επιστήμες στον Νεοελληνικό Διαφωτισμό και προβλήματα ερμηνείας, *Νεύσις*, 1, σσ. 75-86

Καστάνης, Ν. (1998), Τα Ιδεολογικά Πλαίσια Μετακένωσης της Άλγεβρας στη Νεοελληνική Παιδεία, στο *Όψεις της Νεοελληνικής Μαθηματικής Παιδείας*, Θεσσαλονίκη

Παπανούτσος, Ε. (1973), *Γνωσιολογία,* Ίκαρος, Αθήνα

Davis P.H. and Hersh R. (1991), *Η Μαθηματική Εμπειρία*, Τροχαλία, Αθήνα

Gillispie, C. (1986), *Στην Κόψη της Αλήθειας*, ΜΙΕΤ, Αθήνα

Hilbert, D. (1995), *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, μτφρ. Στ. Παπαδόπουλου, Αθήνα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΠΗΓΕΣ

Ανθρακίτης-Μπαλάνος (1749), *Οδός Μαθηματικής,* Βενετία

Βενιαμίν Λέσβιος (1818), *Στοιχεία Αριθμητικής,* Βιέννη

Βενιαμίν Λέσβιος (1820), *Γεωμετρίας Ευκλείδου Στοιχεία,* Βιέννη

Βούλγαρις Ε. (1805), *Α. Τακουετίου, Στοιχεία Γεωμετρίας,* Βιέννη

Θεοτόκης Ν. Πρόλογος χειρογράφου αρ. 396 της Βιβλιοθήκης της Ρουμανικής Ακαδημίας,

Θεοτόκης Ν (18998-99), *Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συννερανισθέντων,* Μόσχα,

Κάβρας Ζ. (1800), *Στοιχεία της Αριθμητικής και Αλγέβρης εκ του Γερμανικού μεταφρασθέντα*, Βιέννη
Κούμας Κ. (1819), *Σύνοψις επιστημών διά τους πρωτοπείρους*, Βιέννη
Μοισιόδαξ Ι.(1780) *Απολογία,* Βιέννη (επαν. Αθήνα 1992)
Μπαλάνος Κ. (1798) *Έκθεσις συνοπτική Αριθμητικής Αλγέβρας και Χρονολογίας*, Βιέννη