

**ΘΕΜΑΤΑ  
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**2003**

**2022**

**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2003**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 8**

**B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 7**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .  
 Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0)=0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w = 3z - i\bar{z} + 4$ , όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$   
 $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$ .

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y=x-2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

- α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0,0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=3$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ,  $\delta \in (\alpha, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0$  στο διάστημα  $(\alpha,\beta)$ .

**Μονάδες 8**

β. Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$  τέτοια ώστε  $f''(\xi_1)<0$  και  $f''(\xi_2)>0$ .

**Μονάδες 9**

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά την 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2004**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x_0)=0$

**Μονάδες 10**

**B.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**Μονάδες 2**

**β.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$$

**Μονάδες 2**



- δ. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ .

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

- β. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 8**

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = e^x f(x)$ , όπου  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ .

- α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο  $\xi \in (0, \frac{3}{2})$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = -f(\xi)$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Εάν  $f(x)=2x^2-3x$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(1)=1$ . Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t)dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0,$$

όπου  $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ , τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε τη  $g'$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι  $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

**Μονάδες 8**

**γ.** Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

**Μονάδες 6**

**δ.** Αν επιπλέον  $f(2)=\alpha > 0$ ,  $f(3)=\beta$  και  $\alpha > \beta$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2,3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0)=0$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘΕΜΑΤΑ 2005**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  με  $f(α) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(β) > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty .$$

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left( \int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

- στ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

- α. Δείξτε ότι:  $\frac{\bar{z}_1}{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

**Μονάδες 7**

- β. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 9**

- γ. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

**α.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 3**

**β.** Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ .

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Μονάδες 7**

**γ.** Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .

**Μονάδες 8**

**δ.** Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2 f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

**α.** Να δειχθεί ότι:  $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$ .

**Μονάδες 6**

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007} .$$

Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2006**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

- δ. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x-2)^2$  με  $x \geq 2$ .

- α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$   
και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ .

**Μονάδες 9**

**ii.**  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$  και  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  με  $\alpha > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Μονάδες 9**

**δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2007**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

**Μονάδες 8**

**A.2** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A.3** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**Μονάδες 2**

- ε. Αν  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β. Έστω  $z_1, z_2$  οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 2$  αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ .

**Μονάδες 8**



ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό  $\nu$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

α. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $f(0) > 0$ . Δίνεται επίσης συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

**α.** Να δειχθεί ότι  $F(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 4**

**δ.** Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left( \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left( \int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} .$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2008**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

**Μονάδες 10**

**A.2** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Όταν η διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$  είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών.

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

- α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 6**

- β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$ .

**Μονάδες 7**

- γ. την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

- δ. την ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.  
**Μονάδες 3**

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.  
**Μονάδες 9**

**γ.** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης  $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $\alpha$ .  
**Μονάδες 6**

**δ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) ,$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

**α.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

**Μονάδες 8**

- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Μονάδες 4**

- γ. Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και  $g(0) = g'(0) = 1$ , τότε

- i. να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

**Μονάδες 10**

- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι 1-1

**Μονάδες 3**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.



ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2009**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ισχύει  $f'(x)=0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**Μονάδες 2**

γ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

**Μονάδες 2**

δ. Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

ε. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 9**

**β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_0 = 1 - i$  έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

**Μονάδες 8**

- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί  $w$  οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου  $z_0$  ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

- A.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$

**Μονάδες 8**

- B.** Για  $\alpha = e$ ,

- α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

- β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

- γ.** αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 2]$  για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 2)$  και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\alpha \in (0, 2)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $H(\alpha) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (0, \alpha)$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

# **ΘEMATA 2010**



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε η ευθεία  $x=x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών  $\alpha+\beta i$  και  $\gamma+\delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ)  $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{2}{z} = 2$  όπου  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  της εξίσωσης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι  $3 \leq |w| \leq 7$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2011**

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

**Μονάδες 7**

- B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

**Μονάδες 4**

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

i)  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

ii) 
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

iii) 
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 4**



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

**Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=1$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2012**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

**β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$

**γ)** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ)  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$

ε)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ , όπου  $f', g'$  είναι  
συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  τότε, να βρείτε το  $|z_1 + z_2|$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(x-1)\ln x-1$ ,  $x>0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1=(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2=[1,+\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1}=e^{2013}$ ,  $x>0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1<x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0\in(x_1,x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)=f(x)+1$  με  $x>0$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x=e$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x>0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$

- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$

- $\ln x - x = - \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 10**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Αν είναι  $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ ,  $x > 0$ , τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , που ισχύει για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου  $a > 0$ , είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

**Μονάδες 6**

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

**Μονάδες 4**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2013**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 7**

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

**Μονάδες 4**

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho^2$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**γ)** Ισχύει ότι:  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 1$

**ε)** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**



**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$  (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό  $z$  που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 3$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $w$  μιγαδικό αριθμό,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

**Μονάδες 9**

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f$  παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$  και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 9**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

**Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(1) = 0$  (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Δ2.** η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο  $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

**Μονάδες 9**

Δ3. η  $g$  είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2014**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

**B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**B2.** Αν  $z_1 = 1+i$  και  $z_2 = 1-i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ , τον άξονα  $x'Ox$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η  $x = 0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=0$  από ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq x_0$  με  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$  του σημείου  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $y(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 11**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ**



The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2015**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .

**β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho=2$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Έστω  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο  $w$  είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β)  $-4 \leq w \leq 4$ .

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**B3.** Αν  $w = -4$ , όπου  $w$  είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τις εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $z_3$ , με  $z_3 = 2iz_1$ , είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και
- $f(0) = 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right].$$

**Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2,3)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2016**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[α,β]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

### **ΘΕΜΑ Γ**

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

- Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 9**



**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x)+f''(x))\eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 3). **Μονάδες 7**
- Δ2.** α) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)  
 β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2) **Μονάδες 6**
- Δ3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ . **Μονάδες 6**
- Δ4.** Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ . **Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
 ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2017**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
«Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**δ)** Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ .

**ε)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ,  $x \in (0,1)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$  και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , και το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  που άγονται από το  $A$ , τις οποίες και να βρείτε.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν  $(\varepsilon_1)$ :  $y = -x$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y = x - \pi$  είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  και τη γραφική παράσταση της  $f$ , και να

αποδείξετε ότι  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ , όπου:

- $E_1$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ , και
- $E_2$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$ .

**Μονάδες 4**

Γ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, \pi]$  και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

**Μονάδες 5**

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τη γραφική παράσταση της  $g$ , με  $g(x) = e^{5x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

**Μονάδες 6**

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση  $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ .

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2018**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

**β)** Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**γ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .

**ε)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 8**

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 4**

- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους  $x$  m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του  $x$ , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

**Μονάδες 5**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Μονάδες 10**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με  $5 \text{ m}^2$ .

**Μονάδες 10**



**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $\alpha > 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\alpha > 1$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f$  να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x_2$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(1)$  είναι αδύνατη στο  $(\alpha, x_2)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν  $\alpha = 2$  να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15} .$$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2019**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;  
(Μονάδες 2)

**β) i.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη;  
(Μονάδα 1)

**ii.** Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ ;

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**α)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**Μονάδες 8**

**A5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  και  $\Omega_3$  ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$ ,  $E(\Omega_2)=1$  και  $E(\Omega_3)=3$ ,

τότε το  $\int_a^\delta f(x)dx$  είναι ίσο με:

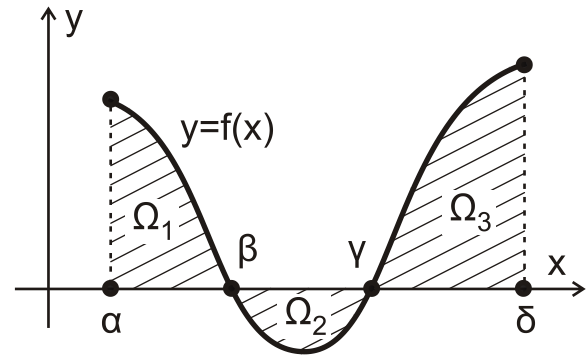
α) 6

β) -4

γ) 4

δ) 0

ε) 2



Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^{-x} + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω  $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ ,  $x > 2$ . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 4**

**Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$ , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 1$ .

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 10)$ , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $\overset{\Delta}{MOK}$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , όπου  $K(x, 0)$  και  $O(0, 0)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = -x + 2$ , η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, 1)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = 2$ .

**Μονάδες 5**

- Δ3.** i. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 3)
- ii. Να αποδείξετε ότι  $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ ,  
για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 5)  
**Μονάδες 8**
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^3 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.  
**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2020**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020****ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  ή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ »}.$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

β) Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε  $f(a) \neq f(\beta)$ .



γ) Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται στο  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  είναι ίσες.

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $(f \circ f)(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

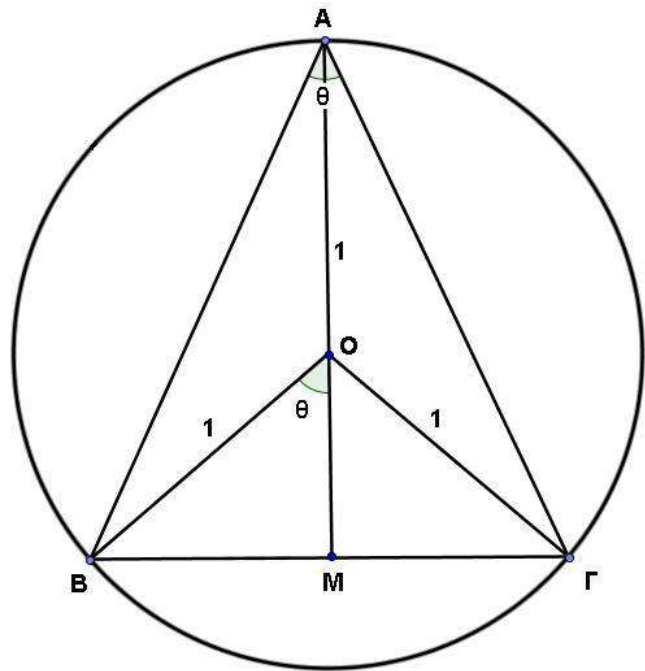
**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left( f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και  $\widehat{BOM} = \theta$ , τότε:



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  είναι:

$$E(\theta) = (1 + \cos\theta)\eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, \pi).$$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta \in (0, \pi)$ , για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες  $\theta_1, \theta_2$ , με  $\theta_1 < \theta_2$ , για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με  $\frac{3}{4}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Για τις γωνίες  $\theta_1, \theta_2$ , του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$  τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2).$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \quad \lambda \in (0, +\infty) \text{ και}$$

$$g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty).$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x=1$ , το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της  $f$ , καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda > 0$  για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Μονάδες 5**

Για τα ερωτήματα **Δ3** και **Δ4** θεωρήστε ότι  $\lambda = 1$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \lambda x$  είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η  $h$  είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020} \left( 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

(Μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

- ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

- B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

- B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

- B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$ , με  $\alpha \leq 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  δίνεται από τον τύπο  $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$ .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το σημείο  $M$  έχει τετμημένη  $-1$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1.$$

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right],$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_0$  για  $x \in (x_0, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho) (f'(k) + 1)$  για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

# **ΘΕΜΑΤΑ 2021**



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .  
**Μονάδες 7**
- A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.  
**Μονάδες 4**
- A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;  
**Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Ισχύει  $|\eta\mu x| < |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .
- γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- δ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή,  $M$ , και μια ελάχιστη τιμή,  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \text{συν}x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ , με  $\alpha < -3$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό  $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi) = 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι  $f(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο  $(1, e)$ .

**Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τύπο  $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$ .

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ , το  $f(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 6**

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 8**

Δ4. Έστω η συνάρτηση  $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής, με  $f(x) > \varphi(x)$ , για κάθε  $x > 0$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(x, \varphi(x))$ , με  $x > 0$ . Αν η απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  γίνεται ελάχιστη στο  $x = x_0$ , να δείξετε ότι το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης  $\varphi$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

The Art of Mathematics

# **ΘΕΜΑΤΑ 2022**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $X = X_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .

β) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  και  $f'(x) \neq 0$ , για όλα τα  $x \in (0,1)$ , τότε  $f(0) \neq f(1)$ .

γ) Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ .

δ) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$ .

ε) Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $h(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $h^{-1}$  της  $h$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B3.** Έστω  $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση: 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x=1 \end{cases} .$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση  $\varphi$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο  $[0, 1]$ . (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$ , όπου  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  και για την παράγωγο  $f'$  της  $f$  ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , x > -1 \end{cases} .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases} .$

**Μονάδες 6**

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 > -1$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $-2$ .

**Μονάδες 5**

Γ3. Έστω  $y = 2x - 2$  η εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 2$  κινείται κατά μήκος της ευθείας ( $\epsilon$ ). Έστω ακόμα  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $MKG$ , όπου  $K$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$  και  $G$  είναι το σημείο με συντεταγμένες  $(2, 0)$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $B(3, 4)$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $x_1, x_2$ , με  $x_1 < 1 < x_2$ . (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή. (μονάδες 2)

**Μονάδες 8**



Στα παρακάτω ερωτήματα,  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

**Δ2.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) .$$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:  $f(2 - x_1) < 0$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση:  $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$  έχει λύση.

**Μονάδες 6**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



