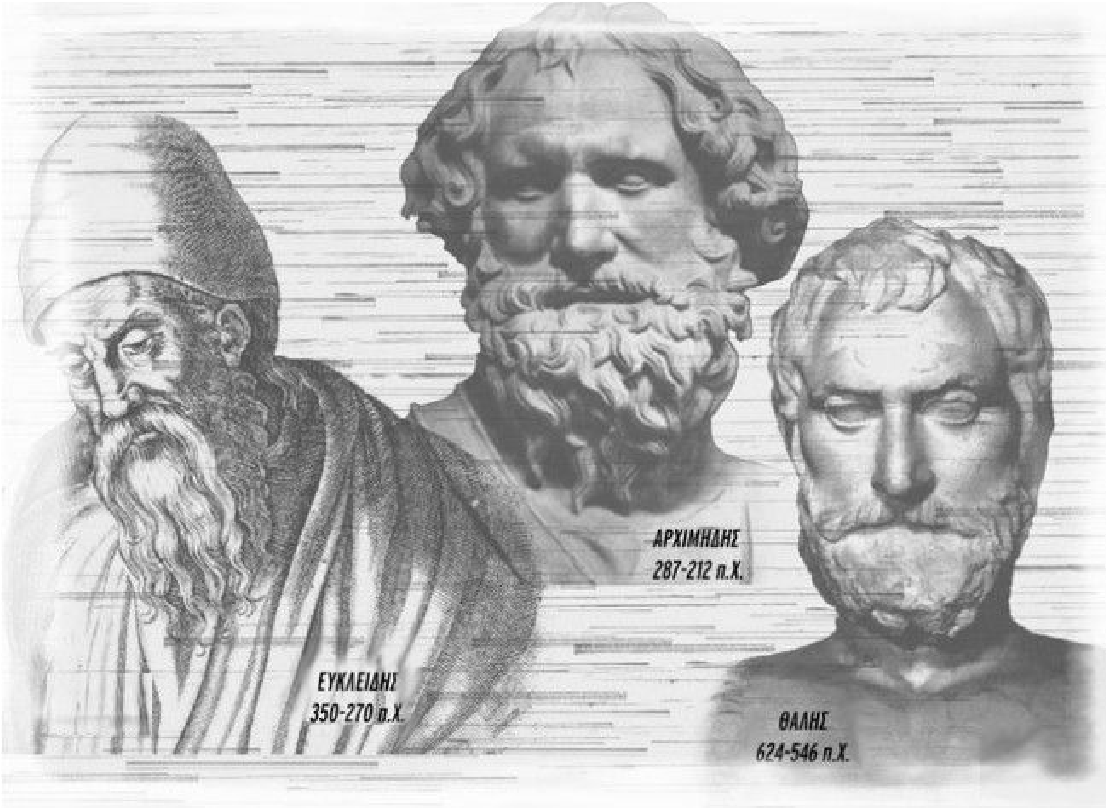
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ Ε.Μ.Ε.



ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

"ΘΑΛΗΣ"

ΘΕΜΑΤΑ 2007

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=\left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^2.$$

Πρόβλημα 2.

Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Πρόβλημα 3.

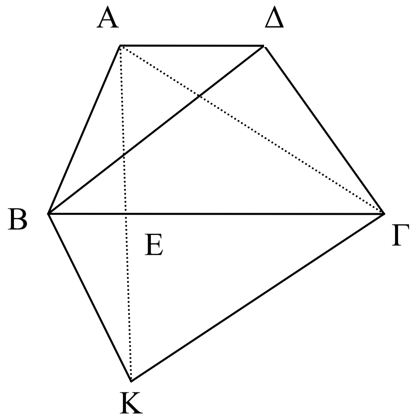
Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300 cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και

(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

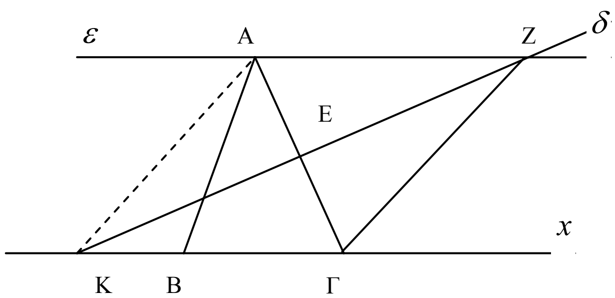
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4,\quad \mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.

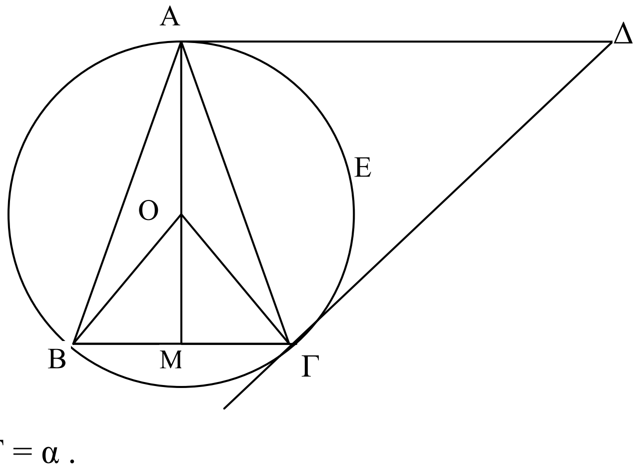
Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\mathrm{A} = aaabb$, όπου a,b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*

Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*

Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$:

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x,y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+2x^3y^2+3x^3+y^4+3y^2-40=0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία $\mathrm{A}x // \mathrm{B\Gamma}$ (η $\mathrm{A}x$ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία $\mathrm{A}x$ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

Πρόβλημα 4.

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x^2y + 2yz^2 &= 70xz \\ 7y^2z + 4zx^2 &= 256xy \\ 5z^2x + 6xy^2 &= 52yz. \end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^{\circ}$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x) - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2008

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Μονάδες 5

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$. Δίνεται ακόμη ότι:

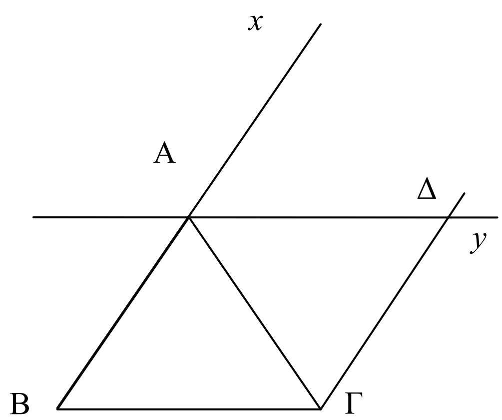
$$B\hat{A}\Gamma = 62^\circ \text{ και } AB = A\Delta.$$

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 2

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

Μονάδες 3



3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4},$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Μονάδες 5

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $\quad \mathrm{B}=\dfrac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\dfrac{x}{2}$.

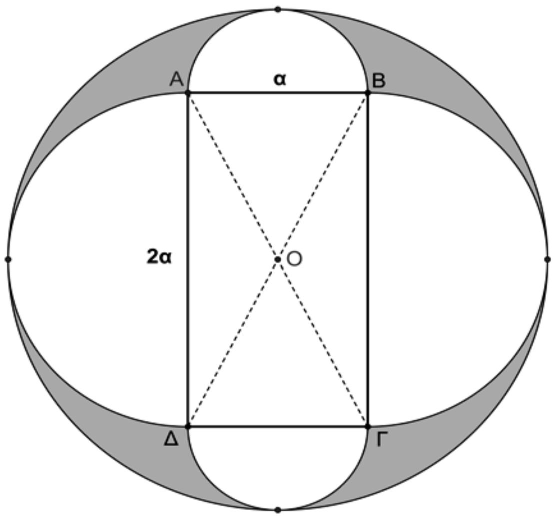
Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2, 4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και
(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ, όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. ***Μονάδες 5***



4. Αν ισχύει $\dfrac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

Μονάδες 5

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

Μονάδες 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Μονάδες 5

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $A\hat{Z}\Gamma$.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2,$$
$$x + y + z = 300.$$

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έτσι ώστε

$$A\Gamma \perp AM \text{ και } A\Gamma = AM, \quad B\Delta \perp MB \text{ και } B\Delta = MB,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AM} \ , \ \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, του οποίου οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $\mathrm{B\Gamma}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4\cdot(-1)^{\nu} + 2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων $\mathrm{O}xy$, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2, και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο
Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο
Αν οι αριθμοί μ,ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2}+4^{\nu+2}\le 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A}=2^{\mu}+2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο .
Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1,\Gamma_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma},\mathrm{A\Gamma},\mathrm{AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2,\Gamma_2$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA},\mathrm{OB},\mathrm{O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\Gamma_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο .
Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\big(x-f(y)\big)-f\big(y-f(x)\big)=2f\big(f(x)-f(y)\big),$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x))=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο
Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha 00\cdots 00\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.
Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33".

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο .
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.
(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.
(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:
α) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.
β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Γυμνασίου

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=7x+10y-3w-87.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:
(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

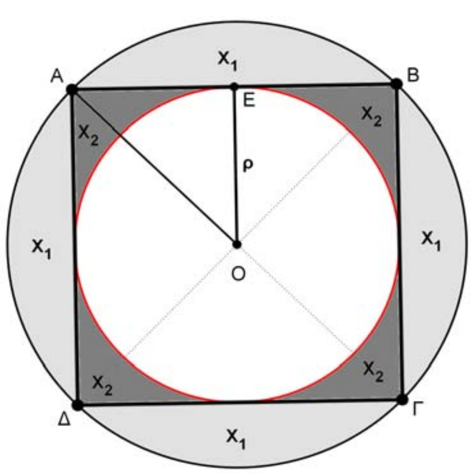
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες $\mathrm{A}x$ και $\mathrm{A}y$ κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=120^0$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ .Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(\mathrm{O},\rho)$ και $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(\mathrm{O},x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A}=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\ ,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ, Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και οι κύκλοι $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = \mathrm{AB}$) και $c_2(\mathrm{A}, \mathrm{A\Gamma})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = \mathrm{A\Gamma}$). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A}, \mathrm{A\Gamma})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο N.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $\Gamma\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{B}$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $(\hat{\mathrm{A}} = 90^o)$ και έστω E το μέσο της διχοτόμου $\mathrm{B}\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$. Το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{B\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E. Αν η ευθεία $\mathrm{E\Delta}$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{B}\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- **α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- **β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$ και $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B, αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$, $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ και ισχύει ότι $\mathrm{r}_1<\mathrm{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MA}<\mathrm{MB}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΘΕΜΑΤΑ 2011

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right).$$

Πρόβλημα 2
Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

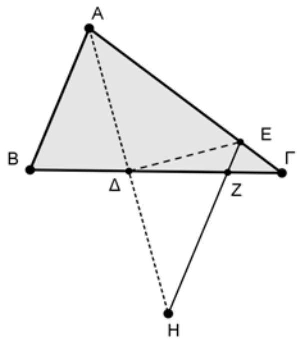
$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Πρόβλημα 3
Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.

2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^0$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x .$$

Πρόβλημα 3

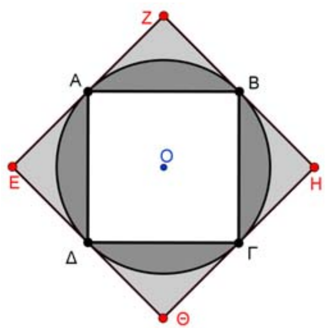
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3{,}1415$).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}$$

Πρόβλημα 3
(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα

$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda,\qquad 2x-y=-\lambda\right\}\qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑΤΑ 2012

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$$

Πρόβλημα 3
Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.
(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$ και $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3 + 4^2\cdot 9^3\right)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

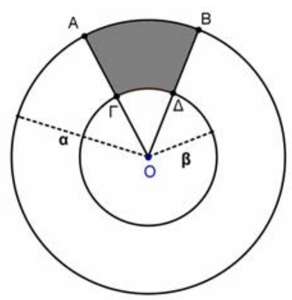
και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha\left(x-3\right) + 2\left(\alpha - 1\right).$$

Πρόβλημα 3
Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $\left(\mathrm{O},\alpha\right)$ και $\left(\mathrm{O},\beta\right)$, $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta} = \alpha$ cm και $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Delta}$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AE}$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ.
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{Β\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha,$$

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι
$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$
και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM,KT,NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2013

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

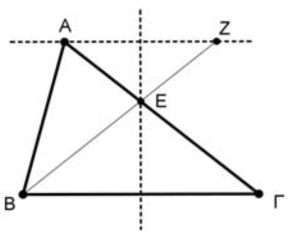
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνιά $\hat{\mathrm{B}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB}$, **(β)** $\mathrm{A\hat{E}B} = \hat{\mathrm{B}}$.



Πρόβλημα 4
Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3\cdot\left(3\alpha - 4,6\right) - 2\cdot\left(\alpha - 0,2\right).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2\left(x+1\right) - \frac{3}{2}\left(x+1\right) < \frac{x}{\beta} \quad .$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(2,-6\right)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

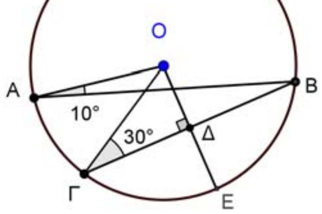
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 10^{\circ}$ και $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 30^{\circ}$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{και } (\Sigma_2)\ \left\{\begin{array}{l} \alpha x+\beta y \ \ =4 \\ 2\alpha x+3\beta y=-8 \end{array}\right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x,y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Πρόβλημα 2
Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z ισχύει ότι:

$$z=2(x+y) \qquad \text{και} \qquad z=3(x-y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.
(β) Να βρείτε την τριάδα (x,y,z) για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α,β,γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K,Λ,M,N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 3
Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $T\Sigma,K\Gamma,NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2014

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

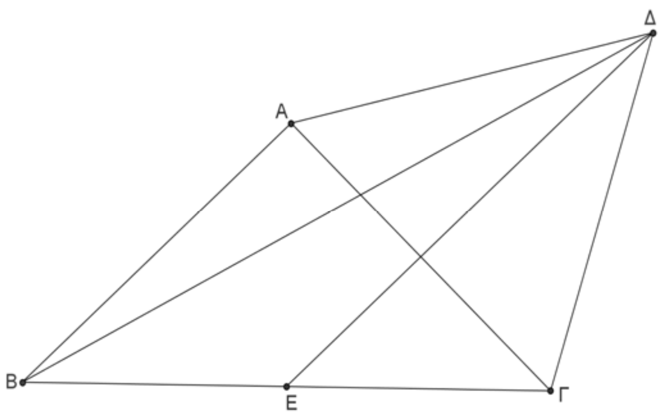
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\dfrac{13}{9}-\dfrac{74}{9}\cdot\dfrac{3}{37}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Πρόβλημα 2
Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.
Πρόλημα 3
Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015},\frac{1007}{2019},\frac{1009}{2021},\frac{997}{2009},\frac{1011}{2023},\frac{999}{2011},\frac{1001}{2013},\frac{1005}{2017}.$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.
(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma \mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}$$

.

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Πρόβλημα 3
Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x,y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x,y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x,y.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο *ABCD* με τη γωνία $\hat{A}=100^o$ και $\hat{D}=40^o$. Αν *DB* είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2|x-y|=5$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο Α και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του Α) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται επάνω στο κύκλο (c).

Πρόβλημα 4
Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186, \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Πρόβλημα 2
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{array}\right\}$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $\mathrm{A\Gamma}$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{B\Delta H\Theta}$, $\mathrm{B\Delta EK}$ και $\Delta Z\Theta\mathrm{K}$ είναι εγγράψιμα.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

The Art of Mathematics

ΘΕΜΑΤΑ 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Πρόβλημα 2
Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\frac{a-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\frac{28}{\nu}$ και $\gamma=\frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega^{\circ}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}=36^{\circ}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^{\circ}$,
(β) ΑΜ = ΓΖ,
(γ) ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x,y,z,w,m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=(x+y)\cdot z^{m}-w$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$$
και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Πρόβλημα 2
Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{c} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{array}\right\}$

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης
$$x+y+x^2+y^2=p,$$
όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=30^o$. Έστω $\Delta, \text{Ζ}$ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ και τετράγωνο ΑΖΗΘ. Η μεσοκάθετη του ΒΔ, τέμνει την ΑΓ στο σημείο Τ. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τρίγωνο ΑΕΤ είναι ισόπλευρο.
(β) τα τρίγωνα ΑΤΒ και ΔΘΤ είναι ίσα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} + \sqrt{x^4 + 32y^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ν των ΑΚ, ΒΚ , αντίστοιχα, και έστω ότι οι ευθείες ΓΝ, ΔΜ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΡΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΓΔ .

Πρόβλημα 3
Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\dfrac{5a}{2}, \dfrac{a+2}{5}, a$.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \le \frac{2x+a}{3}, \quad 2(3x-a)+x > 2(x+1)-a, \quad a-x \le 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Πρόβλημα 4
Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma : \begin{cases} a\sqrt[3]{b} - c = a \\ b\sqrt[3]{c} - a = b \\ c\sqrt[3]{a} - b = c \end{cases}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76$^{\text{ος}}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη-αρνητικούς ακεραίους x,y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p,q πρώτοι αριθμοί.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D,E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2016

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

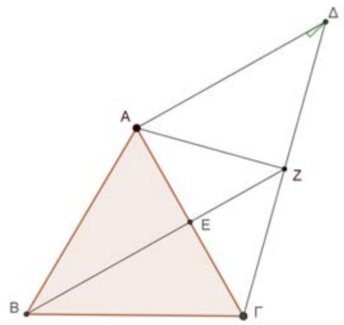
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A} = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3} .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta} = \alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA} = \mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.



Πρόβλημα 3
Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α.

Πρόβλημα 4
Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

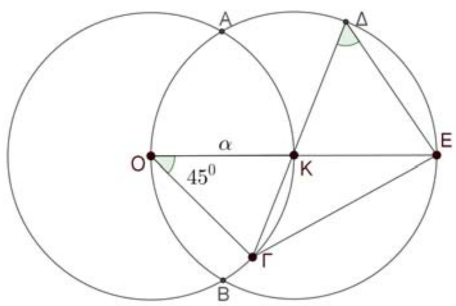
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \dfrac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \dfrac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :



(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$, και
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Πρόβλημα 3
Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4
Δίνονται οι αριθμοί
$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d\,.$$
(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\dfrac{\mathrm{A}}{36} < \dfrac{\mathrm{B}}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\dfrac{\mathrm{A}}{36}, \dfrac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x \leq x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0}=\alpha_\nu \cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1} \cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 \cdot 10+\alpha_0$, $\nu \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$\mathrm{A}=2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+18\right)^2-\left(8\alpha+1\right)^2$$

είναι πρώτος.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}.$$

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ \ y+\frac{1}{y}-w=2,\ \ z+\frac{1}{x}+w=2,\ \ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της A, B και Γ με τετμημένες α, β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1) = 1,\ P(2) = 4, P(3) = 9,\ P(4) = 16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A} = 14^7 + 14^2 + 1$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2017

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

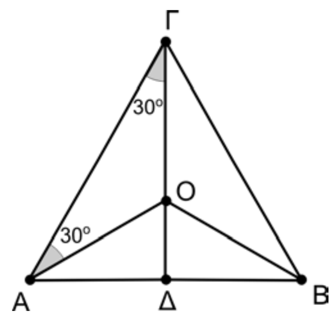
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $\mathrm{O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 30^0}$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

Πρόβλημα 3
Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Πρόβλημα 4
Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

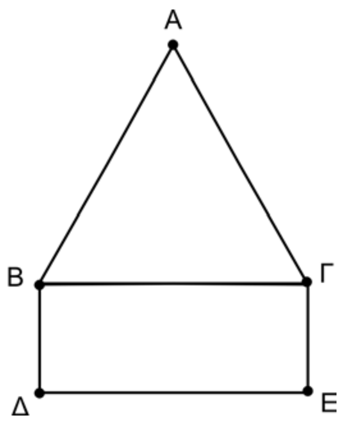
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Πρόβλημα 2
Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $\mathrm{B\Delta}=\frac{\alpha}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$.
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν όλες οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε σημείο Μ (διαφορετικό από το μέσο της ΒΓ) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο Κ του ΜΒ και ακτίνα ΚΒ) τέμνει την ΑΒ στο Δ. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο Λ του ΜΓ και ακτίνα ΛΓ) τέμνει την ΑΓ στο Ε. Οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π και Ρ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνονται στο σημείο Τ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΠΡΤ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς ΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ρ είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι λύση και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0 \ .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}} = 45^{\circ}$. Ο κύκλος $\mathrm{C}_{\Gamma}(\Gamma, \Gamma\mathrm{A})$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω $\mathrm{C}_{\mathrm{B}\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_{Γ} στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f\left(a\right)=0 \text{ και } f\left(f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right)+a, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Πρόβλημα 2
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \ .$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=36^{\mathrm{o}}$. Ο κύκλος $\mathrm{C}_1\left(\Gamma,\Gamma\mathrm{A}\right)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ και ότι η ΔΓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4
Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2018

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

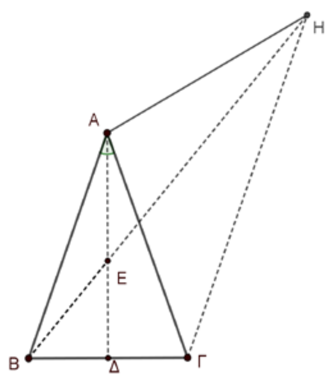
Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ), με $\hat{A}=40°$, και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $A\hat{H}B=20°$,
(β) $A\hat{\Gamma}H=40°$,
(γ) η ΗΒ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

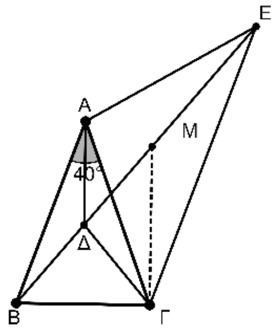
Πρόβλημα 2
Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ. Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

(α) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$.
(β) $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=100^\circ$.
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.



Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)\left(x^2-7x+10\right)=0$$

και την ανίσωση

$$\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Πρόβλημα 3
Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{99}$$

και

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:
(α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
(β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + z + w = 8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το O προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1), του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης
$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 \ ,$$
στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 2
Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$. να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 3
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:
$$x + 2y^2 = 3z^3$$
$$y + 2z^2 = 3x^3$$
$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ (με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $\Delta\Gamma$ στο σημείο E. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία $A\Delta$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου ΔBE.
(β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $OB\Gamma$.
(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΔBE και $OB\Gamma$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

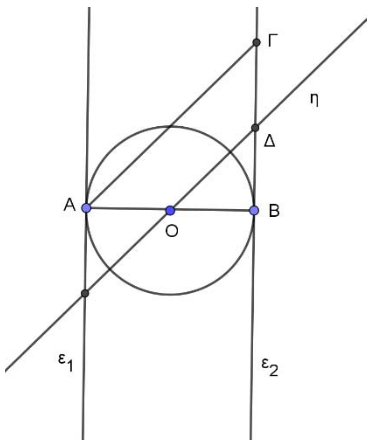
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB, κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Gamma}$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{OB\Delta}$.
(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $\mathrm{AO\Delta\Gamma}$.

Πρόβλημα 4
Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Πρόβλημα 4

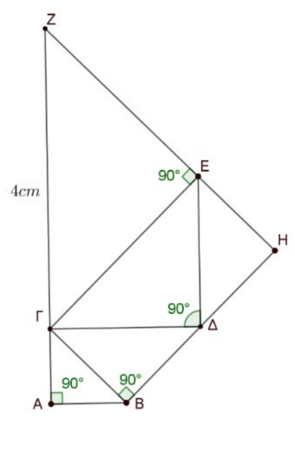
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}, \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}, \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{\Delta E}$, $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{\Gamma Z}=4\ cm$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 2\cdot\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{\left(\alpha^2-1\right)^3}{\left(\alpha-1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες *Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha+\beta$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}-\{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2+(\lambda^2+1)x-(11\lambda-18)=0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:
$$108\left(x-2\right)^4+\left(4-x^2\right)^3=0\ .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} xy^3=-108 \\ \left(x+y\right)y=-3 \end{array}\right\}$.

Πρόβλημα 4
Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4,…,1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2020

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
6 Νοεμβρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει με όλες τις υπόλοιπες ομάδες μία μόνο φορά. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες;

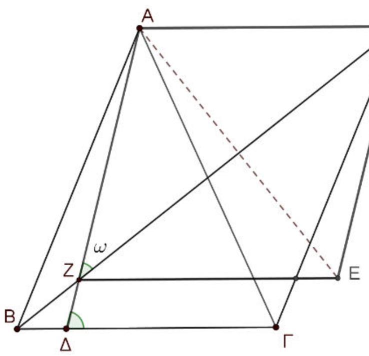
Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{AZ}=\mathrm{B\Gamma}.$$

Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες.

Αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}=\omega$, τότε:

(α) Να βρείτε τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ συναρτήσει του ω.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.



(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

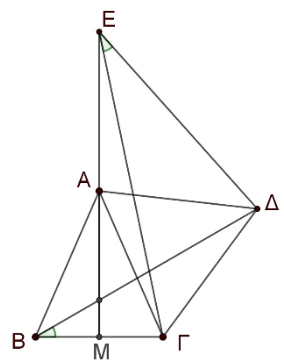
Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}}+\frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}}+20^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}}+\frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}}+2021\right).$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΓΔ$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{ΔΒΓ}=\widehat{ΓΕΔ}=30°.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)
Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα Μ που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα Φ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας Φ δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα Μ. Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Μ έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Φ έγινε 37. Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$ είναι σύνθετος, για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $\hat{A} = 30°$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ$ και $ΑΓ$, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος $C_{ΑΓΜ}$ του τριγώνου $ΑΓΜ$ τέμνει τη πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο N προς την πλευρά $ΑΒ$ και η κάθετη από σημείο $Γ$ προς την $ΔN$ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔΝ$.
(***Σημείωση***: *Σε ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε OX=OY=OZ).*

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Έστω $\Sigma(\nu)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $\hat{A} = 45°$. Θεωρούμε το ύψος $ΒΕ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{ΑΒΓ}$, στο σημείο $Δ$. Η προέκταση του ύψους $ΒΕ$ τέμνει επίσης στο σημείο $Λ$ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο του $Γ$. Η $ΑΛ$ τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $Δ$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΓΛ$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΖΓΛ$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $b > 2a$. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{a+b+c}{b-2a}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο ακέραιος $3p-8$ ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Αν οι x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3+8y-4z=-3 \\ 3x^2+y^2-2z=1 \\ 3x-4y+z^2=68 \end{array}\right\}$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $\hat{A}=60°$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c=c(O,R)$. Δίνονται επίσης τα ύψη του $ΒΔ, ΓΕ$ καθώς και τα μέσα M, N των πλευρών του $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των OA, EM και H το σημείο τομής των $MN, ΔE$.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, H, Z, M ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1.
(β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, H, Θ είναι συνευθειακά.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!