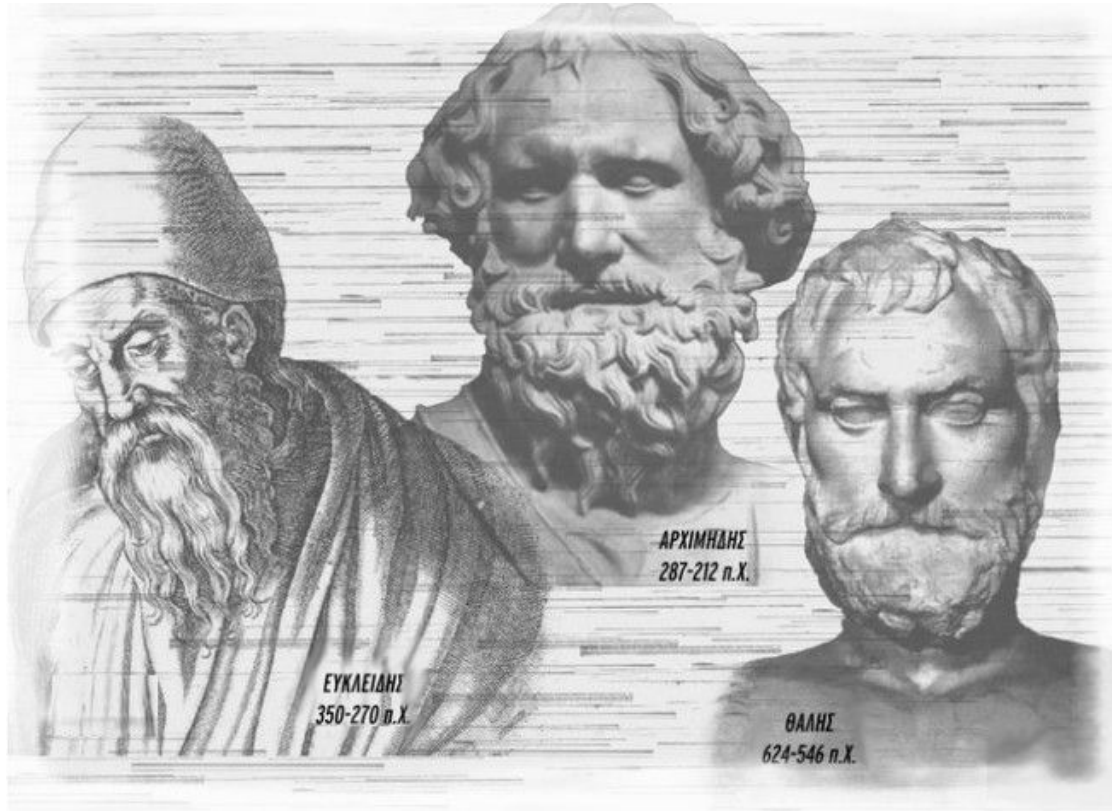


# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ Ε.Μ.Ε.



## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

### “ ΘΑΛΗΣ ”

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2007**



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007**

## Β΄ τάξη Γυμνασίου

### Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2.$$

### Πρόβλημα 2.

Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

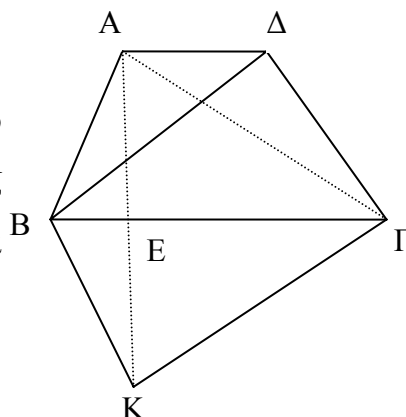
### Πρόβλημα 3.

Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

### Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπέζιου είναι  $300\text{cm}^2$  και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και  
 (β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007**  
**Γ΄ τάξη Γυμνασίου**

**Πρόβλημα 1**

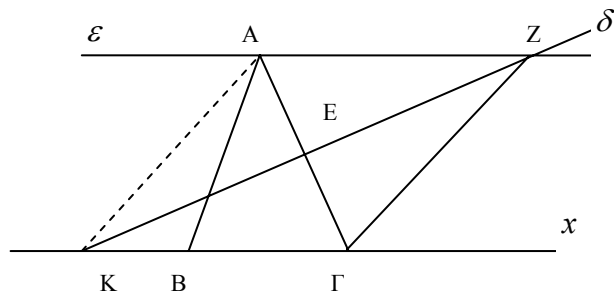
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του  $x$  αληθεύει η ανίσωση:  $A > B$ .

**Πρόβλημα 2**

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$ . Η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  και η ευθεία  $\delta$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $A\Gamma$ .



- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $Z\hat{\Gamma}x$ ,  
 (β) Να αποδείξετε ότι  $KA = AZ$ .

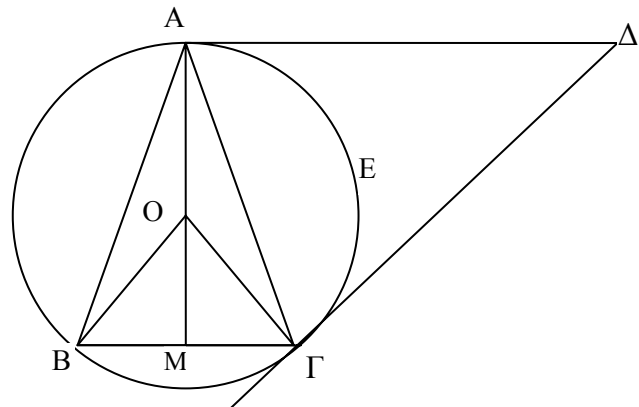
**Πρόβλημα 3**

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο  $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ .

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής  $A = aaabb$ , όπου  $a, b$  ψηφία με  $a \neq 0$ , ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ . Η  $A\Delta$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  και η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη προς την  $O\Gamma$ .



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $OAE\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Α΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς  $x$  και  $y$  που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον  $x$  κατά 50 και αυξήσω τον  $y$  κατά 40, τότε το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται.

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό  $x$  κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό  $y$  κατά 20, τότε πάλι το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται;

Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει.

Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

### Πρόβλημα 2

Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$  τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

### Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Φέρουμε ευθεία  $\varepsilon$  κάθετη προς την  $A\Gamma$  στο  $A$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Gamma B$  στο  $E$ . Πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  με το σημείο  $A$  να βρίσκεται μεταξύ των  $E$  και  $\Delta$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς  $A\Gamma = \beta$ :

- (α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ ,
- (β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AE$ .

### Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Β΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών  $\kappa, \lambda, \mu$ , για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση  $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$  έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και ημιευθεία  $Αx // ΒΓ$  (η  $Αx$  βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο  $Γ$  ως προς την ευθεία  $ΑΒ$ ). Στην ημιευθεία  $Αx$  θεωρούμε τα σημεία  $Δ$  και  $Ε$  έτσι, ώστε το τετράπλευρο  $ΒΓΔΕ$  να είναι ρόμβος (το σημείο  $Ε$  βρίσκεται ανάμεσα στο  $Α$  και στο  $Δ$ ). Στο σημείο  $Δ$  θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη  $ΔΓ$  που τέμνει την προέκταση της πλευράς  $ΒΑ$  στο  $Ζ$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο  $ΔΕΖ$  είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το  $Ε$  είναι έγκεντρο του τριγώνου  $ΑΓΖ$ .

### Πρόβλημα 4.

Αν  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ , να λυθεί το σύστημα:

$$3x^2y + 2yz^2 = 70xz$$

$$7y^2z + 4zx^2 = 256xy$$

$$5z^2x + 6xy^2 = 52yz.$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Γ' τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Στα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνονται στο  $\Delta$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι όμοια.  
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των  $\lambda, \mu$  που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

### Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

### Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  και  $c$ , που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**68<sup>ου</sup> ΘΑΛΗΣ**  
**24 Νοεμβρίου 2007**

**Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

$$\begin{aligned} 1. A &= (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2 \\ &= (25 + 1200) + (200 : 10 + 762) \cdot [(-1) + 1 + (-1)]^2 \\ &= 1225 + (20 + 762) \cdot (-1)^2 \\ &= 1225 + 782 \cdot 1 = 2007. \end{aligned}$$

2. Αν  $\omega$  είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο  $\omega$  είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή  $\text{ΕΚΠ}[6, 8, 10] = 120$ , έπεται ότι  $\omega \in \{120, 240, 360, 480, \dots\}$  και αφού  $300 < \omega < 400$ , θα είναι  $\omega = 360$ .

Αν  $x, y, z$  είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \lambda \quad \text{και} \quad x + y + z = 360.$$

Άρα είναι

$$x = 5\lambda, y = 4\lambda, z = 3\lambda$$

$$\text{και} \quad 5\lambda + 4\lambda + 3\lambda = 360 \Leftrightarrow 12\lambda = 360 \Leftrightarrow \lambda = 30.$$

Άρα είναι:  $x = 5 \cdot 30 = 150$ ,  $y = 4 \cdot 30 = 120$ ,  $z = 3 \cdot 30 = 90$ .

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά  $200 \cdot 3 = 600$  ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν  $200 \cdot \frac{10}{100} = 20$  κιλά, οπότε του έμειναν

$$200 - 20 = 180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600 + 600 \cdot \frac{20}{100} = 720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό  $720 : 180 = 4$  ευρώ.

4. (α) Αν  $x = \text{ΒΓ}$ ,  $y = \text{ΑΔ}$  και  $\text{ΑΕ} = \nu$ , τότε  $x = 2y$  και

$$\frac{(x+y)\nu}{2} = \text{Ε} = (\text{ΑΒΓΔ}) \Leftrightarrow 3y \cdot \nu = 2\text{Ε} \Leftrightarrow y \cdot \nu = \frac{2\text{Ε}}{3} \Leftrightarrow y \cdot \nu = 200\text{cm}^2.$$

Άρα έχουμε

$$\text{Ε}(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2} y \cdot \nu = \frac{1}{2} \cdot 200\text{cm}^2 = 100\text{cm}^2.$$

$$\text{(β)} \quad (\text{ΑΒΚΓ}) = 2(\text{ΑΒΓ}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \nu = 2(y \cdot \nu) = 2 \cdot 200 = 400\text{cm}^2.$$



**Διαφορετικά**

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει κάθετους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$(ΑΒΚΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΚ = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2\nu = 2(y \cdot \nu) = 2 \cdot 200 = 400cm^2.$$

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4 \\
 &= -\left[2^8 : (2^2)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -(2^8 : 2^4 + 4^2) : 2^4 \\
 &= -(2^4 + 4^2) : 2^4 = -32 : 16 = -2. \\
 B &= -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)] \\
 &= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y) \\
 &= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15. \\
 A > B &\Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.
 \end{aligned}$$

2. (α)  $Z\hat{\Gamma}x = A\hat{Z}\Gamma$  (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και  $\varepsilon$ ).  
 Επειδή η  $\delta$  είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με  $Z\hat{\Gamma}A = Z\hat{A}\Gamma$ . Όμως, από την παραλληλία των ευθειών  $\varepsilon$  και ΒΓ προκύπτει ότι  $Z\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$ . Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 40^\circ$  προκύπτει ότι

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$Z\hat{\Gamma}A = Z\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
 A\hat{Z}\Gamma &= 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ \\
 \Rightarrow Z\hat{A}x &= 40^\circ.
 \end{aligned}$$

(β) Επειδή η  $\delta$  είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με  $KA = KG$ , οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε

$$A\hat{K}Z = \Gamma\hat{K}Z.$$

Επειδή είναι  $\varepsilon \parallel B\Gamma$  θα έχουμε

$$A\hat{Z}K = \Gamma\hat{K}Z,$$

οπότε θα είναι και

$$A\hat{K}Z = A\hat{Z}K,$$

οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με  $KA = AZ$ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο  $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ .

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει  $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$  και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει  $b \in \{1, 5, 9\}$ .

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:

$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \quad (1)$$

- Για  $b=1$  λαμβάνουμε  $3a+2 = \text{πολ.9}$ , αδύνατο.
- Για  $b=5$  λαμβάνουμε  $3a+10 = \text{πολ.9}$ , αδύνατο.
- Για  $b=9$  λαμβάνουμε  $3a+18 = \text{πολ.9}$ , οπότε προκύπτει ότι  $a \in \{3, 6, 9\}$ . Άρα είναι  $A = 33399$  ή  $A = 66699$  ή  $A = 99999$ .

4. (α) Παρατηρούμε ότι  $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 2\hat{A} = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $OB\Gamma$  είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι  $R = B\Gamma = \alpha$ . Επιπλέον  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ .

Άρα είναι  $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$ , οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.τομέα}(O\hat{A}E\hat{\Gamma}) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$  (εντός εναλλάξ στις παράλληλες  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  με τέμνουσα την  $A\Gamma$ ) και  $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 90^\circ - \widehat{O\hat{\Gamma}A} = 90^\circ - \widehat{O\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 75^\circ$ , τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta A\Gamma$  είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι  $OA \perp A\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma$  θα είναι και  $OA \perp B\Gamma$ , οπότε η  $OA$  περνάει από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Από το τρίγωνο  $OM\Gamma$  έχουμε

$$OM^2 = O\Gamma^2 - M\Gamma^2 \Leftrightarrow OM^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow OM^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι  $AM = AO + OM = \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  και

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\alpha^2(2 + \sqrt{3})}{4}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν  $x, y$  είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\begin{cases} xy = (x-50)(y+40) \\ xy = (x+100)(y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 50y = 2000 \\ -20x + 100y = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 20 \end{cases}.$$

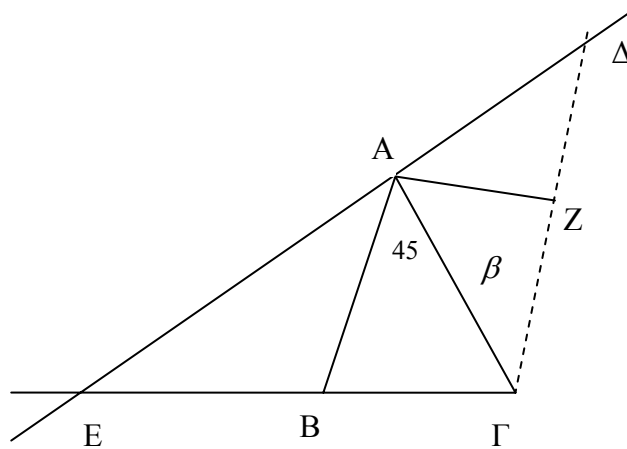
2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\gamma - \alpha)(\beta^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\alpha - \beta)(\gamma^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + (\gamma - \alpha)\beta^2 + (\alpha - \beta)\gamma^2 + (\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + \beta\gamma(\beta - \gamma) - \alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma))}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = -\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

3.



(α) Το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε  $\hat{A}\Gamma\Delta = 45^\circ$ . Άρα είναι  $\hat{A}\Gamma\Delta = 45^\circ = \hat{B}\hat{A}\Gamma$ , οπότε  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , αφού τεμνόμενες από την  $A\Gamma$  σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο με βάσεις  $AB = \beta$ ,  $\Gamma\Delta = \sqrt{\beta^2 + \beta^2} = \beta\sqrt{2}$  και ύψος

$$AZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\beta\sqrt{2}}{2}. \text{ Άρα έχει εμβαδόν}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\beta + \beta\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \frac{\beta^2(2 + \sqrt{2})}{4}.$$

(β) Επειδή είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$  τα τρίγωνα  $EAB$  και  $E\Delta\Gamma$  είναι όμοια, οπότε, αν  $EA = x$ , θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x + \beta \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-1) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta(\sqrt{2}+1).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4}_{(x^3 + y^2)^2} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$(x^3 + y^2)^2 + 3(x^3 + y^2) + 2 = 42$$

$$(x^3 + y^2 + 1) \cdot (x^3 + y^2 + 2) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως  $x^3 + y^2 + 1$  και  $x^3 + y^2 + 2$ , είναι θετικοί ακέραιοι με  $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$  και γινόμενο

$$42 = 1 \cdot 41 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις (1),(2),(3) είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x=1 \text{ και } y=2.$$

**Διαφορετικά**, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού  $x, y > 0$  έχει τη μοναδική λύση  $x^3 + y^2 = 5$ , που αληθεύει μόνο για  $x=1$  και  $y=2$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \underbrace{x^6 - 2x^3 + 1} + \underbrace{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \underbrace{y^4 - 2y^2 + 1} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 1 = 0 \text{ και } x^2 - y^2 = 0 \text{ και } y^2 - 1 = 0). \\ & \Leftrightarrow (x = 1 \text{ και } y = 1) \text{ ή } (x = 1 \text{ και } y = -1) \end{aligned}$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\kappa\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4\kappa\mu.$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι:  $x_1 = x_2 = \frac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός  $4\kappa\mu$  είναι άρτιος. Άρα και ο  $\lambda^2$  είναι άρτιος, οπότε ο  $\lambda$  είναι άρτιος.

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο  $\lambda$  (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι:  $\lambda = 2$  ή  $\lambda = 4$  ή  $\lambda = 6$  ή  $\lambda = 8$ .

Αν  $\lambda = 2$  τότε:  $4 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 1$ , οπότε οι δυνατές τιμές για τα  $\kappa$  και  $\mu$  είναι

$$\kappa = 1 \text{ και } \mu = 1.$$

Αν  $\lambda = 4$  τότε:  $16 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 4$ , οπότε οι δυνατές τιμές για τα  $\kappa$  και  $\mu$  είναι

$$(\kappa = 1 \text{ και } \mu = 4) \text{ ή } (\kappa = 4 \text{ και } \mu = 1) \text{ ή } (\kappa = 2 \text{ και } \mu = 2).$$

Αν  $\lambda = 6$  τότε:  $36 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 9$ , οπότε οι δυνατές τιμές για τα  $\kappa$  και  $\mu$  είναι

$$(\kappa = 1 \text{ και } \mu = 9) \text{ ή } (\kappa = 9 \text{ και } \mu = 1) \text{ ή } (\kappa = 3 \text{ και } \mu = 3).$$

Αν  $\lambda = 8$  τότε:  $64 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 16$ , οπότε οι δυνατές τιμές για τα  $\kappa$  και  $\mu$  είναι

$$(\kappa = 2 \text{ και } \mu = 8) \text{ ή } (\kappa = 8 \text{ και } \mu = 2) \text{ ή } (\kappa = 4 \text{ και } \mu = 4).$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα  $(\kappa, \lambda, \mu)$  είναι:

$$(1, 2, 1), (1, 4, 4), (2, 4, 2), (1, 6, 9), (3, 6, 3), (2, 8, 8), (4, 8, 4).$$

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

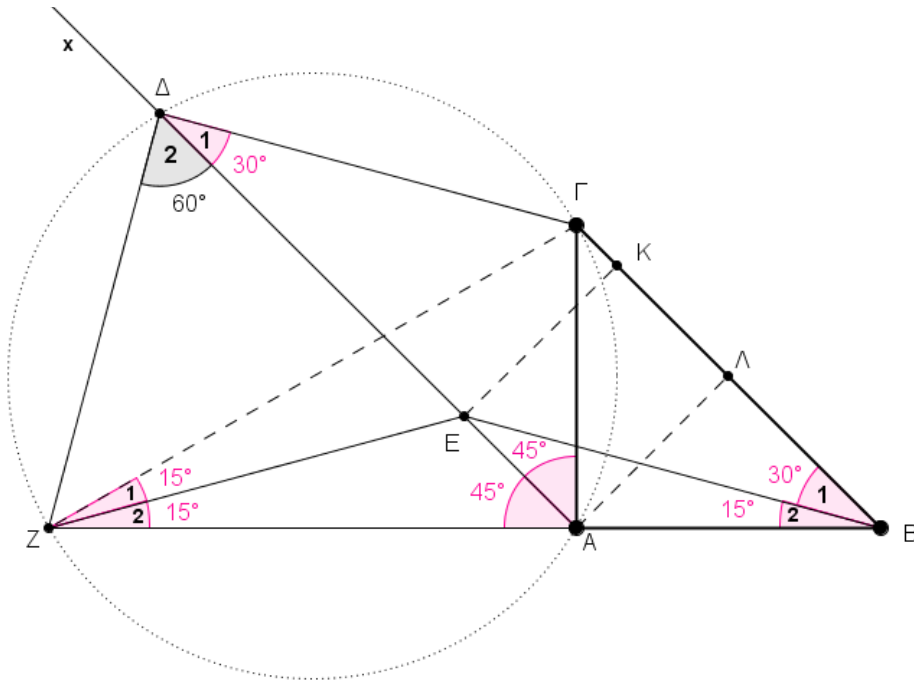
$$x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -1,$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -2,$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ \quad (1)$$



Θεωρούμε  $ΑΛ$  και  $ΕΚ$  κάθετες στη  $ΒΓ$ .

Τότε  $ΑΛ = ΕΚ$  (διότι  $ΑΛΚΕ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

Η  $ΑΛ$  είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$ , οπότε  $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$ .

Άρα  $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$ . Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ΒΕΚ$ ,

έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{B}_1 = 30^\circ.$$

Από το ρόμβο  $ΒΓΔΕ$  έχουμε  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$  και επειδή  $\hat{\Gamma\hat{\Delta}Z} = 90^\circ$  έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{\Delta}_2 = 60^\circ} \quad (2)$$

Το τετράπλευρο  $ΑΓΔΖ$  είναι εγγράψιμο (διότι  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) και η  $ΑΔ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma\hat{A}Z}$ . Άρα το  $\Delta$  είναι μέσο του τόξου  $\Gamma Z$ , οπότε

$$\boxed{\Delta\Gamma = \Delta Z = \Delta E} \stackrel{(1)}{=} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ισόπλευρο.

**(β)** Προφανώς η  $ΑΕ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma\hat{A}Z}$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι η  $ΖΕ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma\hat{Z}A}$ .

Εφόσον το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ισόπλευρο, θα ισχύει  $EZ = EB$  και επειδή  $\hat{B}_2 = 15^\circ$ , θα ισχύει:

$$\hat{Z}_2 = 15^\circ \quad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε  $\widehat{AZ\Gamma} = \widehat{\Delta}_1 = 30^\circ$ , οπότε θα είναι  $\widehat{Z}_1 = 15^\circ$ .

4. Για  $xyz \neq 0$  το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70, \quad \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256, \quad \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u, \quad \frac{yz}{x} = v, \quad \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left. \begin{array}{l} 3u + 2v = 70 \quad (1) \\ 7v + 4w = 256 \quad (2) \\ 5w + 6u = 52 \quad (3) \end{array} \right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow$$

$$u + v + w = 42. \quad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \quad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε  $u = 2$ ,  $v = 32$ , οπότε από την (4) προκύπτει ότι  $w = 8$ . Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2, \quad \frac{yz}{x} = 32, \quad \frac{zx}{y} = 8 \quad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32. \quad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} 32x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 8y^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 2z^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{array} \right\},$$

οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

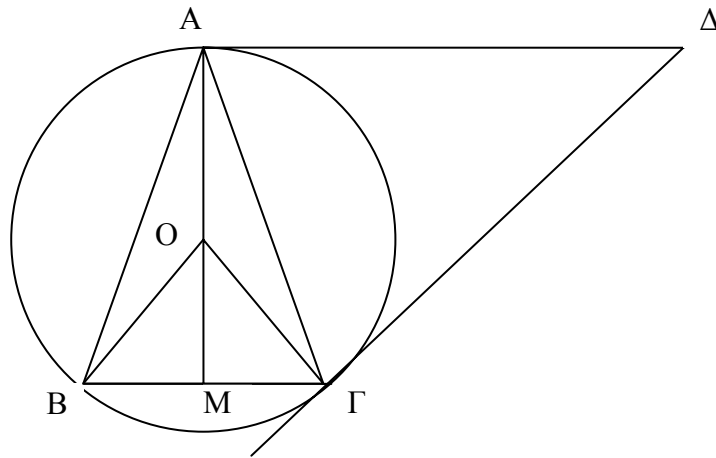
$$(x, y, z) = (4, 8, 16) \text{ ή } (-4, -8, -16) \text{ ή } (4, 8, -16) \text{ ή } (-4, -8, 16)$$

$$\text{ή } (4, -8, -16) \text{ ή } (-4, 8, 16) \text{ ή } (4, -8, 16) \text{ ή } (-4, 8, -16).$$



## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta A\Gamma$  είναι ισοσκελή ( $\Delta A = \Delta \Gamma$ , ως εφαπτόμενες από το  $\Delta$  στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta$ , ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = 2\hat{A} = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $OB\Gamma$  είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι  $R = B\Gamma = \alpha$ .

Έστω η  $AO$  τέμνει τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Επειδή είναι  $OA = OB$  και  $AB = A\Gamma$  η  $OA$  είναι η μεσοκάθετη της  $B\Gamma$ . Άρα είναι  $A\Delta \parallel B\Gamma$  και το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο  $AM\Gamma$  έχουμε  $AM = \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta A\Gamma$  είναι όμοια ( $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta$ ), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha(2 + \sqrt{3}).$$

Άρα είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\alpha + \alpha(2 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\alpha(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{\alpha^2(9 + 5\sqrt{3})}{4}$$

2. (α) Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 8\lambda - 2(\mu + 4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4 \cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{cases}.$$

(β) Για  $\lambda=2$  και  $\mu=3$  η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3 - 7x - 2 = (x-2)(2x^2 + 4x + 1)$$

$$3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(3x+2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2 + 4x + 1}{3x + 2} = \frac{17}{8}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}.$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 19x - 26 = 0, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -\frac{13}{16}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{16}.$$

3. Για  $x = y = 0$  από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$f(f(0) - f(0)) = f(f(0)) - 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = f(f(0)) \quad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου  $y$  το  $f(x)$  έχουμε:

$$f(f(x) - f(f(x))) = f(f(x)) - f(x) \quad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε  $x = 0$  έχουμε:

$$f(f(0) - f(f(0))) = f(f(0)) - f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε  $f(f(0)) = f(0) = 0$ .

Θέτοντας στην (1) όπου  $x = 0$ , έχουμε:

$f(f(0) - f(y)) = f(f(0)) - y$  και δεδομένου ότι  $f(f(0)) = f(0) = 0$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-f(y)) = -y. \quad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου  $y$  το  $x$  έχουμε:

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(x)) - x \Leftrightarrow f(0) = f(f(x)) - x \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) = x \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου  $y$  το  $f(x)$ , έχουμε:

$$f(-f(f(x))) = -f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η  $f$  είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε  $x = \frac{a+b}{a-b}$ , τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b} = \frac{x+1}{x-1} \quad (1)$$

(είναι  $x \neq 1$ , αφού  $b \neq 0$ ). Ομοίως, αν θέσουμε  $y = \frac{b+c}{b-c}$ ,  $z = \frac{c+a}{c-a}$ , τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1} . \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2. \end{aligned}$$

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2008**

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**69<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

**Λύση**

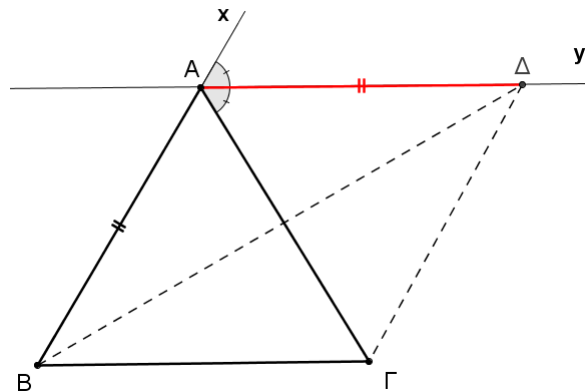
$$\begin{aligned} A &= 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = (4 \cdot 25)^2 + 502 + (27 - 25) \cdot 249 - 10^4 \\ &= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000 \end{aligned}$$

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία  $Ay$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{G}Ax$ .

Δίνεται ακόμη ότι

$$\hat{B}A\hat{\Gamma} = 62^\circ \text{ και } AB = A\Delta.$$

- (α) Να βρείτε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 (β) Να εξηγήσετε γιατί η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .



Σχήμα 1

**Λύση**

(α) Επειδή η  $Ay$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{G}Ax$  θα είναι  $\hat{G}A\hat{\Delta} = \hat{\Delta}A\hat{x}$ . Όμως είναι  $\hat{G}A\hat{\Delta} + \hat{\Delta}A\hat{x} = 180^\circ - \hat{B}A\hat{\Gamma} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ , οπότε καθεμία από τις γωνίες  $\hat{G}A\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Delta}A\hat{x}$  είναι  $59^\circ$ .

Επειδή είναι  $Ay \parallel B\Gamma$  έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{B} = \hat{\Delta}A\hat{x} = 59^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{G}A\hat{\Delta} = 59^\circ.$$

(β) Επειδή είναι  $AB = A\Delta$ , έπεται ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές με

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}. \quad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών  $B\Gamma$  και  $Ay$  έχουμε ότι

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma},$$

οπότε η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό  $\alpha$  ισχύει:  $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$ , να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4 + \alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 .$$

#### Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι  $\alpha = 9$ , αφού  $\alpha$  θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$A = 9 + 5(4 + 9) + 3(9 - 4) + 1919 = 9 + 5 \cdot 13 + 3 \cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

#### Λύση

Αν είναι  $A_1$  ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο  $A_1$  είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \text{πολ.}5 + 3 \\ A_1 = \text{πολ.}7 + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 - 3 = \text{πολ.}5 \\ A_1 - 3 = \text{πολ.}7 \end{array} \right\},$$

οπότε ο αριθμός  $A_1 - 3$  είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός  $A_1 - 3$  θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

$$35, 70, 105, 140, \dots,$$

Επομένως ο αριθμός  $A_1$  θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

$$38, 73, 108, 143, \dots$$

Αν  $A$  είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < A < 200 \Rightarrow \frac{60}{100} \cdot 100 < \frac{60}{100} \cdot A < \frac{60}{100} \cdot 200 \Rightarrow 60 < A_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό  $A_1$  είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός  $A_1$  είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι  $A_1 = 108$ , οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$A = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν  $2 \cdot 108 = 216$ , οπότε ο αριθμός  $K$  των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$K = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270.$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει  $180 + 270 = 450$  μαθητές και μαθήτριες.

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2005}]^0}, \quad B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}$$

Αν είναι  $A = B$ , να προσδιορίσετε την τιμή του  $x$ .

**Λύση**

Επειδή  $1 - (-1)^{2009} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$  έχουμε  $[1 - (-1)^{2009}]^0 = 1$ , οπότε:

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2005}]^0} = \frac{3^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{2^4} = 2^4 - 3^4 + x = x.$$

Επίσης έχουμε

$$B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2} = \frac{(4+1)^2}{5} + \frac{x}{2} = 5 + \frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$A = B \Leftrightarrow x = 5 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x = 10 + x \Leftrightarrow x = 10.$$

2. Το σημείο  $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$ , όπου  $\lambda$  θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων  $Oxy$ . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος  $\lambda$ ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $OA$ ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $OBA\Gamma$ , όπου  $B, \Gamma$  είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο  $A$  προς τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$ , αντίστοιχα.

**Λύση**

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda + 2 > 0 \text{ και } 4\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2 \text{ και } \lambda > \frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο  $\lambda$  είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι  $\lambda = 1$ .

(β) Για  $\lambda = 1$  είναι  $A(1, 3)$ , οπότε

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

(γ)

$$E(OAB\Gamma) = 1 \cdot 3 = 3$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρές  $AB = \alpha$ ,  $A\Delta = 2\alpha$  και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής  $O$  των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του  $\alpha$  το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

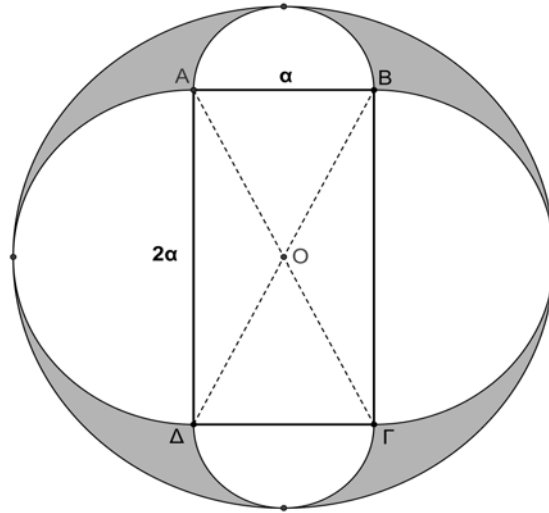
**Λύση**

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα  $\frac{3\alpha}{2}$ , τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα  $\frac{\alpha}{2}$  και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα  $\alpha$ .

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου  $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι  $2\alpha^2$ ,

τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων  $2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$  και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2 \cdot \frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \pi\alpha^2$ . Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = (\pi - 2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει  $\frac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$ , όπου  $\nu$  θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4 \cdot (-1)^{\nu+2}.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\frac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900 \Leftrightarrow \frac{45^\nu \cdot 4^\nu}{6^\nu} \Leftrightarrow \left(\frac{45 \cdot 4}{6}\right)^\nu = 900 \Leftrightarrow 30^\nu = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 \Leftrightarrow 30^\nu = 30^2 \Leftrightarrow 30^{\nu-2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι  $\nu - 2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 2$ , αφού για κάθε άλλη τιμή του  $\nu - 2$  η τιμή της δύναμης  $30^{\nu-2}$  δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$A = 2003 \cdot (-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} = 2003 \cdot 1 - (-1) + 4 \cdot 1 = 2003 + 1 + 4 = 2008..$$



## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο  $\frac{1}{8}$  ενός αριθμού  $x$  προσθέσουμε το  $\frac{1}{4}$  του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού  $x$ . Να βρεθεί ο αριθμός  $x$ .

### Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 1255 = x \Leftrightarrow x - \frac{x}{8} - \frac{x}{4} = 1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8} = 1255 \Leftrightarrow x = \frac{1255 \cdot 8}{5} = 2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους  $x, y$  και  $z$  που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq y \leq z, \\ xyz + xy + yz + zx + x + y + z &= 44. \end{aligned}$$

### Λύση

Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} xyz + xy + yz + zx + x + y + z &= 44 \\ \Leftrightarrow xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 &= 45 \\ \Leftrightarrow xy(z+1) + x(z+1) + y(z+1) + (z+1) &= 45 \\ \Leftrightarrow (xy + x + y + 1)(z+1) &= 45 \\ \Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) &= 45. \end{aligned} \tag{1}$$

Επειδή οι  $x, y, z$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και  $x \leq y \leq z$ , έπεται ότι:

$$1 \leq x+1 \leq y+1 \leq z+1. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) και αφού  $45 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$  προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$\begin{aligned} (x+1, y+1, z+1) &= (1, 3, 15) \text{ ή } (1, 5, 9) \text{ ή } (3, 3, 5) \text{ ή } (1, 1, 45) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (0, 2, 14) \text{ ή } (0, 4, 8) \text{ ή } (2, 2, 4) \text{ ή } (0, 0, 44). \end{aligned}$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:  
 “υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα”.  
 (Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

### Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ).

#### 1<sup>η</sup> περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στη πλευρά  $B\Gamma$  ώστε τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

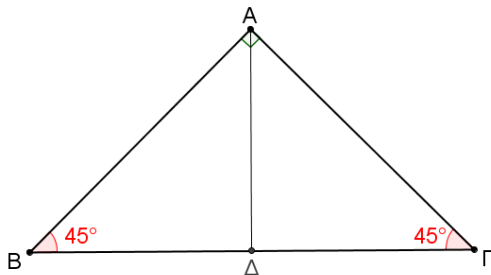
- Αν είναι  $B\hat{A}\Delta = \hat{B}$  και  $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}$  τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3):  
 $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{x}$  και  $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 2\hat{x}$ , (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου  $AB\Delta$ , οπότε από τη σχέση  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180$  καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$

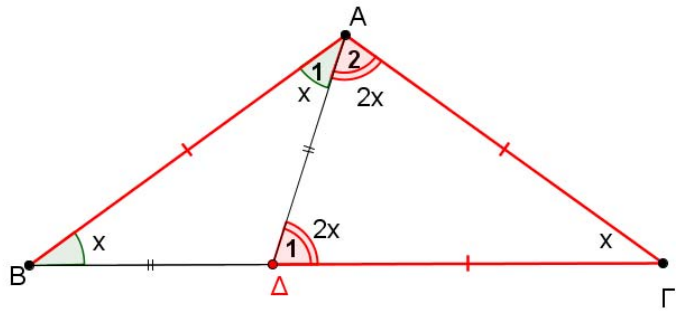
Στη περίπτωση αυτή είναι  $\hat{A} = 108^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^\circ$ .

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα  $\triangle ADB$  και  $\triangle AD\Gamma$  με ίσες γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}A}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma}$ , τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$ .

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα  $\triangle ADB$  και  $\triangle A\Gamma\Delta$  με ίσες γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}A}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$ , τότε προκύπτουν οι γωνίες  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες  $\hat{B} = \widehat{B\hat{A}\Delta}$  και  $\hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$  έπεται ότι:  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$ , οπότε θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ .



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

### 2<sup>η</sup> περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στη πλευρά  $AG$  ώστε τα τρίγωνα  $\triangle ADB$  και  $\triangle A\Gamma\Delta$  να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \hat{A}$  και  $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = \hat{\Gamma}$ , τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$$

$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $\triangle ADB$ , οπότε

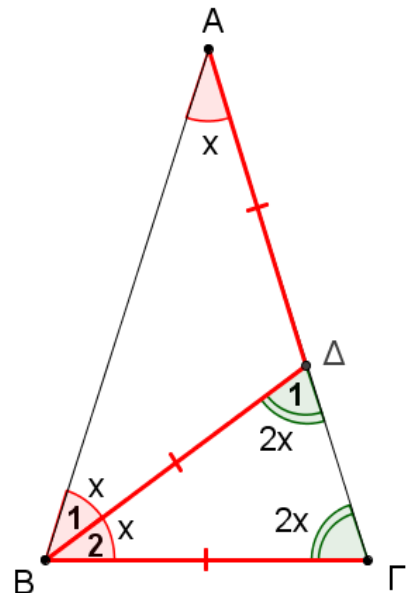
$$\hat{x} + \hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{x} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{x}.$$

Από τη σχέση  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$  καταλήγουμε στην εξίσωση:

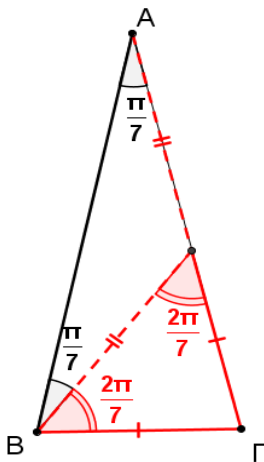
$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{A} = 36^\circ \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$



Σχήμα 4



Σχήμα 5

- Αν  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \hat{A} = x$  και  $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}B} = y$ , τότε θα έχουμε  $y = 2x$  και  $3x + 2y = \pi$ . οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{A} = \frac{\pi}{7}, \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $x$ ,  $y$  και  $z$  ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2, y^2 - z = x^2, z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α)  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ .

(β) Ένας τουλάχιστον από τους  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ισούται με 0.

**Λύση**

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) &= x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \\ x + y + z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι  $z = -(x + y)$  και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + [-(x + y)]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x + y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα  $x + y + z = 0$  προκύπτει ότι  $z = -x - y$ , οπότε η ισότητα  $x^2 - y = z^2$  γίνεται

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x + y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1. \end{aligned}$$

- Για  $y = 0$  λαμβάνουμε  $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$ , οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ ή } (1, 0, -1).$$

- Για  $y = -2x - 1$  από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των  $y, z$  στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0, -1, 1) \text{ ή } (-1, 1, 0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους  $x, y, z$  ισούται με 0.

**2<sup>ος</sup> τρόπος για το (β)**

Οι δεδομένες ισότητες  $x^2 - y = z^2$ ,  $y^2 - z = x^2$ ,  $z^2 - x = y^2$  με πολλαπλασιασμό επί  $y^2$ ,  $z^2$  και  $x^2$ , αντίστοιχα, γίνονται

$$(x^2 - z^2)y^2 = y^3, (y^2 - x^2)z^2 = z^3, (z^2 - y^2)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε  $xyz = 0$ , δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους  $x, y, z$  ισούται με 0.

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

### Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής:  $100x + 15$ , όπου  $x$  μη αρνητικός ακέραιος.

Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$\begin{aligned} S &= (100x_1 + 15) + (100x_2 + 15) + \dots + (100x_{15} + 15) = 100(x_1 + x_2 + \dots + x_{15}) + 15 \cdot 15 = \\ &= 25 \cdot 4(x_1 + x_2 + \dots + x_{15}) + 25 \cdot 9 = 25 \cdot [4(x_1 + x_2 + \dots + x_{15}) + 9], \end{aligned}$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

### Παρατήρηση

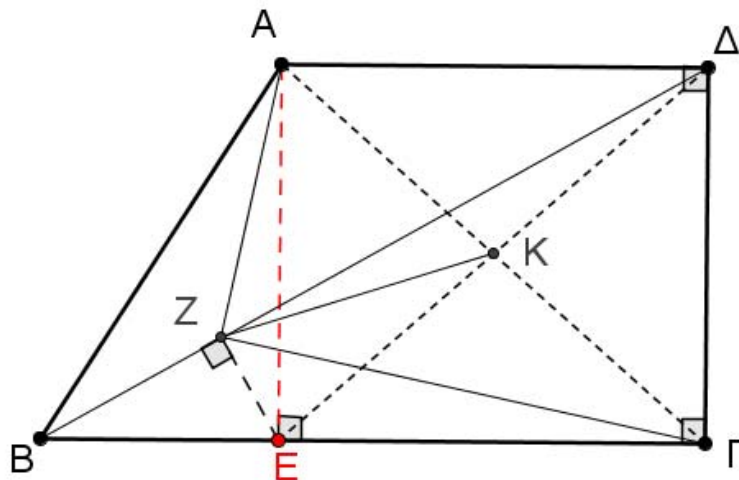
Η “κεντρική ιδέα” της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι “ $\alpha\beta$ ”, έχει τη μορφή  $100x + \alpha\beta$ .

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι “ $\alpha\beta\gamma$ ”, έχει τη μορφή  $1000x + \alpha\beta\gamma$ .

3. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AD \parallel B\Gamma$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ . Φέρουμε το ύψος  $AE$  και από το  $E$  κάθετη προς την διαγώνιο  $BD$  που την τέμνει στο σημείο  $Z$ . Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{AZ}\Gamma$ .

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Επειδή είναι  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  το τετράπλευρο  $A\hat{E}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$  είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο  $K$  είναι μέσον των  $A\Gamma$  και  $E\Delta$  και

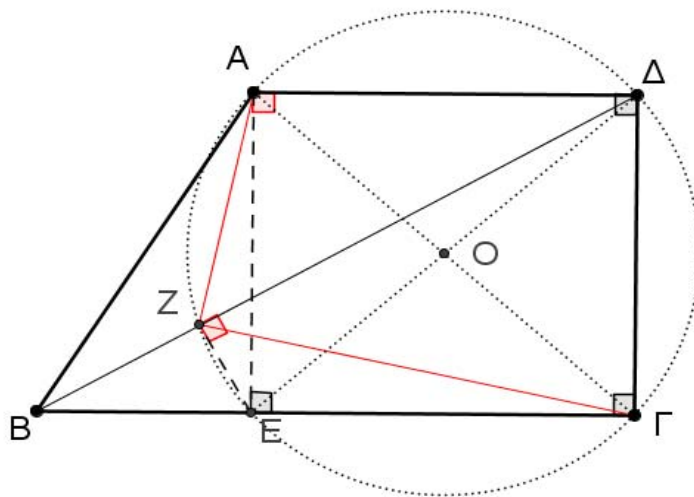
$$A\Gamma = E\Delta. \quad (1)$$


Σχήμα 6

Επειδή είναι  $EZ \perp B\Delta$  το τρίγωνο  $EZ\Delta$  είναι ορθογώνιο και η  $ZK$  είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ZK = \frac{E\Delta}{2}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι  $ZK = \frac{A\Gamma}{2}$ , δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου AZΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι  $\hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ .



Σχήμα 7

### 2<sup>ος</sup> Τρόπος

Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του  $O$ .

Εφόσον  $\hat{E}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ$ , το τετράπλευρο ΕΖΑΔ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία Α, Δ, Γ, Ε, Ζ είναι ομοκυκλικά. Άρα  $\hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 90^\circ$  (διότι βαίνει στη διάμετρο ΑΓ).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων  $(x, y, z)$  με  $x \geq y \geq z$  που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) &= 2, \\x + y + z &= 300.\end{aligned}$$

### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) &= 2 \Leftrightarrow x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y = 2 \\&\Leftrightarrow (x^2y - y^2x) - (x^2z - y^2z) + (z^2x - z^2y) = 2 \\&\Leftrightarrow xy(x-y) - z(x-y)(x+y) + z^2(x-y) = 2 \\&\Leftrightarrow (x-y)[xy - z(x+y) + z^2] = 2 \Leftrightarrow (x-y)(xy - zx - zy + z^2) = 2 \\&\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z) = 2.\end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι  $x-y, y-z, x-z$  είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση  $x \geq y \geq z$  έπεται ότι

$$x-y \geq 0 \text{ και } x-z \geq y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y) + (y-z) = x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές  $x-y, y-z, x-z$  είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x - y = 1, y - z = 1 \Leftrightarrow x = y + 1, z = y - 1,$$

όπου  $y$  θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x, y, z) = (k + 1, k, k - 1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση  $x + y + z = 300$  λαμβάνουμε:

$$(k + 1) + k + (k - 1) = 300 \Leftrightarrow 3k = 300 \Leftrightarrow k = 100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x, y, z) = (101, 100, 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Θεωρούμε τυχόν σημείο  $M$  εκτός του  $AB$  και τέτοιο ώστε η κάθετη από το  $M$  προς την ευθεία  $AB$  να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  τέτοια ώστε  $A\Gamma \perp AM$  και  $A\Gamma = AM$ ,  $B\Delta \perp MB$  και  $B\Delta = MB$ ,

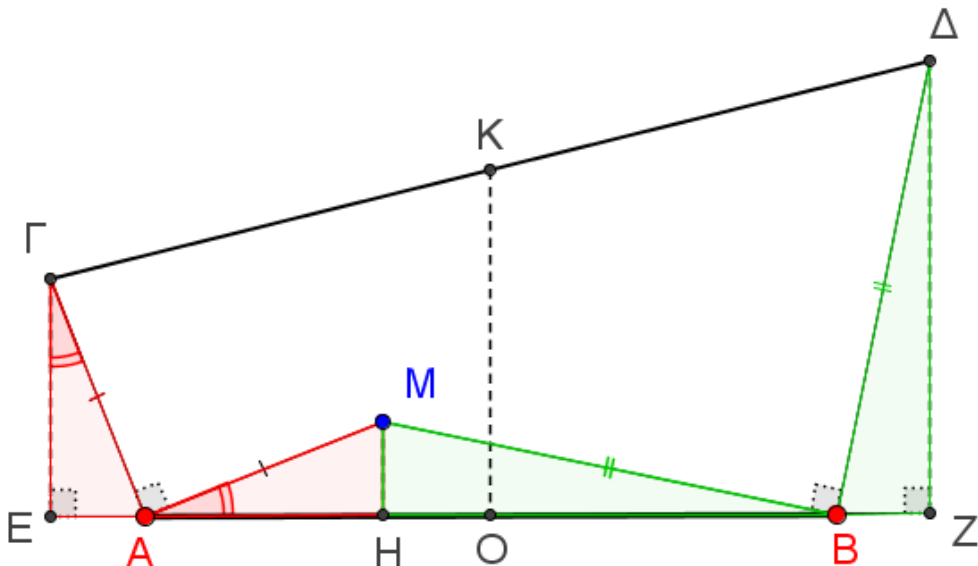
και επιπλέον τα σημεία  $\Gamma$ ,  $M$  και  $\Delta$  να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $AB$ . Να αποδείξετε ότι το μέσον  $K$  του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$  είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου  $M$ .

#### Λύση

Από τα σημεία  $\Gamma$ ,  $M$  και  $\Delta$  φέρουμε καθέτους  $\Gamma E$ ,  $MH$  και  $\Delta Z$  προς την ευθεία  $AB$ . Τότε οι οξείες γωνίες  $\hat{M}\hat{A}H$  και  $\hat{A}\hat{\Gamma}E$  έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες  $\hat{M}\hat{B}H$  και  $\hat{B}\hat{\Delta}Z$ . Έτσι από την υπόθεση  $A\Gamma = AM$  προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα  $AHM$ ,  $\Gamma EA$  είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma E = AH \quad (1)$$

$$EA = MH. \quad (2)$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση  $B\Delta = MB$  και  $B\Delta \perp MB$  προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα  $MHB$ ,  $BZ\Delta$  είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta Z = HB \quad (3)$$

$$BZ = MH. \quad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον  $K$  της  $\Gamma\Delta$  τέμνει την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $O$ . Τότε η  $KO$  θα είναι η διάμεσος του τραapeζίου  $\Gamma EZ\Delta$ , οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2}. \quad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{AH + HB}{2} = \frac{AB}{2}. \quad (6)$$

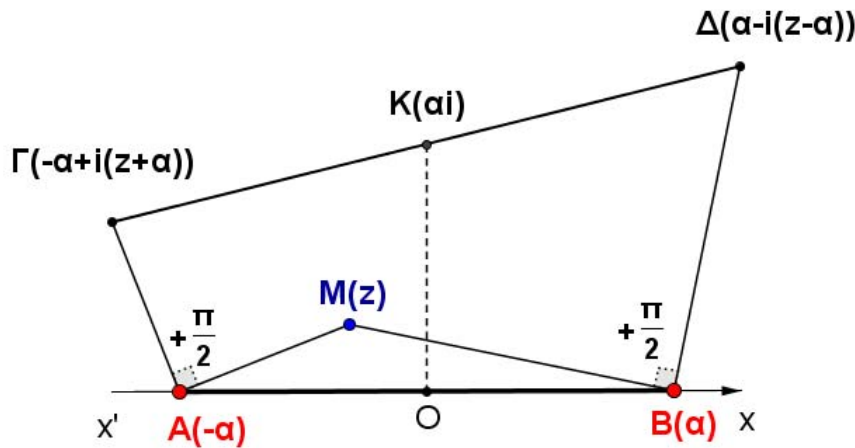
Επιπλέον, το μέσον  $O$  της  $EZ$  είναι και μέσον της  $AB$ , αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι  $EA = BZ$ , οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB. \quad (7)$$

Επομένως το σημείο  $K$  βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  σε απόσταση από το μέσον  $O$  ίση προς το μισό του  $AB$ . Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου  $M$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία  $AB$  ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο  $M$  είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z$ , το σημείο  $B$  είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού  $a$ , οπότε το σημείο  $A$  θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού  $-a$ . Τότε στο διάνυσμα  $\overline{AM}$  αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός  $z + a$  και επειδή είναι  $AG \perp AM$ ,  $AG = AM$  έπεται ότι  $(\overline{AM}, \overline{AG}) = 90^\circ$ , οπότε στο διάνυσμα  $\overline{AG}$  αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός  $i(z + a)$ . Επομένως στο διάνυσμα  $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$ , άρα και στο σημείο  $\Gamma$ , αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός  $-a + i(z + a)$ .



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι  $(\overline{BM}, \overline{BD}) = -90^\circ$ , καταλήγουμε ότι στο σημείο  $\Delta$  αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός  $a - i(z - a)$ .

Επομένως το μέσον  $K$  του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$  είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a + i(z + a) + a - i(z - a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο  $K$  είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού  $z$ , άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου  $M$ .

## Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$A = 4\alpha + 5\beta \text{ και } B = 3\alpha + 4\beta.$$

### Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$  και των αριθμών  $A$  και  $B$  ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος  $\delta$  είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών  $\alpha$ ,  $\beta$ . Τότε από τις σχέσεις  $\delta|\alpha$  και  $\delta|\beta$  λαμβάνουμε ότι ο  $\delta$  διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, οπότε

$$\delta|(4\alpha + 5\beta) = A \text{ και } \delta|(3\alpha + 4\beta) = B,$$

δηλαδή ο  $\delta$  είναι κοινός διαιρέτης των  $A$  και  $B$ .

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος  $\delta$  είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων  $A$  και  $B$ . Τότε από τις υποθέσεις  $\delta|A = 4\alpha + 5\beta$  και  $\delta|B = 3\alpha + 4\beta$  έπεται ότι  $\delta|A - B = \alpha + \beta$ , οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta|5(A - B) - A = \alpha \text{ και } \delta|A - 4(A - B) = \beta,$$

οπότε ο  $\delta$  είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$ .

Επομένως και οι αριθμοί  $A$  και  $B$  έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών  $A = n^2 - n + 1$  και  $B = n^2 + n + 1$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος.

### Λύση

Έχουμε  $A = n(n - 1) + 1$  και  $B = n(n + 1) + 1$ , οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων  $n(n - 1)$  και  $n(n + 1)$  είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι  $B - A = 2n > 0$ , οπότε  $A < B$ . Έστω  $A + 1, A + 3, \dots, A + (2\kappa - 1)$ , όπου  $\kappa$  θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών  $A$  και  $B$ . Τότε πρέπει

$$A + (2\kappa - 1) = B - 1,$$

δηλαδή

$$B - A = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών  $A$  και  $B$  βρίσκονται  $n$  άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι  $A + 1, A + 3, \dots, A + (2n - 1)$ ,

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = nA + [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^3 + n.$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων  $(x, y, z)$  με  $x \geq y \geq z$  που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

### Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:



$$\begin{aligned}
xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) &= x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 \\
&= xy(x-y) + (x-y)z^2 - (x^2 - y^2)z \\
&= (x-y)[xy + z^2 - xz - yz] \\
&= (x-y)[x(y-z) - z(y-z)] \\
&= (x-y)(y-z)(x-z).
\end{aligned}$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z) = 6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι  $x-y, y-z, x-z$  είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση  $x \geq y \geq z$  έπεται ότι  $x-y \geq 0$  και  $x-z \geq y-z > 0$ , και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές  $x-y, y-z, x-z$ , είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \quad (1)$$

$$\text{ή } x-y=2, y-z=1, x-z=3 \quad (2)$$

$$\text{ή } x-y=1, y-z=1, x-z=6 \quad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά, αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

$$x-y=1, y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, z=y-2,$$

όπου  $y$  θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακεραίων

$$(x, y, z) = (k+1, k, k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

$$(x, y, z) = (k+2, k, k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες  $(x, y, z) = (k+1, k, k-2), k \in \mathbb{Z}$ , έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S = (k+1)^2 + k^2 + (k-2)^2 = 3k^2 - 2k + 5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς  $k$  και έχει ελάχιστο για  $k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ . Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης  $S(k) = 3k^2 - 2k + 5$  εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του  $\frac{1}{3}$  και έχουμε  $S(0) = 5$  και  $S(1) = 6$ , οπότε η ελάχιστη τιμή του  $S$  λαμβάνεται για  $k=0$  από την τριάδα  $(x, y, z) = (1, 0, -2)$ .

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες  $(x, y, z) = (k+2, k, k-1), k \in \mathbb{Z}$ , έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S = (k+2)^2 + k^2 + (k-1)^2 = 3k^2 + 2k + 5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς  $k$  και έχει ελάχιστο για  $k = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ . Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης  $S(k) = 3k^2 + 2k + 5$  εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραι-

ους του  $\frac{1}{3}$  και έχουμε  $S(0) = 5$  και  $S(-1) = 6$ , οπότε η ελάχιστη τιμή του  $S$  λαμβάνεται για  $\kappa=0$  από την τριάδα  $(x, y, z) = (2, 0, -1)$ .

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες  $(x, y, z) = (1, 0, -2)$  και  $(x, y, z) = (2, 0, -1)$ .

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Θεωρούμε τυχόν σημείο  $M$  εκτός του  $AB$  και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία  $AB$  να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα  $AG$  και  $BD$  τέτοια ώστε  $AG \perp AM$  και  $AG = 2 \cdot AM$ ,  $BD \perp MB$  και  $BD = 2 \cdot MB$  και επιπλέον τα σημεία  $M$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $AB$ . Να αποδείξετε ότι το μέσον  $K$  του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$  είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου  $M$ .

### Λύση

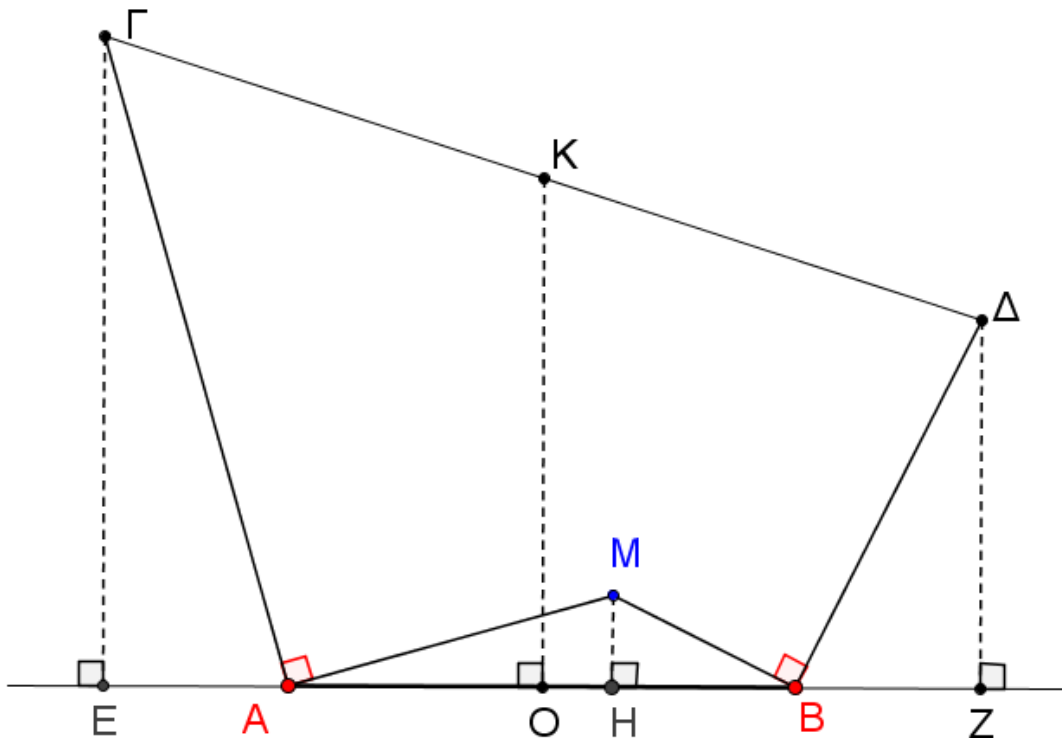
Από τα σημεία  $\Gamma$ ,  $M$  και  $\Delta$  φέρουμε καθέτους  $\Gamma E$ ,  $MH$  και  $\Delta Z$  προς την ευθεία  $AB$ . Τότε οι οξείες γωνίες  $\hat{M}\hat{A}\hat{H}$  και  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$  έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες  $\hat{M}\hat{B}\hat{H}$  και  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z}$ . Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα  $AHM$ ,  $\Gamma EA$  είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma E}{AH} = \frac{AE}{MH} = \frac{AG}{AM} = 2,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\Gamma E = 2 \cdot AH \quad (1)$$

$$EA = 2 \cdot MH. \quad (2)$$



Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα  $MHB$ ,  $BZ\Delta$  είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \quad (3)$$

$$BZ = 2 \cdot MH. \quad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον  $K$  της  $\Gamma\Delta$  τέμνει την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $O$ . Τότε η  $KO$  θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου  $\Gamma EZ\Delta$ , οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2}. \quad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB. \quad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον  $O$  της  $EZ$  είναι και μέσον της  $AB$ , αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι  $EA = BZ$ , οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB. \quad (7)$$

Επομένως το σημείο  $K$  βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  σε απόσταση από το μέσον  $O$  ίση προς το  $AB$ . Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου  $M$ .

### **Παρατήρηση**

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2009**



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**70<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Αν  $a = 4 - 2\frac{1}{5}$  και  $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$ , να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

**Λύση.**

Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

**Λύση**

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:  
 $\alpha = 4\rho$ , όπου ρ θετικός ακέραιος, ή  $\alpha = 4\rho + 1$  ή  $\alpha = 4\rho + 2$  ή  $\alpha = 4\rho + 3$   
όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι  $\alpha = 4\rho + 1$ , οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι  $\rho = 10$  ή  $\rho = 11$  ή  $\rho = 12$  και  $\alpha = 41$  ή  $\alpha = 45$  ή  $\alpha = 49$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  του οποίου οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  έχουν άθροισμα  $140^\circ$  και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που αντιστοιχούν στην πλευρά του  $B\Gamma$ .

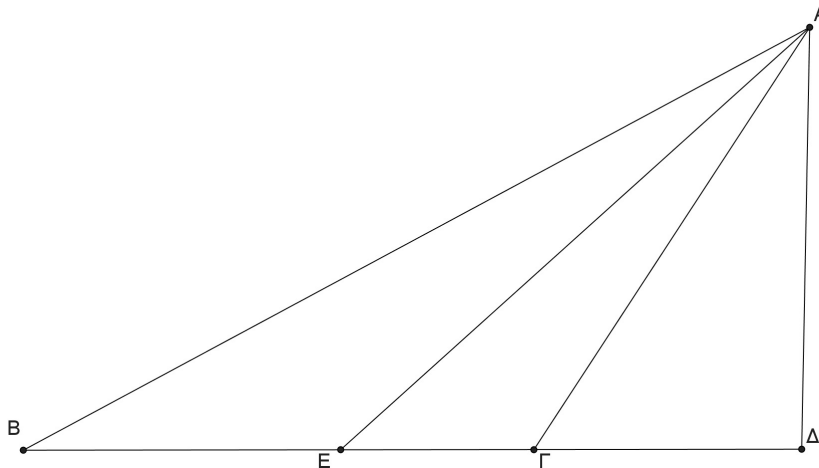
#### Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε:  $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ .

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε:  $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^\circ$ , οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^\circ \Rightarrow \lambda = 20^\circ.$$

Άρα είναι:  $\hat{B} = 20^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ .



Σχήμα 1

β) Έστω  $AD$  το ύψος και  $AE$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τότε το σημείο  $\Gamma$  βρίσκεται μεταξύ των σημείων  $B$  και  $\Delta$ , αφού διαφορετικά το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των  $180^\circ$ . Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = (90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A) + \frac{\hat{A}}{2}. \quad (1)$$

Επειδή είναι  $\hat{A} = 40^\circ$ ,  $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ , από τη σχέση (1) λαμβάνουμε  $\Delta\hat{A}E = 50^\circ$ .

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το  $\frac{1}{4}$  ασχολείται με το στίβο, το  $\frac{1}{5}$  ασχολείται με

το μπάσκετ, το  $\frac{1}{8}$  ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν

ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

α) Έχουμε  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{23}{40}$ . Όμως στα  $\frac{23}{40}$  των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι  $80 - 12 = 68$  μαθητές είναι τα  $\frac{40}{40} - \frac{23}{40} = \frac{17}{40}$  των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68 : \frac{17}{40} = 68 \cdot \frac{40}{17} = 4 \cdot 40 = 160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται  $160 \cdot \frac{1}{5} - 12 = 32 - 12 = 20$  μαθητές.

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

α) Αν  $x$  είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + 80 - 12 = x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x + 8x + 5x + 3200 - 480 = 40x \Leftrightarrow 17x = 2720 \Leftrightarrow x = 160.$$

β)  $\frac{x}{5} - 12 = \frac{160}{5} - 12 = 20$  μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Αν  $n$  είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^n + 2 \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3n}}{5}.$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot (-1)^n + 2 \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3n}}{5} = 4 \cdot (-1)^n + 2 \cdot \frac{(-1)}{5} - 7 \cdot \frac{[(-1)^3]^n}{5} \\ &= 4 \cdot (-1)^n - \frac{2}{5} - \frac{7 \cdot (-1)^n}{5} = \left(4 - \frac{7}{5}\right) \cdot (-1)^n - \frac{2}{5} = \frac{13 \cdot (-1)^n - 2}{5}, \end{aligned}$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν  $n$  άρτιος, τότε  $A = \frac{13 - 2}{5} = \frac{11}{5}$ .
- Αν  $n$  περιττός, τότε  $A = -3$ .

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Ο θετικός ακέραιος  $\alpha$  είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $\alpha$ .

**Λύση**

Αφού ο  $\alpha$  διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής  $\alpha = 5\lambda + 2$ , όπου  $\lambda$  μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο  $\lambda$  ήταν άρτιος, τότε ο  $\alpha$  επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο  $\lambda$  είναι περιττός, δηλαδή είναι  $\lambda = 2\kappa + 1$ , όπου  $\kappa$  μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5 \cdot (2\kappa + 1) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος  $\alpha$  διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του  $\alpha$  είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο  $\alpha$  έχει  $\kappa$  δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

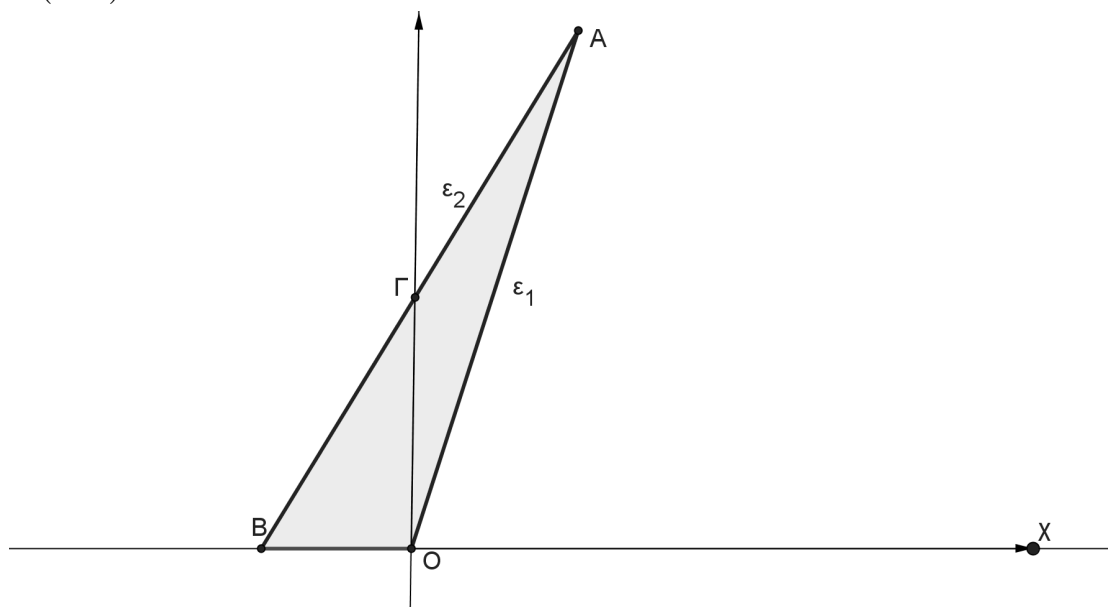
Δίνονται δυο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο A. Η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλη προς την ευθεία  $(\eta) : y = 2x$  και διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(0,6)$ .

**α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο A.

**β)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, A το κοινό σημείο των ευθειών και B το σημείο όπου η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $x'$ .

### Λύση

**α)** Η ευθεία  $\varepsilon_1$  έχει εξίσωση  $y = 4x$ , ενώ η ευθεία  $\varepsilon_2$  έχει εξίσωση  $y = 2x + \beta$ , αφού είναι παράλληλη με την  $(\eta)$ . Όμως διέρχεται από το σημείο  $B(0,6)$ , οπότε θα ισχύει  $6 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$ . Άρα η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_2$  είναι  $y = 2x + 6$ . Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το  $A(3,12)$ .



Σχήμα 2

**β)** Η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $B(-3,0)$ , οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

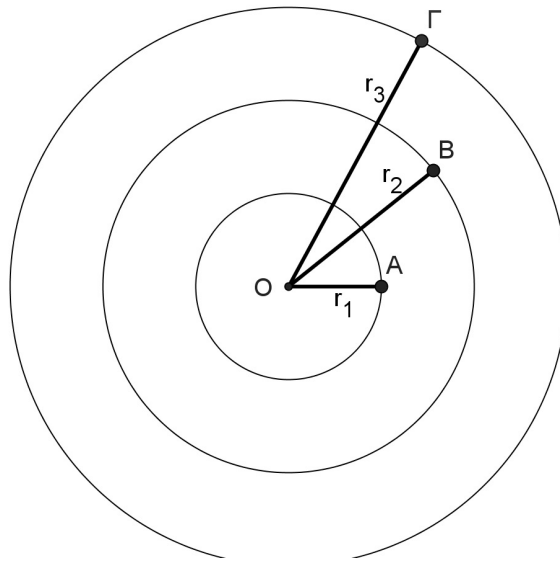


$$E(OAB) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο  $O$  και ακτίνες  $r_1, r_2, r_3$  με  $0 < r_1 < r_2 < r_3$ . Έστω  $\Delta_1$  ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου  $O$  και ακτίνες  $r_1, r_2$  και  $\Delta_2$  ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου  $O$  και ακτίνες  $r_2, r_3$ . Αν είναι  $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$  και  $r_3 = 3r_1$ , να βρείτε το λόγο  $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$ , όπου  $E(\Delta_1)$  και  $E(\Delta_2)$  είναι τα εμβαδά των δακτυλίων  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , αντίστοιχα.

**Λύση**



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{(r_3 - r_2)(r_3 + r_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \quad (1)$$

αφού δίνεται ότι  $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ . Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι  $r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}$ , οπότε,

λόγω τη σχέσης  $r_3 = 3r_1$  λαμβάνουμε  $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ . Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση  $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$  και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{\pi[(2r_1)^2 - r_1^2]}{\pi[(3r_1)^2 - (2r_1)^2]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

#### Λύση

Αν  $x$  είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Αν οι αριθμοί  $\mu$  και  $\nu$  είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος  $A = 2^\mu + 2^\nu$  είναι πολλαπλάσιο του 34.

#### Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$(2^2)^{\mu-2} + (2^2)^{\nu+2} - 2 \cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow (2^{\mu-2})^2 + (2^{\nu+2})^2 - 2 \cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow (2^{\mu-2} - 2^{\nu+2})^2 \leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$A = 2^\mu + 2^\nu = 2^{\nu+4} + 2^\nu = 2^\nu \cdot (2^4 + 1) = 17 \cdot 2^\nu = 34 \cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο  $\nu$  είναι θετικός ακέραιος.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $A\Delta$  ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία  $E$  και  $Z$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν  $\Delta E = \Delta Z$  και  $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Delta Z$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

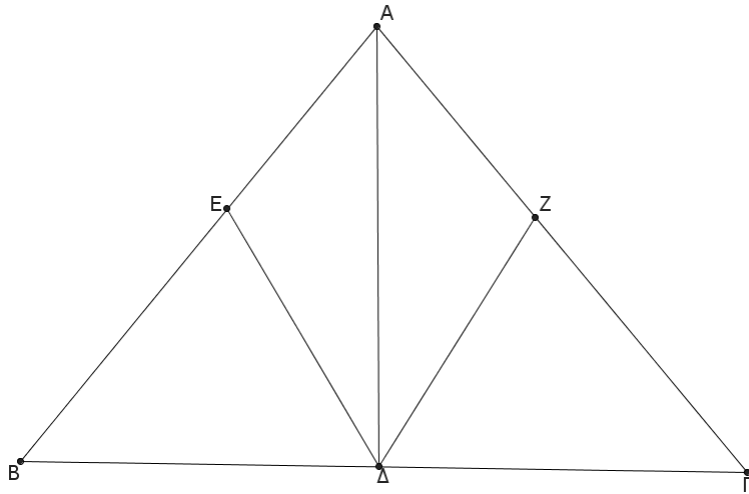
(β) Αν υπάρχουν σημεία  $E$  και  $Z$  στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το μέρος του  $A$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν  $\Delta E = \Delta Z$  και  $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Delta Z$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

#### Λύση

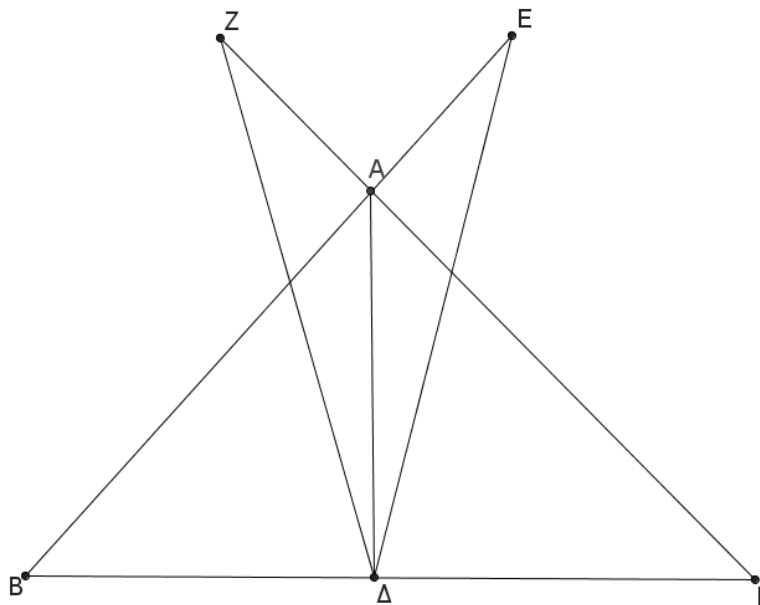
(α) Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $A\Delta Z$  έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ( $A\Delta = A\Delta, \Delta E = \Delta Z$ ) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες,  $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Delta Z$ . Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και  $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Delta Z$ , δηλαδή η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta \Gamma$ , τα οποία είναι ορθογώνια με  $\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta \Gamma = 90^\circ$  και έχουν την πλευρά  $A\Delta$  κοινή και τις οξείες γωνίες

$\hat{\Delta}AB$  και  $\hat{\Delta}AG$  ίσες. Άρα τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν και  $AB = A\Gamma$ , δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

**(β)** Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $A\Delta Z$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\hat{\Delta}AE = \hat{\Delta}AZ.$$

Επειδή οι γωνίες  $\hat{\Gamma}AE$  και  $\hat{B}AZ$  είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\hat{\Delta}AE - \hat{\Gamma}AE = \hat{\Delta}AZ - \hat{B}AZ \Rightarrow \hat{\Delta}AG = \hat{\Delta}AB,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα  $\hat{\Delta}ZA = \hat{\Delta}EA$ ,  
 οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι  
 $\Delta B = \Delta \Gamma$ , η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι  $AB = A\Gamma$ .  
 Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της  
 Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος,  
 τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία  
 δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις  
 ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή  
 (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία  
 σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες  
 ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος  
 μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη  
 λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την  
 οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για  
 να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση  
 αυτός ο ακέραιος αριθμός;

#### Λύση

Έστω  $x$ , ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι  
 δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις  
 αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

$$(1) \text{ A-B-}\Gamma \quad \frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 6 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$(2) \text{ B-A-}\Gamma \quad \frac{x}{4} + \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 8 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}$$

$$(3) \text{ A-}\Gamma\text{-B} \quad \frac{x}{3} - \frac{x-2}{6} + \frac{x-3}{4} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 9 - 4 \Leftrightarrow x = \frac{17}{5}$$

$$(4) \text{ B-}\Gamma\text{-A} \quad \frac{x}{4} - \frac{x-2}{6} + \frac{x-3}{3} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 12 - 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$(5) \text{ }\Gamma\text{-B-A} \quad \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3} - \frac{x}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$(6) \text{ }\Gamma\text{-A-B} \quad \frac{x}{3} + \frac{x-1}{4} - \frac{x}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια  $x = 4$  ώρες (περίπτωση  
**(4)**).

Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια  $x = 3$  ώρες  
 (περίπτωση **(6)**).

Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το  
 άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι  $x$  ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα  $\frac{x}{4}$  της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει  $x - 2$  ώρες και θα αδειάσει τα  $\frac{x-2}{6}$  της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει  $x - 3$  ώρες και θα γεμίσει τα  $\frac{x-3}{3}$  της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση (4).

Στη περίπτωση (6) (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι  $x$  ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα  $\frac{x}{3}$  της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η

βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει  $x - 1$  ώρες και θα γεμίσει τα  $\frac{x-1}{4}$  της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει  $x$  ώρες, και θα αδειάσει τα  $\frac{x}{6}$  της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση (6).

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (

Αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

#### Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα  $0 \leq (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$ .

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \quad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

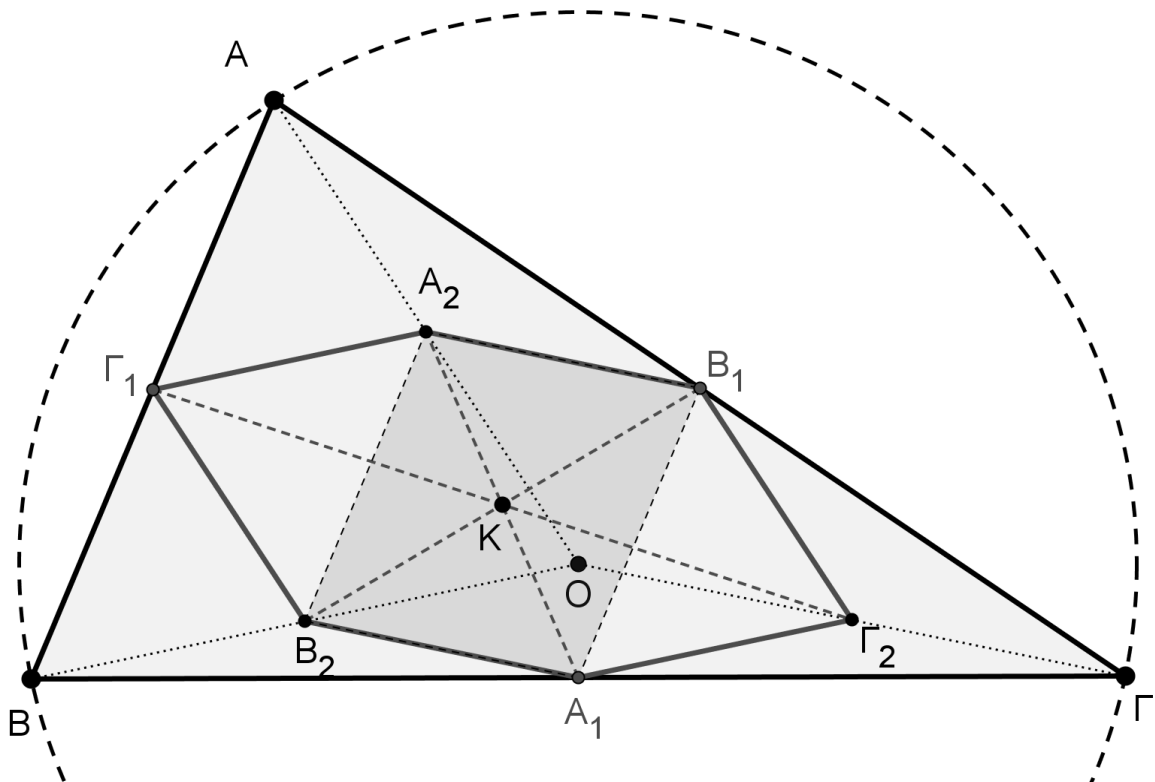
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**ΘΕΜΑ 2° .**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$ . Αν  $A_1, B_1, \Gamma_1$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  αντίστοιχα και  $A_2, B_2, \Gamma_2$  είναι τα μέσα των  $OA, OB, O\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο  $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$  έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγωνίες του  $A_1A_2, B_1B_2$  και  $\Gamma_1\Gamma_2$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

**Λύση**

Εφόσον  $O$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει:  $OA = OB = O\Gamma = R$ .



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα  $A_2B_1$  συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου  $OAG$ , άρα:

$$A_2B_1 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \quad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα  $A_1B_2$  συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου  $OB\Gamma$ , άρα:

$$A_1B_2 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \quad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με  $\frac{R}{2}$ .

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο  $A_1B_1A_2B_2$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγωνίες του θα διχοτομούνται στο σημείο  $K$ .

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο  $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο  $K$ .

### ΘΕΜΑ 3°.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  με  $x \geq 2009$  και  $y \geq -2009$  ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009} + \sqrt{y+2009} = \frac{x+y}{2} + 1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x-y+2}{2}.$$

#### Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι:  $x \geq 2009$  και  $y \geq -2009$ .

Αν θέσουμε  $\sqrt{x-2009} = a$  και  $\sqrt{y+2009} = b$ , τότε λαμβάνουμε  $x = a^2 + 2009$  και  $y = b^2 - 2009$ , από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση  $x + y = a^2 + b^2$ .

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a + b = \frac{a^2 + b^2}{2} + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a-1 = b-1 = 0 \Leftrightarrow a = b = 1,$$

οπότε θα είναι  $x = 2010, y = -2008$  και  $A = 2010$ .

### ΘΕΜΑ 4°

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z - 2x - y \\ (y+z)^3 = x - 2y - z \\ (z+x)^3 = y - 2z - x \end{cases} \quad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

#### Λύση

Θέτουμε  $x + y = \alpha$ ,  $y + z = \beta$  και  $z + x = \gamma$ , οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^3 + 2\alpha = \beta \\ \beta^3 + 2\beta = \gamma \\ \gamma^3 + 2\gamma = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha^2 + 2) = \beta \\ \beta(\beta^2 + 2) = \gamma \\ \gamma(\gamma^2 + 2) = \alpha \end{cases}$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2)(\gamma^2 + 2) = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2)(\gamma^2 + 2) = 1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι  $\alpha = 0$  τότε θα ισχύει:  $\beta = \gamma = 0$ .

Αν υποθέσουμε ότι  $\beta = 0$  τότε θα ισχύει:  $\alpha = \gamma = 0$ .

Αν υποθέσουμε ότι  $\gamma = 0$  τότε θα ισχύει:  $\alpha = \beta = 0$ .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .  
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1°

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι  $x, y$  που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015.$$

### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1) - 2y = 403. \quad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους  $x, y$  οι αριθμοί  $x(x+1)$  και  $2y$  είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους  $x(x+1) - 2y$  θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

### ΘΕΜΑ 2°

Για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f(x - f(y)) - f(y - f(x)) = 2f(f(x) - f(y)), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι  $f(x - f(x)) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου  $y$  το  $x$  και παίρνουμε:

$$f(x - f(x)) - f(x - f(x)) = 2f(f(x) - f(x)),$$

οπότε θα είναι  $f(0) = 0$ .

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου  $x$  το  $0$  και παίρνουμε:

$$f(0 - f(y)) - f(y - f(0)) = 2f(f(0) - f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα  $f(0) = 0$ , καταλήγουμε:

$$f(-f(y)) - f(y) = 2f(-f(y)) \Leftrightarrow f(-f(y)) = -f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου  $y$  το  $x$  και έχουμε τη σχέση:

$$f(-f(x)) = -f(x). \quad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου  $y$  το  $0$  και παίρνουμε:

$$f(x - f(0)) - f(0 - f(x)) = 2f(f(x) - f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα  $f(0) = 0$ , καταλήγουμε:

$$f(x) - f(-f(x)) = 2f(f(x)). \quad (2)$$



Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:  $f(f(x)) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου  $y$  το  $f(x)$  και  
 χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε  $f(x - f(x)) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### ΘΕΜΑ 3°.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής  $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu\text{-ψηφία}}$ , όπου  $\alpha$  είναι  
 θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του  
 αριθμού  $\alpha 00 \dots 00 \alpha$ , μεσολαβούν  $2\nu$  το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: “ή ένας  
 από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με  
 το 33”.

### Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής  $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu\text{-ψηφία}}$  διαιρείται με το

11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned} \alpha 00 \dots 00 \alpha &= \alpha \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + \dots + 0 \cdot 10^{2\nu} + \alpha \cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha \cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1 + 10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1 + 10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \dots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha \cdot \kappa. \end{aligned}$$

Έστω τώρα  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  τρεις οποιοδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής  
 $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu\text{-ψηφία}}$ . Θα αποδείξουμε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το

άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3”. (1)

Αν κάποιος από τους αριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει  
 η πρόταση.

Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής  $3k + 1$ , τότε προφανώς  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3m$

2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής  $3k + 2$ , τότε προφανώς  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής  $3k + 1$   
 και ένας τουλάχιστον της μορφής  $3k + 2$ , οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών  
 θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.

Επειδή καθένας από τους αριθμούς  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  της μορφής  $\overbrace{\alpha 00 \dots 00 \alpha}^{2\nu\text{-ψηφία}}$  διαιρείται με το  
 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

### ΘΕΜΑ 4°.

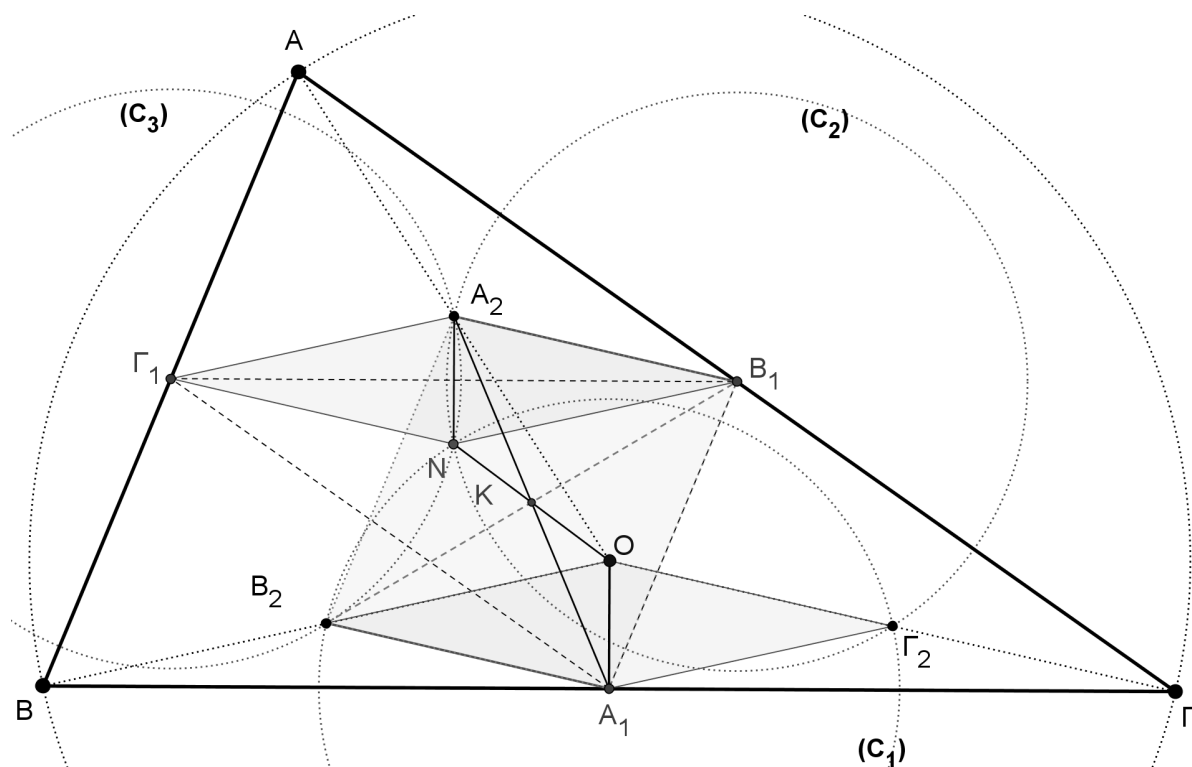
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$  και έστω  $A_1, B_1, \Gamma_1$  τα μέσα  
 των πλευρών του  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους  $C_1(A_1, \frac{R}{2})$ ,

$C_2(B_1, \frac{R}{2})$  και  $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ . Αποδείξτε ότι οι κύκλοι  $C_1, C_2, C_3$  περνάνε από το ίδιο

σημείο (έστω  $N$ ) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα  $A_2, B_2, \Gamma_2$  των  $OA, OB, O\Gamma$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι  $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$  και  $ON$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

### Λύση

Το τρίγωνο  $A_1B_1\Gamma_1$  είναι όμοιο με το τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι  $\lambda = \frac{1}{2}$ , οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $A_1B_1\Gamma_1$  θα έχει ακτίνα  $\frac{R}{2}$ .



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου  $A_1B_1\Gamma_1$  και ακτίνα  $\frac{R}{2}$  θα περνάνε από το περίκεντρο  $N$  του τριγώνου  $A_1B_1\Gamma_1$ . (Το σημείο  $N$  είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου  $AB\Gamma$ )

Αν  $A_2, B_2, \Gamma_2$  είναι τα μέσα των  $OA, OB, O\Gamma$  αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα  $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$  είναι διάμεσοι προς την υποτεινούσα των ορθογωνίων τριγώνων  $OA_1B, OA_1\Gamma, OB_1A, OB_1\Gamma, O\Gamma_1A$  και  $O\Gamma_1B$ .)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων  $C_1(A_1, \frac{R}{2}), C_2(B_1, \frac{R}{2})$  και  $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$  είναι τα σημεία  $A_2, B_2, \Gamma_2$ .

Τα τετράπλευρα  $\Gamma_1 N B_1 A_2$  και  $O B_2 A_1 \Gamma_2$  είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους  $\frac{R}{2}$  και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ( $A_2 B_1 \parallel B_2 A_1, \Gamma_1 A_2 \parallel A_1 \Gamma_2, \dots$ ).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο  $A_2 O A_1 N$  είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η  $A_1 A_2$  περνά από το μέσο  $K$  του  $ON$  που είναι μέσο και του  $A_1 A_2$ .

Το τετράπλευρο  $\Gamma_1 A_2 \Gamma_2 A_1$  είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η  $\Gamma_1 \Gamma_2$  περνά από το μέσο  $K$  του  $A_1 A_2$  που είναι μέσο και του  $\Gamma_1 \Gamma_2$ .

Τέλος το τετράπλευρο  $B_1 \Gamma_1 B_2 \Gamma_2$  είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η  $B_1 B_2$  και περνά από το μέσο  $K$  του  $\Gamma_1 \Gamma_2$  που είναι μέσο και του  $B_1 B_2$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2010**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
71<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω  $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$  και  $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$ .

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί  $x$  και  $y$ .

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο  $A$ , του οποίου οι αριθμοί  $x$  και  $y$  είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4 \cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2 = 4 \cdot 25 - 64 + 7 \cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του  $A$  αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών  $x, y$ . Επειδή είναι  $\text{ΜΚΔ}(33, 99) = 33$ , έπεται ότι θα είναι  $A = 33$ .

2. Έστω  $\alpha, \beta$  φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον  $\alpha$  και διαιρέτη τον  $\beta$  δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός  $\alpha$ , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο  $\alpha$  είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός  $\beta$  είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακεραίων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{r} 16 \quad 32 \quad 248 \\ 16 \quad 0 \quad 8 \\ 0 \quad 0 \quad 8 \end{array},$$

οπότε είναι  $\beta = \text{ΜΚΔ}(16, 32, 248) = 8$ .

Από την υπόθεση έχουμε:  $\alpha = 8 \cdot 6 + \nu = 48 + \nu$ , όπου  $\nu$  ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του  $\nu$  στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για  $\nu = 1$ , ο αριθμός  $\alpha = 49$  που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε  $\alpha = 49$  και  $\beta = 8$ .

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $I$ . Η παράλληλη από το σημείο  $I$  προς την πλευρά  $AB$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $\Delta$  ενώ η παράλληλη από το σημείο  $I$  προς την πλευρά  $AG$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Αν είναι  $\hat{I}\Delta\Gamma = 70^\circ$  και  $\hat{I}\epsilon\Gamma = 130^\circ$ , να βρεθούν:

- α) η γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 β) οι γωνίες  $\hat{B}\hat{I}\Delta$  και  $\hat{E}\hat{I}\Gamma$ .

#### Λύση

α. Εφόσον  $I\Delta // AB$  θα ισχύει:  $\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = 70^\circ$ , (ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων  $I\Delta, AB$  τεμνομένων από την  $B\Delta$ ).

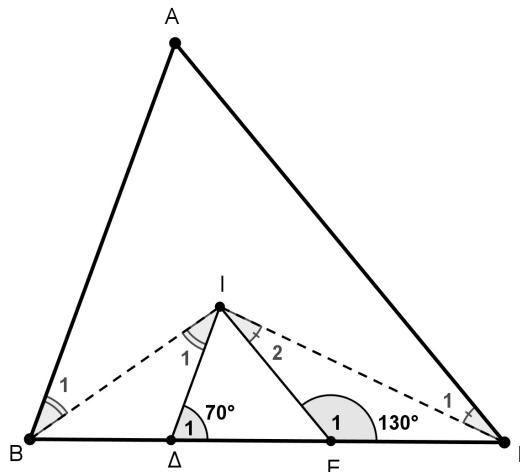
Επειδή είναι  $IE // AG$ , θα ισχύει:  $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ . (Οι γωνίες  $\hat{\Gamma}, \hat{E}_1$  είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων  $IE, AG$  τεμνομένων από την  $EG$ ).

Οι γωνίες  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$  είναι γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ , οπότε θα ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

β. Επειδή η  $I\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , θα ισχύει:  $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$ .

Επίσης, επειδή  $I\Delta // AB$ , θα ισχύει:  $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 = 35^\circ$ , γιατί οι γωνίες  $\hat{I}_1, \hat{B}_1$  είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες  $I\Delta, AB$  που τέμνονται από την  $IB$ .



Σχήμα 1

Εφόσον  $I\Gamma$  διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , θα ισχύει:  $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ .

Επίσης είναι  $IE // AG$ , οπότε θα ισχύει:  $\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^\circ$ , αφού οι γωνίες  $\hat{I}_2, \hat{\Gamma}_1$  είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες  $IE, AG$  που τέμνονται από την  $I\Gamma$ .

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

**β.** Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

**Λύση**

**α.** Επειδή θεωρούμε ότι τα  $120+80=200$  ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ίδιας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι  $2600:200=13$  κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν  $120 \cdot 13 = 1560$  κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει  $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$  κιλά λάδι.

**β.** Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν  $x$  κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει  $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$  κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν  $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$  κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά  $120 \cdot 15 = 1800$  κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει  $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$  κιλά λάδι.

### Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν  $x + y = 3 \cdot (-2)^2$  και  $y - w = \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$ , να βρεθεί η τιμή της

παράστασης:  $A = 7x + 10y - 3w - 87$ .

#### Λύση

Έχουμε  $x + y = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$  και

$$\begin{aligned} y - w &= \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4} = \left( -\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left( -\frac{3}{5} \right)^{-24} = \left( -\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left( -\frac{5}{3} \right)^{24} \\ &= \left[ \left( -\frac{3}{5} \right) \cdot \left( -\frac{5}{3} \right) \right]^{24} = 1^{24} = 1. \end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$\begin{aligned} A &= 7x + 10y - 3w - 87 = 7x + 7y + 3y - 3w - 87 \\ &= 7(x + y) + 3(y - w) - 87 = 7 \cdot 12 + 3 \cdot 1 - 87 = 84 + 3 - 87 = 0. \end{aligned}$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

#### Λύση

Έστω  $\overline{xyzw} = 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot z + w$  ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το (α) θα είναι  $w = 0$  ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το (β) θα είναι  $z = 0$  ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το (γ) θα είναι  $y = 1$  ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100}, \overline{x124}, \overline{x148}, \overline{x500}, \overline{x524}, \overline{x548}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς 4500, 4524, 4548, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

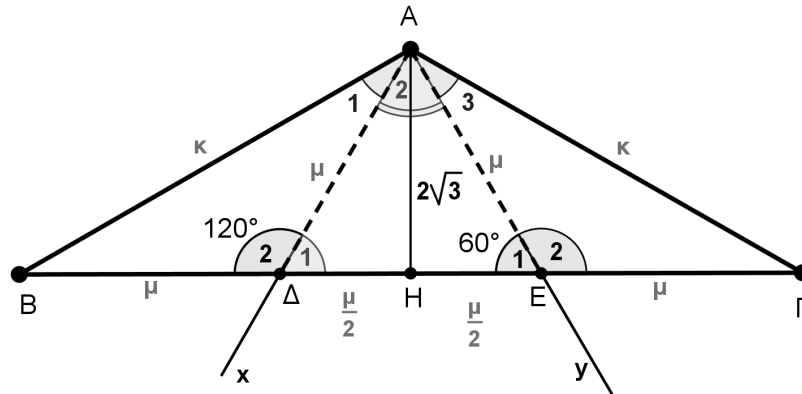
3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Στο εσωτερικό της γωνίας  $A$  φέρουμε ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  κάθετες στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα. Αν  $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$ ,  $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$  και το ύψος  $AH$  έχει μήκος  $2\sqrt{3}$  μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ .



**Λύση**

**α.** Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι παραπληρωματική της γωνίας  $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}\hat{\Delta}B = 120^\circ$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}_1 = 60^\circ$ . Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι  $\hat{E}_1 = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

**β.** Εφόσον οι ημιευθείες  $A\Delta$  ( $Ax$ ) και  $AE$  ( $Ay$ ) είναι κάθετες προς τις  $A\Gamma$  και  $AB$ , θα ισχύει:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} - 90^\circ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ .

Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AE\Gamma$  έχουν:  $A\Delta = AE$  (από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Delta E$ ),  $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2 = 120^\circ$  και  $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 30^\circ$ . Επομένως τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $AE\Gamma$  είναι ίσα και συνεπώς  $AB = A\Gamma$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα  $AEB$  και  $A\Delta\Gamma$  που έχουν  $\hat{A}\hat{E}B = 60^\circ = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , οπότε θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ , δηλαδή  $AB\Gamma$  ισοσκελές.

**γ.** Έστω  $\mu$  το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου  $A\Delta E$  και  $\kappa$  το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AH\Delta$  έχουμε:

$$A\Delta^2 = AH^2 + \Delta H^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AHB$  έχουμε:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $12 + 8\sqrt{3}$ .

Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι  $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ .

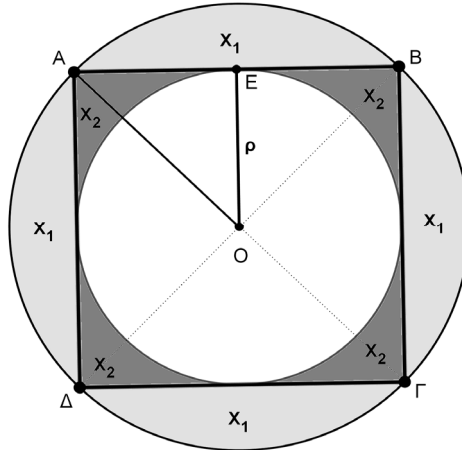
**4.** Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $2\rho$ . Ονομάζουμε  $X_1$  το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου  $C(O, \rho A)$  που ορίζονται από τις χορδές  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta A$ . Επίσης ονομάζουμε  $X_2$  το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εσωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

**α.** Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου  $\Delta(O, \rho, OA)$  που ορίζεται από τους κύκλους  $C(O, \rho)$  και  $C(O, OA)$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά  $E(X_1)$  και  $E(X_2)$  των χωρίων  $X_1$  και  $X_2$ ,

αντίστοιχα έχουν λόγο  $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$  μεγαλύτερο του  $\frac{13}{5}$ .

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα  $x$  του κύκλου  $C(O, x)$  που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο  $\Delta(O, \rho, OA)$  σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

### Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $OAE$  με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε  $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$ , οπότε είναι

$$E(\Delta(O, \rho, OA)) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου  $X_1$  προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho\sqrt{2}$ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ .

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου  $X_2$  προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$ , δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι  $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$  και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3,1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι  $\pi \cong 3,14$ .

(γ) Θα πρέπει να είναι  $\rho < x < \rho\sqrt{2}$  και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[(\rho\sqrt{2})^2 - x^2\right] = \pi(x^2 - \rho^2) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

### Λύση

Η εξίσωση  $x^2 - 5x = 14$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x(x-5) = 14$ . Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο  $x$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ . Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2 - 5x - 14 = 0, \quad \text{με } \alpha = 1, \beta = -5, \gamma = -14,$$

οπότε είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81$  και οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x = 7$  ή  $x = -2$ .

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4} \Leftrightarrow 2x - 2 + x^2 - 1 < x^2 - x \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η  $x = -2$ .

2. Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

### Λύση

$$\begin{aligned} A &= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4 \\ &= (\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2) - (\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta^3\gamma^2 + \beta^4\gamma^2) - (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^4) \\ &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \beta^2\gamma^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2\gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2) = [\alpha^2 - (\beta\gamma)^2][(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] \\ &= (\alpha + \beta\gamma)(\alpha - \beta\gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

### Λύση

Αν θέσουμε  $\frac{1}{y} = w$  και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x - 8w = 2 \\ x - 4w = 13 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ x = 13 + 4w \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 2 + 8w = 13 + 4w \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 8w - 4w = 13 - 2 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8w \\ 4w = 11 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 8 \cdot \frac{11}{4} \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2 \cdot 11 \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 24 \\ w = \frac{11}{4} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x, y) = \left(24, \frac{4}{11}\right)$

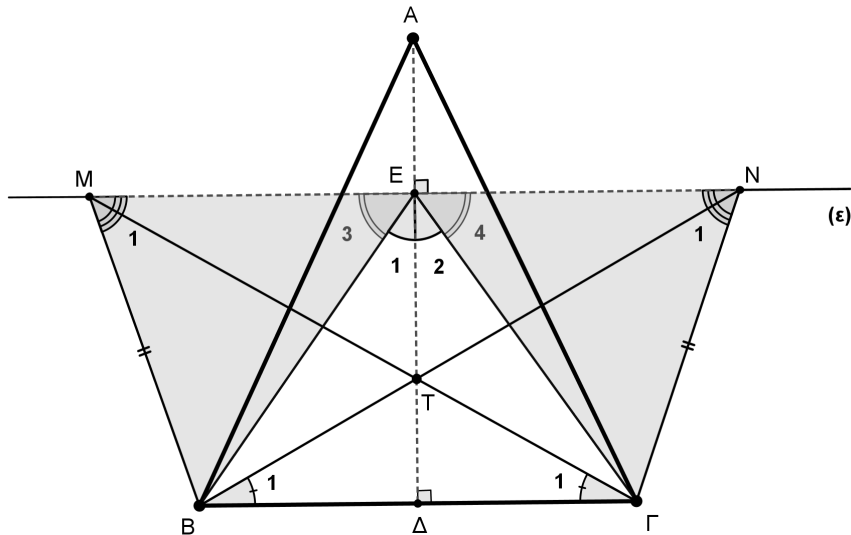
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ . Από τυχόν σημείο  $E$  του ύψους  $A\Delta$  θεωρούμε ευθεία  $(\varepsilon)$  παράλληλη στη  $B\Gamma$ . Πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$  θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία  $M, N$  έτσι ώστε  $EM = EN$  και  $MB < M\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Gamma$  και  $NB$  τέμνονται πάνω στο ύψος  $A\Delta$ .

#### Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta \Gamma$  είναι ίσα διότι έχουν τις υποτεινουσες ( $AB = A\Gamma$ ) και δύο οξείες γωνίες ( $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ) ίσες. Άρα  $\Delta B = \Delta \Gamma$ , δηλαδή το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ .

Τα τρίγωνα τώρα  $E\Delta B$  και  $E\Delta \Gamma$  είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ( $E\Delta$  κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα  $\Delta B = \Delta \Gamma$ ). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν  $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$  και  $EB = E\Gamma$ .

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει  $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$  γιατί οι γωνίες  $\hat{E}_3, \hat{E}_4$  είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ .



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα  $EMB$  και  $ENG$  είναι ίσα γιατί έχουν:

1.  $EM = EN$  (από τα δεδομένα της άσκησης).
2.  $EB = E\Gamma$  (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων  $E\Delta B$  και  $E\Delta \Gamma$ ).

3.  $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$  (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ ).

Άρα θα έχουν  $MB = NG$  και  $EMB = ENG$ .

Τα τρίγωνα  $MNB$  και  $MNG$  είναι ίσα διότι έχουν:

1.  $MN = MN$  (η πλευρά  $MN$  είναι κοινή).
  2.  $MB = NG$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ ).
  3.  $EMB = ENG$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ ).
- Άρα θα έχουν και  $MG = NB$ .

Τα τρίγωνα τέλος  $MBG$  και  $NBG$  είναι ίσα γιατί έχουν:

1.  $BG = BG$  (η πλευρά  $BG$  είναι κοινή)
2.  $MB = NG$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ )
3.  $M\hat{B}G = M\hat{B}E + E\hat{B}G = N\hat{G}E + E\hat{G}B = N\hat{G}B$

Άρα θα έχουν και  $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ .

Αν τώρα συμβολίσουμε με  $T$  το σημείο τομής των  $MG$  και  $NB$ , σε συνδυασμό με την ισότητα  $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ , συμπεραίνουμε ότι η  $T\Delta$  είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $TBG$ , δηλαδή η  $T\Delta$  είναι κάθετη προς τη  $BG$  στο σημείο  $\Delta$ . Άρα το σημείο  $T$ , θα ανήκει στο ύψος  $A\Delta$ .

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y, z$  ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y - z} &= x - 2 \\ \sqrt{y^2 - z - x} &= y - 2 \\ \sqrt{z^2 - x - y} &= z - 2,\end{aligned}$$

να αποδείξετε ότι  $x + y + z = 6$  και να προσδιορίσετε τους αριθμούς  $x, y, z$ .

### Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί:  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$  και  $z \geq 2$ , αλλά και οι περιορισμοί  $x^2 \geq y + z$ ,  $y^2 \geq z + x$  και  $z^2 \geq x + y$ . Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{array} \right\}, \quad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:  $x + y + z = 6$ .

Οι αριθμοί  $x, y, z$  προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array} \right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$  και  $z \geq 2$  αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω  $x > 2$ , τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι  $x + y + z > 6$ , που είναι άτοπο. Άρα θα είναι  $x = y = z = 2$ .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι κύκλοι  $c_1(A, AB)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $R_1 = AB$ ) και  $c_2(A, A\Gamma)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $R_2 = A\Gamma$ ). Ο κύκλος  $c_1(A, AB)$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Ο κύκλος  $c_2(A, A\Gamma)$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο σημείο  $N$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι τετράγωνο.

### Λύση

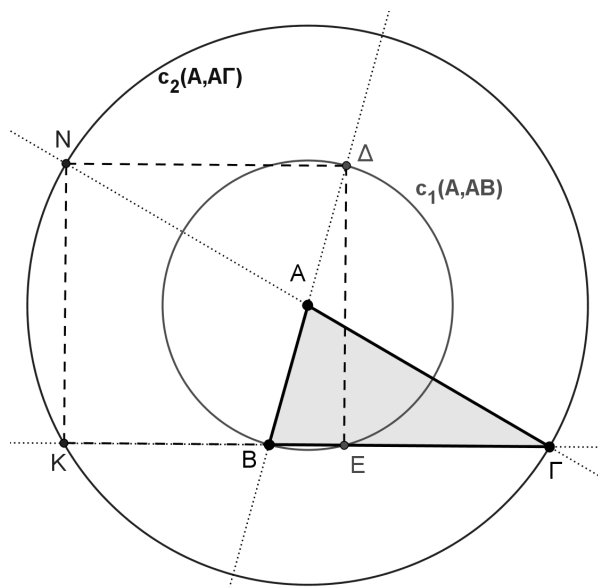
**α.** Η  $B\Delta$  (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου  $c_1(A, AB)$ , οπότε  $A$  είναι το μέσο του  $B\Delta$  και  $\hat{B}\hat{E}\Delta = 90^\circ$ .

Η  $\Gamma N$  (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου  $c_2(A, A\Gamma)$ , οπότε  $A$  είναι το μέσο του  $\Gamma N$  και  $\hat{\Gamma}\hat{K}N = 90^\circ$ .

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο  $N\Delta\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε  $N\Delta \parallel B\Gamma$ .

Από την ισότητα  $\hat{B}\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{K}N = 90^\circ$  προκύπτει ότι οι ευθείες  $NK$  και  $\Delta E$  είναι κάθετες προς την ευθεία  $B\Gamma$ , οπότε θα είναι  $NK \parallel \Delta E$ .

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα  $\hat{B}\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{K}N = 90^\circ$  καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $NK\Gamma$  ισχύει  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία  $\Gamma$  θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$KN = \frac{N\Gamma}{2} = A\Gamma = B\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας  $N\Delta = B\Gamma$ , συμπεραίνουμε ότι  $KN = N\Delta$ , δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου  $\Delta EKN$  είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

**3.** Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει ότι  $x + y = 4$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

**Λύση**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{x} + \frac{4y^2 + 4y + 1}{y} \geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y) + 8 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4,$$

αν θέσουμε  $x+y=4$ , η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 4.$$

Η ισότητα ισχύει για  $x=y=2$ .

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

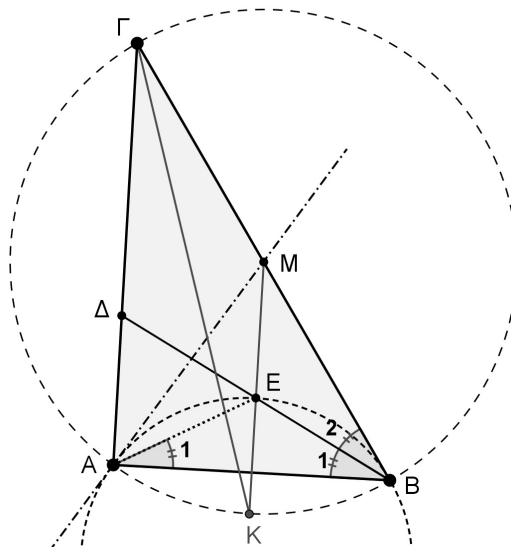
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq 1 \Leftrightarrow xy \leq 4 \Leftrightarrow x(4-x) \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για  $x=y=2$ , οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για  $x=y=2$ .

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) και έστω  $E$  το μέσο της διχοτόμου  $B\Delta$ . Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AEB$  στο σημείο  $A$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $ME$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### Λύση

Επειδή  $E$  είναι το μέσο της υποτείνουσας  $B\Delta$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Delta$ , θα ισχύει:





## Σχήμα 6

$EA = EB$ . Άρα το σημείο  $E$  ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$  και  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ .

Επειδή η  $BD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , θα ισχύει  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$  και αφού  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ , καταλήγουμε στην ισότητα  $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ . Άρα η  $GB$  είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AEB$  και κατά συνέπεια  $MA = MB$ , δηλαδή το σημείο  $M$  ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες  $M\hat{A}E$  και  $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$  είναι και οι δύο οξείες και η  $M\hat{A}E$  είναι γωνία χορδής - εφαπτομένης, ενώ η  $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$  είναι εγγεγραμμένη στο τόξο  $AE$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AEB$ . Επομένως θα είναι  $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$ , οπότε  $M\hat{A}B = \hat{B}$  και το τρίγωνο  $AMB$  είναι ισοσκελές με  $MA = MB$ , δηλαδή το σημείο  $M$  ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$ .

Το σημείο  $M$  είναι το μέσο της υποτεινούσας  $B\Gamma$ , οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Τελικά η  $ME$  είναι η μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$ , οπότε θα διέρχεται από το μέσο  $K$  του τόξου  $AB$ , από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(2x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = 7(x^2 - 1)^3.$$

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Αν θέσουμε  $a = 2x^2 + 3x + 1$ ,  $b = x^2 + 3x + 2$ , τότε  $a - b = x^2 - 1$  και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 = 7(a - b)^3 &\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 7(a - b)^3 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 7a^2 + 14ab - 7b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(a - b)(6a^2 - 15ab + 6b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \text{ ή } a = 2b \text{ ή } 2a = b \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ή } -3x - 3 = 0 \text{ ή } 3x^2 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1. \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας  $(x + 1)^3$ , οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

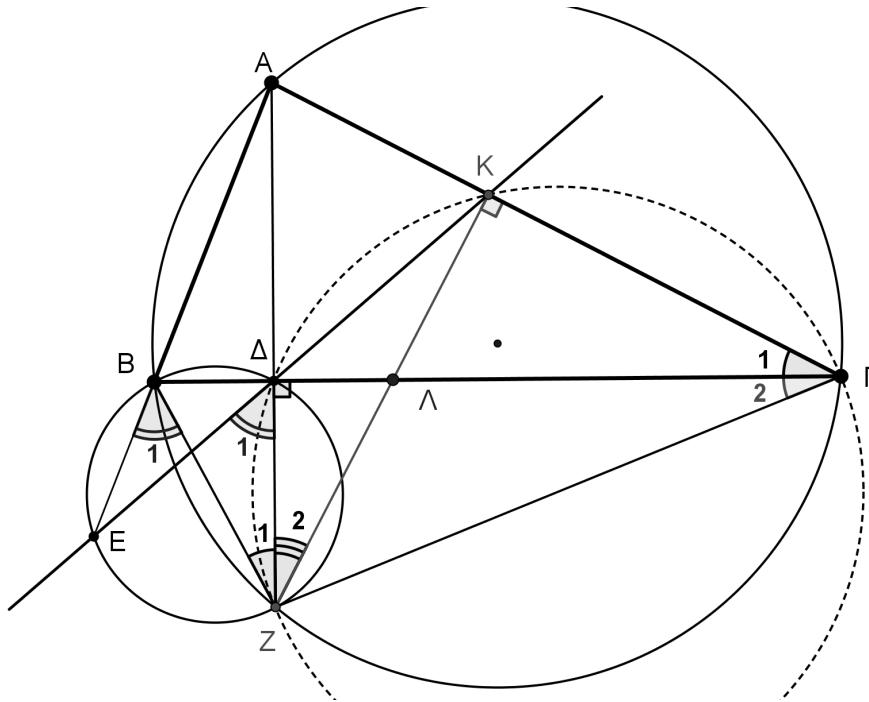
$$\begin{aligned} (x + 1)^3 \left[ (2x + 1)^3 - (x + 2)^3 - 7(x - 1)^3 \right] &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \\ \text{ή } 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - x^3 - 6x^2 - 12x - 8 - 7x^3 + 21x^2 - 21x + 7 &= 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } 27x^2 - 27x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (τριπλή ρίζα)} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1. \end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Το ύψος του  $A\Delta$  τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο  $Z$  και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Delta Z$  τέμνει την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $E$ . Αν η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $K$  και η ευθεία  $ZK$  την  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Lambda$ , να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Delta$  είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $B\Lambda$ .

**Λύση**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $ABZ\Gamma$  έχουμε:  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$ .

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Delta ZE$  έχουμε:  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ .



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$ , οπότε το τετράπλευρο  $\Delta K \Gamma Z$  είναι εγγράψιμο. Άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$ .

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $ABZ\Gamma$  έχουμε:  $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$ .

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε:  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ , δηλαδή στο τρίγωνο  $BZ\Lambda$  η  $Z\Delta$  είναι ύψος και διχοτόμος.

**3.** Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν  $2^m$ , όπου  $m$  θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

- α.** Αν ο θετικός ακέραιος  $m$  είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

### Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1<sup>ο</sup> γύρο συμμετέχουν  $2^m$  αθλητές, γίνονται  $2^{m-1}$  αγώνες και ανακηρύσσονται  $2^{m-1}$  νικητές.

Στο 2<sup>ο</sup> γύρο συμμετέχουν  $2^{m-1}$  αθλητές, γίνονται  $2^{m-2}$  αγώνες και ανακηρύσσονται  $2^{m-2}$  νικητές.

Στο 3<sup>ο</sup> γύρο συμμετέχουν  $2^{m-2}$  αθλητές, γίνονται  $2^{m-3}$  αγώνες και ανακηρύσσονται  $2^{m-3}$  νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο  $m^ο$  γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν  $2^{m-m+1} = 2^1 = 2$  αθλητές, γίνεται  $2^{m-m} = 2^0 = 1$  αγώνας και ανακηρύσσεται  $2^{m-m} = 2^0 = 1$  νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται  $m$  “γύροι” και  $2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1 = 2^m - 1$  αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

**α.** Αν τώρα ο θετικός ακέραιος  $m$  είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε  $m = 3k$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^m - 1 = 2^{3k} - 1 = (2^3)^k - 1 = 8^k - 1 = (8 - 1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 1) = 7n,$$

όπου  $n$  θετικός ακέραιος.

**β.** Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους  $m$  γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10 + 20 + 30 + \dots + (m \cdot 10) = 10(1 + 2 + 3 + \dots + m) = 10 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1) = 210 \Leftrightarrow m(m+1) = 42 \Leftrightarrow m = 6,$$

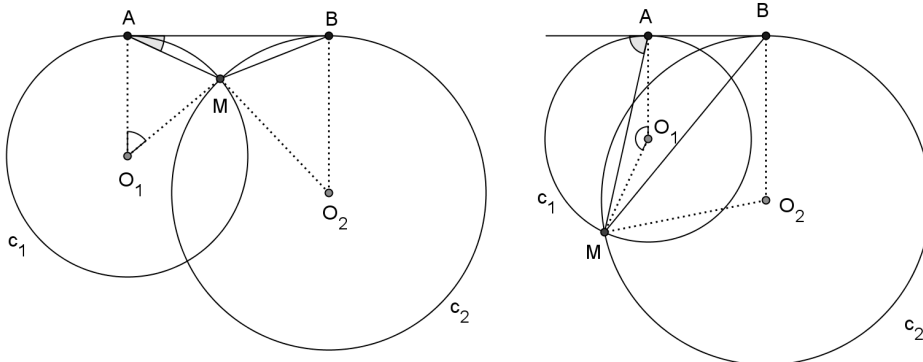
δηλαδή συμμετείχαν  $2^6 = 64$  αθλητές.

**4.** Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων  $c_1 = (O_1, r_1)$  και  $c_2 = (O_2, r_2)$  στα διακεκριμένα σημεία  $A$  και  $B$  αντιστοίχως. Αν το  $M$  είναι κοινό σημείο των  $c_1, c_2$  και ισχύει  $r_1 < r_2$ , να αποδείξετε ότι  $MA < MB$ .

**Λύση**

Είναι  $MA = 2r_1 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right)$  και  $MB = 2r_2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_2B}}{2}\right)$ , οπότε

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right)}{r_2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_2B}}{2}\right)}. \quad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία  $\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}$  ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς  $\widehat{M\hat{A}B}$  είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε  $\eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right) = \eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})$ . Ομοίως, ισχύει ότι  $\eta\mu\left(\frac{\widehat{M\hat{O}_1A}}{2}\right) = \eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})$  και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})}{r_2 \cdot \eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})} \quad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε  $\frac{\eta\mu(\widehat{M\hat{A}B})}{\eta\mu(\widehat{M\hat{B}A})} = \frac{MB}{MA}$ , οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

### Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2011**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right)$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{4}{14} + \frac{14}{14} - \frac{1}{14} \right) \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{14}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{17}{14} \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left( \frac{9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{6}{6} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \frac{31}{6} = 0. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο  $\nu$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα  $\frac{10}{\nu}$  παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}.$$

**Λύση**

Επειδή το κλάσμα  $\frac{10}{\nu}$  παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός  $\nu$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του  $\nu$  είναι  $\nu = 2$  ή  $\nu = 5$ .

- Για  $\nu = 2$ , έχουμε:  $B = \frac{2}{2 - \frac{1}{5}} : \frac{2 - \frac{2}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{9}{5}} : \frac{2 - 1}{9} = \frac{10}{9} : \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \cdot 9 = 10.$
- Για  $\nu = 5$ , έχουμε:  $B = \frac{2}{5 - \frac{1}{5}} : \frac{5 - \frac{5}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{24}{5}} : \frac{5}{9} = \frac{10}{24} : \frac{5}{9} = \frac{10}{24} \cdot \frac{9}{5} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}.$

### Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό  $\gamma$  ως μειωτέο και τον αριθμό  $\alpha$  ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

#### Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι:  $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{9} = \frac{\gamma}{11} = \omega$ , οπότε θα είναι  $\alpha = 3\omega$ ,  $\beta = 9\omega$  και  $\gamma = 11\omega$ . Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma - \alpha = 56 \Leftrightarrow 11\omega - 3\omega = 56 \Leftrightarrow 8\omega = 56 \Leftrightarrow \omega = 7.$$

Άρα είναι:  $\alpha = 3 \cdot 7 = 21$ ,  $\beta = 9 \cdot 7 = 63$  και  $\gamma = 11 \cdot 7 = 77$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  κατά το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\text{H}$  έτσι ώστε  $A\Delta = \Delta\text{H}$ . Από το σημείο  $H$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ .

1. Να αποδείξετε ότι:  $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$ .

2. Να βρείτε τη γωνία  $\hat{E}\hat{D}Z$ , αν γνωρίζετε ότι:  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$ .

#### Λύση

1. Επειδή η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας

$\hat{A}$ , θα ισχύει:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ .

Από την παραλληλία των  $AB$  και  $ZH$ , συμπεραίνουμε ότι  $\hat{A}_1 = \hat{H}$  (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει  $\hat{A}_2 = \hat{H}$ , οπότε το τρίγωνο  $A\text{E}H$  είναι ισοσκελές.

Το  $\Delta$  είναι το μέσο της βάσης  $AH$  του ισοσκελούς τριγώνου  $A\text{E}H$ , οπότε η διάμεσος  $E\Delta$  θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $A\text{E}H$ , δηλαδή θα είναι  $E\Delta \perp AH$  και  $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$

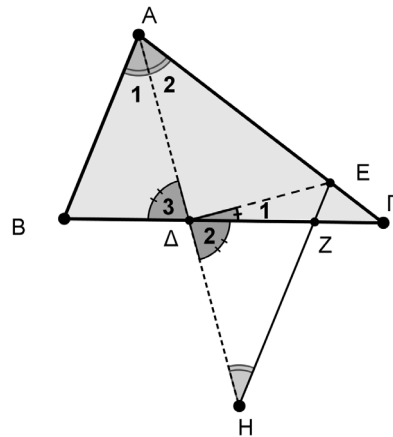
2. Επειδή  $\hat{G}\hat{D}E = \hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$ , θα ισχύει:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_3.$$

Η  $\hat{\Delta}_3$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ , δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}_3 = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}$ . Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ.$$



Σχήμα 1



## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$ ,  $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$  και  $10^{-1} \cdot 1000$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2.$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2} \\ &= (2 \cdot 10^{6-4})^{-2} = (2 \cdot 10^2)^{-2} = \frac{1}{(2 \cdot 10^2)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400} \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

### Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{x-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x-6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x-6-2x+9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν  $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ , οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1, 2 και 3.

### Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνεται ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$ , όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\delta)$  με εξίσωση  $y = 2\lambda x$  και περνάει από το σημείο  $K(2, 8)$ .

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  ανήκουν στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$ .

### Λύση

(α) Επειδή είναι  $(\varepsilon) \parallel (\delta)$ , οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση  $3\lambda - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$ . Έτσι η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  γίνεται  $y = 2x + 2\mu$ . Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο  $K(2, 8)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , οπότε θα ισχύει:  $8 = 2 \cdot 2 + 2\mu \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$ . Άρα έχουμε:

$$\lambda = 1, \mu = 2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon): y = 2x + 4.$$

(β) Επειδή ισχύουν  $2 \cdot (-4) + 4 = -4$  και  $2 \cdot (-1) + 4 = 2$ , τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ , οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας  $(\varepsilon)$ . Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου  $M$  από τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

$$MK = \sqrt{(2+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$M\Lambda = \sqrt{(-4+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$ .

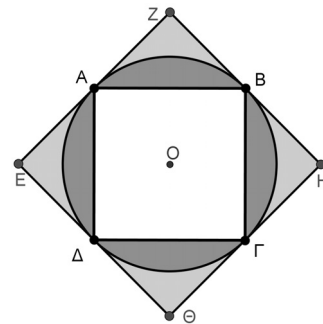
### Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$  είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου  $C(O, \rho)$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_1$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(β) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_2$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου  $EZH\Theta$  και εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$ . (Θεωρείστε ότι  $\pi = 3,1415$ ).



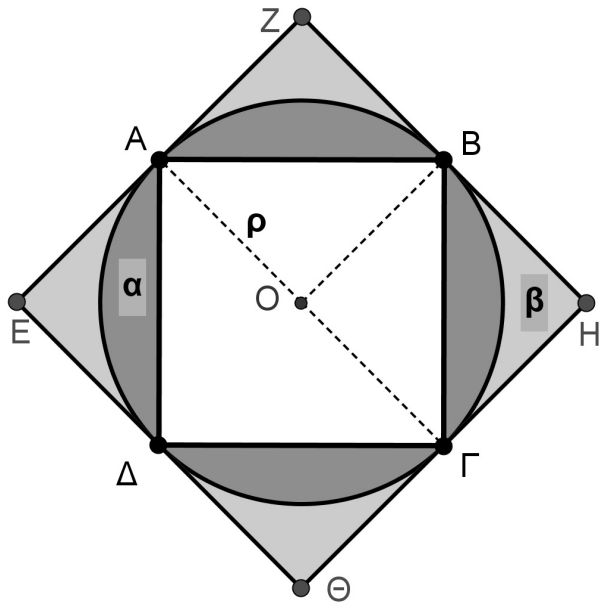
### Λύση

1. Επειδή είναι  $OA = OB$ ,  $OA \perp EZ$  και  $OB \perp ZH$ , έπεται ότι το τετράπλευρο  $OAZB$  είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο  $AOB$  είναι ορθογώνιο στο  $O$ . Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $OAB$  λαμβάνουμε:

$$AB^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:  $2\rho^2$ . Το εμβαδόν του κύκλου είναι  $\pi\rho^2$ , οπότε το άθροισμα  $\Sigma_1$ , θα είναι:

$$\Sigma_1 = \pi\rho^2 - 2\rho^2 = (\pi - 2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι  $OA \perp EZ$  και  $OG \perp H\Theta$ , έπεται ότι η  $AG$  είναι διάμετρος του κύκλου  $C(O, \rho)$ . Άρα το τετράπλευρο  $AGHZ$  είναι ορθογώνιο, οπότε  $ZH = 2\rho$ . Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  είναι ίσο με  $4\rho^2$ . Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi - 2)\rho^2}{(4 - \pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi - 2) < 4(4 - \pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3,1428\dots, \text{ που ισχύει.}$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{cases}$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} (x-10)(x^2-7x+10)=0 &\Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \\ &\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση  $x^2-7x+10=0$ , έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με  $\alpha=1$ ,  $\beta=-7$ ,  $\gamma=10$ , οπότε είναι  $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$  και οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x=2$  ή  $x=5$ .

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση  $x^2-7x+10=0$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x(x-7)=-10$ . Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο  $x$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ . Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2 < 5x^2+5x \Leftrightarrow x > 3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι:  $x=5$  ή  $x=10$ .

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

**Λύση**

Αν θέσουμε

$$B(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x) = \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση  $A(x)$  είναι ίση με τη διαφορά  $B(x)-\Gamma(x)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} = \frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2} \\ &= \frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2} = \frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2} = \frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1} = x^2+x+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)} = \frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A(x) = B(x) - \Gamma(x) = x^2 + x + 1 - (x + 1) = x^2.$$

3. (α) Αν  $\kappa$  ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x - 1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου  $\kappa$  η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

**Λύση**

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}2\kappa x + x &= 4\kappa(x+2) - 3(\kappa x - 1) \Leftrightarrow 2\kappa x + x = 4\kappa x + 8\kappa - 3\kappa x + 3 \Leftrightarrow \kappa x + x = 8\kappa + 3 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 1)x = 8\kappa + 3.\end{aligned}\quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν  $\kappa = -1$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $0 \cdot x = -5$  και είναι αδύνατη.

2. Αν  $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ , δηλαδή, αν ο  $\kappa$  είναι ακέραιος διαφορετικός από το  $-1$ ,

$$\text{τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση } x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}.$$

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8\kappa + 8 - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa + 1) - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$x = 8 - \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}.$$

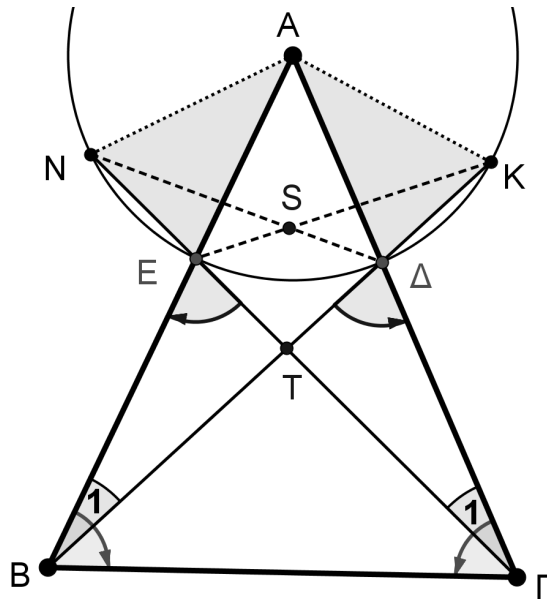
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το  $\kappa$  είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του  $-1$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Κύκλος με κέντρο την κορυφή  $A$  και ακτίνα  $\rho < AB$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία  $K$ ,  $N$  αντίστοιχα. Αν  $T$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  και  $S$  το σημείο τομής των  $\Delta N$ ,  $E K$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $S$  και  $T$  βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

**Λύση**

Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A E \Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν: (α)  $A\Delta = AE$ , ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β)  $AB = A\Gamma$  (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ ) και (γ) η γωνία  $\hat{A}$  είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων  $\triangle A\Delta B$  και  $\triangle A\epsilon\Gamma$ , προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$  και κατά συνέπεια:

$$\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}. \quad (1)$$

- $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{\epsilon}\Gamma$  και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} \quad (2)$$

- $\Delta B = \Delta\Gamma$ . (3)

Από την ισότητα (1) των γωνιών  $\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}$  προκύπτει ότι το τρίγωνο  $B\hat{T}\hat{\Gamma}$  είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο  $T$  θα ανήκει στη μεσοκάθετη της  $B\Gamma$ .

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $B\hat{T}\hat{\Gamma}$  έχουμε:  $TB = T\Gamma$  και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε:  $TE = T\Delta$ .

Από την ισότητα (2) των γωνιών  $\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , προκύπτει η ισότητα των ισοσκελών τριγώνων  $\triangle A\Delta K$  και  $\triangle A\epsilon N$ . Άρα  $\Delta K = \epsilon N$  και επειδή  $TE = T\Delta$ , καταλήγουμε  $TK = TN$ .

Από τις ισότητες  $TE = T\Delta$  και  $TK = TN$  συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων  $\triangle ETK$  και  $\triangle \Delta TN$ .

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων  $\triangle SEN = \triangle \Delta K$  και στη συνέχεια η ισότητα  $SA\epsilon = SAK$ , οπότε το σημείο  $S$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2012 \cdot 4019 \cdot 2009 + 2006}{2010^2 - 2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

### Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2} &= \frac{(x+2)(2x^2-3x+1)+x-4}{x^2-2} \\ &= \frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2} = \frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2} \\ &= \frac{2x(x^2-2)+x^2-2}{x^2-2} = \frac{(x^2-2)(2x+1)}{x^2-2} = 2x+1. \end{aligned}$$

(β) Για  $x = 2010$  η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την  $A$ , οπότε θα έχουμε:

$$A = K(2010) = 2 \cdot 2010 + 1 = 4021.$$

### Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το  $x$ , έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$ , για όλες τις τιμές των παραμέτρων  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ .

### Λύση

Για  $a = b$  η εξίσωση γίνεται:  $\frac{2}{x-a} = \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow x = a + 2c^2$ .

Έστω  $a \neq b$ . Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b) = c^2(x-a+x-b), \quad \text{με } x \neq a \text{ και } x \neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+b+2c^2)x + ab + (a+b)c^2 = 0, \quad \text{με } x \neq a \text{ και } x \neq b \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta = (a+b+2c^2)^2 - 4ab - 4(a+b)c^2 = (a+b)^2 - 4ab + 4c^4 = (a-b)^2 + 4c^4 > 0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο  $\mathbb{R}$  που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2} = \frac{a+b+2c^2 \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^4}}{2}. \quad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα  $a$  και  $b$  δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για  $x = a$  η εξίσωση γίνεται:  $(a-a)(x-b) = c^2(a-a+x-b) \Leftrightarrow 0 = c^2(a-b)$ , που είναι

άτοπο, αφού είναι  $c \neq 0$  και έχουμε υποθέσει ότι  $a \neq b$ . Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για  $x = b$ . Επομένως, για  $a \neq b$ , η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο  $\mathbb{R}$  που δίνονται από τις ισότητες (2).

### Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2, z = y^3 + 2y - 2, x = z^3 + 2z - 2.$$

### Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) \quad (1)$$

$$z - x = (y - z)(y^2 + yz + z^2 + 2) \quad (2)$$

Επειδή είναι  $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$  και ομοίως προκύπτει ότι

$$y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0, \text{ αν υποθέσουμε ότι είναι } x > y, \text{ τότε από}$$

την (1) λαμβάνουμε ότι  $y > z$ . Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε  $z > x$ .

Έτσι έχουμε  $x > y > z > x$ , άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι  $x < y$ . Επομένως έχουμε  $x = y$ , οπότε θα είναι και  $y = z$ . Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο  $x^2 + x + 2$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -7 < 0$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ , τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Από το σημείο  $Z$ , θεωρούμε παράλληλη στην  $A\Gamma$ , που τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Από το σημείο  $E$ , θεωρούμε παράλληλη στην  $AB$ , που τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τετράπλευρα  $BMOZ$  και  $\Gamma NOE$  είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω  $(c_1)$  και  $(c_2)$ , αντίστοιχα.

**β)** Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω  $K$ ) των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο  $\Delta$  και ακτίνα  $\Delta I$ , όπου  $I$  το έκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### Λύση

**α)** Εφόσον η  $ZM$  είναι παράλληλη στην  $A\Gamma$ , θα ισχύει:  $Z\hat{M}B = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$ .

Η γωνία  $Z\hat{O}B$  είναι επίκεντρη στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνει στο τόξο  $ZB$  (που είναι το μισό του τόξου  $AB$ ). Άρα  $Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$ . Άρα είναι  $Z\hat{M}B = Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$ , οπότε το τετράπλευρο  $BMOZ$  είναι εγγράψιμο.





Το τρίγωνο  $OBZ$  είναι ισοσκελές ( $OB = OZ = R$ ), με  $\widehat{B\hat{O}Z} = \hat{\Gamma}$ . Άρα  $\widehat{B\hat{Z}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ . Το τρίγωνο  $OΓE$  είναι ισοσκελές ( $OΓ = OE = R$ ), με  $\widehat{Γ\hat{O}E} = \hat{B}$ .

Άρα  $\widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ . Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\begin{aligned}\widehat{B\hat{K}\Gamma} &= \widehat{O\hat{K}B} + \widehat{O\hat{K}\Gamma} = \widehat{B\hat{Z}O} + \widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = \widehat{B\hat{I}\Gamma}.\end{aligned}$$

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2 + 3x + 2)^4 + (x^2 + x - 2)^4 = 16(x + 2)^4.$$

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα  $x^2 + 3x + 2$  και  $x^2 + x - 2$  έχουν παράγοντα το  $x + 2$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} & (x + 2)^4 \left[ (x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 2)^4 = 0 \text{ ή } (x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4 + 12x^2 - 14 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4 + 6x^2 - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = -7 \text{ (αδύνατη)} \\ \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x = 1 \text{ ή } x = -1. \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Αν θέσουμε  $a = x^2 + 3x + 2$ ,  $b = x^2 + x - 2$ , τότε  $a - b = 2x + 4$  και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a - b)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ \Leftrightarrow & -ab(2a^2 - 3ab + 2b^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0, \end{aligned}$$

αφού η εξίσωση  $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ , αν  $ab \neq 0$ , είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0, u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο  $\mathbb{R}$ . Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} & a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \text{ (διπλή)} \\ \Leftrightarrow & x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)} \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , αν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{cases}, \quad (\Sigma)$$

έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ , δια κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + (2x + \lambda)^2) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 \quad (1) \\ y = 2x + \lambda \quad (2) \end{array} \right\}$$

Αν ήταν  $\alpha \neq 0$ , τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο  $\mathbb{R}$  για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \quad (3)$$

Όμως, το τριώνυμο  $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$  έχει διακρίνουσα  $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$ , οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  (αφού είναι  $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{4}{\alpha^2} < 0$ ).

Επομένως θα έχουμε  $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$ , για  $\lambda < \lambda_1$  ή  $\lambda > \lambda_2$ , άτοπο.

Για  $\alpha = 0$  η εξίσωση (1) έχει τη λύση  $x = 0$ , οπότε προκύπτει ότι  $y = \lambda$  και το σύστημα έχει τη λύση  $(x, y) = (0, \lambda)$ . Άρα είναι  $\alpha = 0$ .

### Πρόβλημα 3

Η ακολουθία  $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$  είναι τέτοια ώστε η ακολουθία  $d_n = a_n - a_{n-1}$ , με  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega = a_1 - a_0$ .

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των  $a_0, \omega$  και  $n$  τον γενικό όρο  $a_n$  και το άθροισμα  $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .
2. Αν είναι  $a_0 = 1$  και  $a_1 = 7$ , να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο  $n$  για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:  $a_n > 10^3$  και  $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$ .

### Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega, d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2, 3, \dots$$

οπότε θα είναι:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \omega + 2\omega + \dots + n\omega = a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1 + 2 + \dots + n)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα  $S_{n+1}$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= a_0 + a_1 + \dots + a_n = (n+1)a_0 + \left( \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \omega \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) \omega + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n k \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \omega \\
&= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \omega.
\end{aligned}$$

2. Αν είναι  $a_0 = 1$  και  $a_1 = 7$ , τότε έχουμε  $\omega = 6$  και

$$a_n = 1 + 3n(n+1), \quad S_{n+1} = n+1 + n(n+1)(n+2) = (n+1)[1 + n(n+2)] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{aligned}
a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3 &\Leftrightarrow a_n = 1 + 3n(n+1) > 10^3, \quad S_{n+1} = (n+1)^3 \leq 8 \cdot 10^3 \Leftrightarrow \\
&n(n+1) > 333, \quad n+1 \leq 2 \cdot 10 \Leftrightarrow n > 18, \quad n \leq 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.
\end{aligned}$$

αφού είναι  $17 \cdot 18 = 306$ ,  $18 \cdot 19 = 342$ .

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος  $n$  είναι ο 18.

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(c)$  και  $\Delta$  τυχόν σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , τέμνει τον κύκλο  $(c)$  στο σημείο  $\Sigma$ , τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  στο σημείο  $K$  και τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , τέμνει τον κύκλο  $(c)$  στο σημείο  $T$ , τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}\Gamma$  στο σημείο  $\Lambda$  και τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  στο σημείο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα σημεία  $A, I, \Lambda, M$  και  $A, I, K, N$  είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω)  $(c_1)$  και  $(c_2)$  αντίστοιχα, όπου  $I$  το έγκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

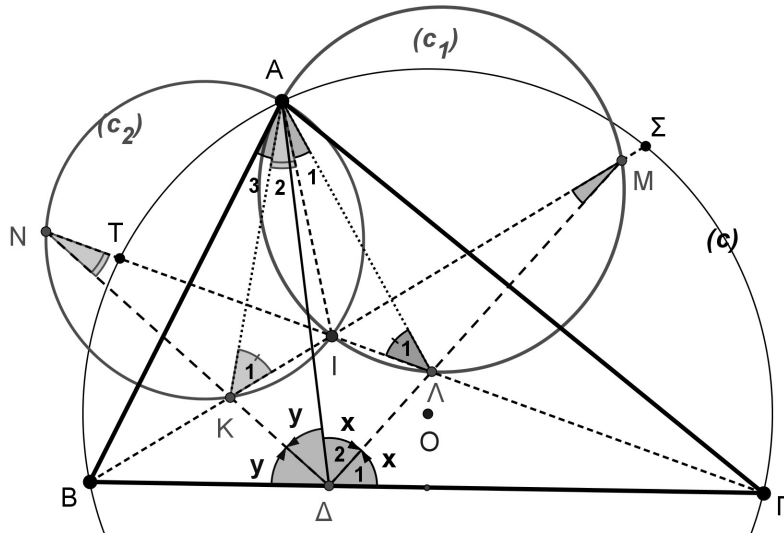
**β)** Αν η  $A\Delta$  ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , που αντιστοιχεί στη κορυφή  $A$  τότε οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  είναι ίσοι μεταξύ τους.

#### Λύση

**α)** Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία  $K, \Lambda$  είναι τα έγκεντρα των τριγώνων  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_1 = I\hat{A}\Gamma - \Lambda\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο ΜΔΒ έχουμε:  $\hat{x} = \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$ , δηλαδή  $\hat{A}_1 = \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$ .

Άρα το τετράπλευρο ΑΙΛΜ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2 = \hat{I}\hat{A}\hat{B} - \hat{K}\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{y} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο ΝΔΓ έχουμε:  $\hat{y} = \hat{N} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ , δηλαδή  $\hat{A}_2 = \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ .

Άρα το τετράπλευρο ΑΙΚΝ είναι εγγράψιμο.

**β)** Εφόσον I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{A}\hat{I}\hat{B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} = \hat{B} + \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο ΑΙΚ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{B} - \hat{A}_2 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{N} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο ΑΙΛ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} - \hat{A}_1 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι  $A\Delta \perp B\Gamma$  τότε  $\hat{x} = \hat{y} = 45^\circ$ , οπότε  $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ .

Άρα οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες  $\hat{K}_1, \hat{\Lambda}_1$  βαίνουν στη κοινή χορδή ΑΙ).

### Παρατηρήσεις

**α)** Τα κέντρα των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  βρίσκονται επάνω στην ΣΤ.

**β)** Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου ΔΚΙΛΜΝ.

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2012**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
73<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

**Λύση**

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right) = \frac{88}{5} \cdot \frac{5}{44} - \frac{39}{5} \cdot \frac{5}{39} = 2 - 1 = 1.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο  $\kappa$  είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του  $\kappa$  και της παράστασης:

$$B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{3 - \kappa}{\kappa}.$$

**Λύση**

Είναι  $\text{ΜΚΔ}(12, 30, 54) = 6$ . Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε  $\kappa = 2$  ή  $\kappa = 3$ .

$$\text{Για } \kappa = 2 \text{ έχουμε: } B = \frac{2 - \frac{2}{2}}{2 - \frac{1}{2}} : \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{3}.$$



Για  $\kappa = 3$  ο διαιρέτης  $\frac{3-\kappa}{\kappa}$  της παράστασης B γίνεται  $\frac{3-3}{3} = \frac{0}{3} = 0$ , ενώ ο διαιρετέος γίνεται  $\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5} \neq 0$ , οπότε η παράσταση B δεν ορίζεται.

### Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

- (α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
- (β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

### Λύση

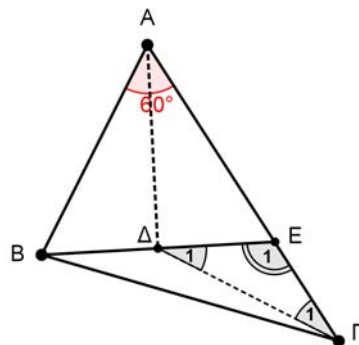
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι  $2,5 \cdot \frac{6}{100} = 0,15$  ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι  $2,5 - 0,15 = 2,35$  ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι  $1050 + 407 = 1457$  ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει  $1457 : 2,35 = 620$  κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει  $800 \cdot \frac{8}{100} = 64$  κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό  $800 - (620 + 64) = 116$  κιλά λάδι.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$ . Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά AΓ τέτοιο ώστε  $AE = AB$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

### Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με  $\alpha$  το μήκος του τμήματος  $AB$ , δηλαδή:  $AB = \alpha$ .

Εφόσον  $AG = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$  και  $AE = AB = \alpha$ , έχουμε:

$$EG = AG - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές ( $AB = AE$ ) και η γωνία του  $\hat{A}$  είναι  $60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του  $AD$  είναι και διάμεσος.

Άρα είναι  $DE = \frac{\alpha}{2}$  και το τρίγωνο  $DEG$  είναι ισοσκελές, αφού  $EG = EG = \frac{\alpha}{2}$ .

Η γωνία  $\hat{E}_1$  είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου  $ABE$ . Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - \hat{AEB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε:  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ .

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

#### Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = (2^2)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = (2^3)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = (2^{-10})^2 \cdot (2^{-16})^4 \cdot (2^{-18})^6 \cdot 2^{182} \\ &= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}. \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} B &= 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1} = 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6)^{-1} = 3 \cdot [2^2 \cdot 3^3 (13 + 2^2 \cdot 3^3)]^{-1} \\ &= 3 \cdot (2^2 \cdot 3^3 \cdot 121)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

#### Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

#### Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot 3 - 5\alpha + 2 < \alpha(3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow 12 - 5\alpha + 2 < 2\alpha - 2 \Leftrightarrow 16 < 7\alpha \Leftrightarrow \alpha > \frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot (-3) - 5\alpha + 2 < \alpha(-3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow -12 - 5\alpha + 2 < -6\alpha + 2\alpha - 2$$

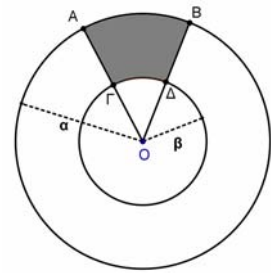
$$\Leftrightarrow -8 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > -8$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις  $\alpha > \frac{16}{7}$  και  $\alpha > -8$ , δηλαδή όταν  $\alpha > \frac{16}{7}$ .

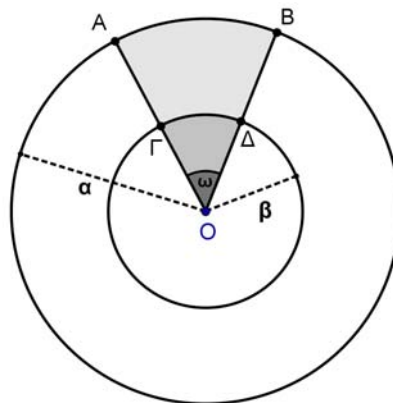
### Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $AB\Delta\Gamma$  του διπλανού σχήματος ισούται με το  $\frac{1}{12}$  του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους  $(O, \alpha)$  και  $(O, \beta)$ ,  $0 < \beta < \alpha$ , να βρείτε τη γωνία  $\omega = \widehat{A\hat{O}B}$  και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left( 2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



### Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου  $AB\Delta\Gamma$  ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων  $(O, \widehat{AB})$  και  $(O, \widehat{GD})$ , δηλαδή είναι

$$E(AB\Delta\Gamma) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} - \pi\beta^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους  $(O, \alpha)$  και  $(O, \beta)$ ,  $0 < \beta < \alpha$ , ισούται με  $E(O, \beta, \alpha) = \pi(\alpha^2 - \beta^2)$ , οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{E(AB\Delta\Gamma)}{E(O, \beta, \alpha)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι  $\eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , έχουμε

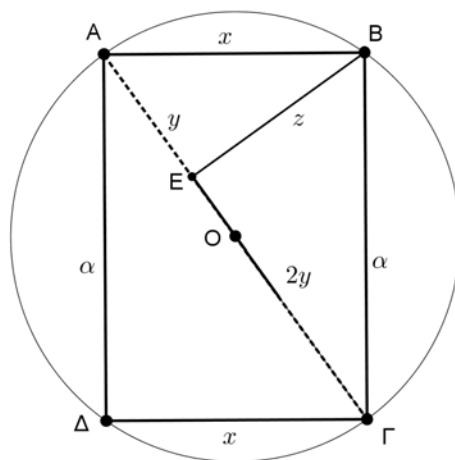
$$\Sigma = \left( 2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3 = \left( 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta = \alpha$  cm και  $AB < A\Delta$ . Η κάθετη από την κορυφή  $B$  προς τη διαγώνιο  $A\Gamma$  την τέμνει στο σημείο  $E$ . Αν ισχύει ότι  $E\Gamma = 2 \cdot AE$ , να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς  $AB$
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

#### Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω  $AB = \Gamma\Delta = x$ ,  $AE = y$ ,  $E\Gamma = 2y$  και  $BZ = z$ .

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $ABE$  έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \quad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $B\Gamma E$  έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \quad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3 \cdot \frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η  $A\Gamma = 3y$ , οπότε η ακτίνα του είναι

$$R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}. \text{ Το εμβαδόν του κύκλου είναι } E = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι  $x$  που είναι ρίζες της εξίσωσης  $x(x-2) = 24$  και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

#### Λύση

Η εξίσωση  $x(x-2) = 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$  είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα  $\Delta = 100$ , οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x = \frac{2 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα  $x = -4$ , γιατί  $(-4)^2 = 16 < 25$ , ενώ  $6^2 = 36 > 25$ .

### Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta)}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta},$$

αν  $\alpha + \beta \neq 0$  και  $\alpha + \beta \neq 1$ .

#### Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta) \\ &= \alpha^3 + \beta^3 - (\alpha^2 - \beta^2) + \beta(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta + \beta\alpha - 2\beta^2) \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)] \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1). \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)$$

Άρα, αφού  $\alpha + \beta \neq 0$  και  $\alpha + \beta \neq 1$ , έχουμε

$$K(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)} = \alpha - \beta.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ . Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

#### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 1) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες  $x_1 = -\lambda + 1$  και  $x_2 = -\lambda - 1$ .

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα  $(-5, 2)$ , όταν

$$\begin{aligned} -5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 &\Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3 \\ &\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4. \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε

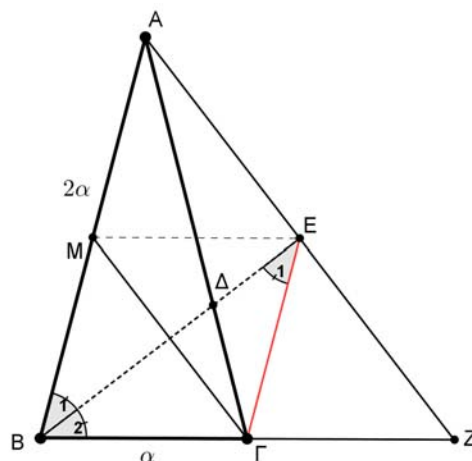
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει  $-1 < \lambda < 4$  το ζητούμενο ισχύει για  $\lambda = 3$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = \alpha$  και  $AB = A\Gamma = 2\alpha$ . Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή  $\Gamma$  προς την πλευρά  $AB$  τέμνει την ευθεία της διχοτόμου  $B\Delta$  στο σημείο  $E$ . Η ευθεία  $AE$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

#### Λύση



Σχήμα 4

Επειδή  $E\Gamma \parallel AB$ , θα ισχύει  $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$  και αφού η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , θα είναι  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ . Επομένως έχουμε  $\hat{B}_2 = \hat{E}_1$  και κατά συνέπεια το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισοσκελές, δηλαδή:  $B\Gamma = \Gamma E = \alpha$ .

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

**1<sup>ος</sup> τρόπος.** Λόγω της παραλληλίας των  $E\Gamma$ ,  $AB$  θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα  $E\Gamma Z$  και  $ABZ$ , από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\Gamma Z}{BZ} = \frac{E\Gamma}{AB} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow BZ = 2 \cdot \Gamma Z$$

Επομένως το σημείο  $\Gamma$  είναι το μέσο της  $BZ$ , δηλαδή  $BZ = 2 \cdot B\Gamma = 2\alpha$ . Επειδή είναι και  $AB = 2\alpha$  το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Θεωρούμε το μέσο  $M$  της  $AB$ . Τότε το τετράπλευρο  $B\Gamma E M$  είναι ρόμβος, διότι: έχει  $BM \parallel \Gamma E = \alpha$  (οπότε  $B\Gamma E M$  παραλληλόγραμμο) και  $B\Gamma = \Gamma E = \alpha$  (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα  $ME = BZ$  και κατά συνέπεια το  $E$  είναι μέσο του  $AZ$ . Επομένως στο τρίγωνο  $ABZ$ , η  $BE$  είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν  $\kappa \alpha \neq 0$  και  $-1 < \alpha < 1$  να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha$ ,

όπου

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

### Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι  $1+\alpha > 0$  και  $1-\alpha > 0$ , οπότε

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι  $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , για όλες τις τιμές του  $\alpha$ , έπεται ότι η παράσταση  $K$  έχει το πρόσημο του  $\alpha$ , δηλαδή θετικό, αν  $0 < \alpha < 1$  και αρνητικό, αν  $-1 < \alpha < 0$ .

### Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\kappa$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα  $(0, 5)$  με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4(-1 + \kappa^2) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες  $x_1 = \kappa + 1$  και  $x_2 = \kappa - 1$ .

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα  $(0, 5)$ , όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa + 1)^4 + (\kappa - 1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για  $\kappa = 2$  ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή  $\kappa = -2$  απορρίπτεται λόγω της σχέσης  $1 < \kappa < 4$ .

### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους  $x, y$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  είναι διαιρέτης του 747.

### Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x} = \frac{2012y+5}{y} = \frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012 + \frac{3}{x} = 2012 + \frac{5}{y} = 2012 + \frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε  $\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$  έπεται ότι:  $x = 3\lambda, y = 5\lambda, z = 7\lambda$ .

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 83\lambda^2 \mid 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το  $\lambda^2$  είναι οι 1, 3 και 9.

- Για  $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$  έπεται ότι  $(x, y, z) = (3, 5, 7)$  ή  $(x, y, z) = (-3, -5, -7)$ .
- Για  $\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$  προκύπτουν για τα  $x, y, z$  μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για  $\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$  έπεται ότι  $(x, y, z) = (9, 15, 21)$  ή  $(x, y, z) = (-9, -15, -21)$ .

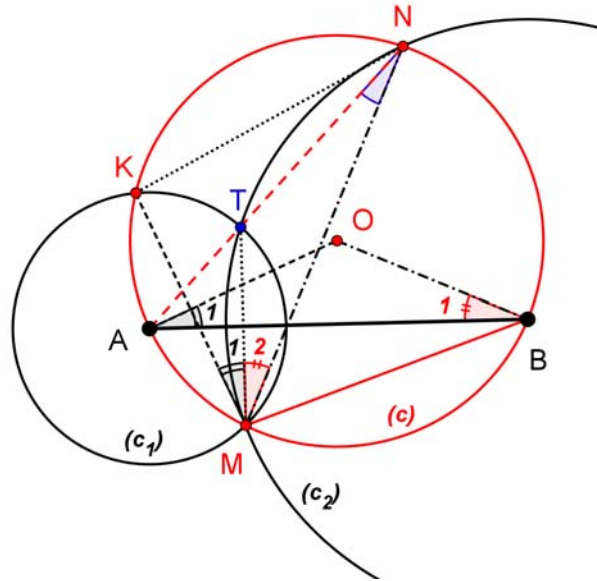
### Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$ , τυχούσα χορδή του  $AB$  (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο  $M$  του μικρού τόξου  $AB$ . Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $K$  και  $N$  αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνονται στο σημείο  $T$ . Να αποδείξετε ότι το σημείο  $T$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $KMN$ .

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.





Σχήμα 5

Η  $KM$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c(O, R)$  και  $c_1(A, AM)$ . Άρα  
 η  $OA$  είναι μεσοκάθετη της  $KM$ . (1)

Η  $MT$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$ . Άρα  
 η  $AB$  είναι μεσοκάθετη της  $MT$ . (2)

Η  $MN$  είναι κοινή χορδή των κύκλων  $c(O, R)$  και  $c_2(B, BM)$ . Άρα  
 η  $OB$  είναι μεσοκάθετη της  $MN$ . (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$$\hat{A}_1 = \hat{M}_1 \text{ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).}$$

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$$\hat{B}_1 = \hat{M}_2 \text{ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)}$$

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο  $OAB$ , έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα:  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ .

Η γωνία  $\hat{A}\hat{N}M$  και  $\hat{A}\hat{B}M$  είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνουν στο τόξο  $\widehat{AM}$ .

Η γωνία  $\hat{T}\hat{N}M$  είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο  $c_2(B, BM)$ , οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας  $\hat{T}\hat{B}M$ , δηλαδή:  $\hat{T}\hat{N}M = \hat{A}\hat{B}M$

Άρα  $\hat{A}\hat{N}M = \hat{T}\hat{N}M$  και κατά συνέπεια τα σημεία  $A, T, N$  είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα  $\hat{A}\hat{N}K = \hat{A}\hat{N}M$  (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνουν στα ίσα τόξα  $AM$  και  $AK$ ). Επομένως η  $NA$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{K}\hat{N}M$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+x} = \frac{2011}{2013}.$$

### Λύση

Επειδή  $1+2+3+\dots+x = \frac{x(x+1)}{2}$ , για κάθε θετικό ακέραιο  $x$ , η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} &= \frac{2011}{2013} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{2011}{2013} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{2011}{2013} &\Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2013} \Leftrightarrow x = 2012. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = ax^2 + bx + c$  και  $g(x) = cx + b$ , όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων  $a, b, c$  καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

### Λύση

Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = cx + b \Leftrightarrow ax^2 + (b-c)x + (c-b) = 0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta = (b-c)^2 + 4a(b-c) = 0 \Leftrightarrow (b-c)(b-c+4a) = 0 \Leftrightarrow c-b = 4a,$$

αφού  $b \neq c$ .

Όταν  $c-b = 4a$  η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2 - 4ax + 4a = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το  $M(2, 2c+b)$ .

### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y} = \frac{y}{2012y+z} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  ισούται με 147.

### Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x} = \frac{2012y+z}{y} = \frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012 + \frac{y}{x} = 2012 + \frac{z}{y} = 2012 + \frac{7}{z} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε  $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$  έπεται ότι:  $x = 7\lambda^3$ ,  $y = 7\lambda^2$ ,  $z = 7\lambda$ .

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 147 \Leftrightarrow 49\lambda^6 + 49\lambda^4 + 49\lambda^2 = 147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda^6 - 1 + \lambda^4 - 1 + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + 1 + \lambda^2 + 1 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1,$$

αφού η εξίσωση  $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3 = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -8 < 0$ .

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

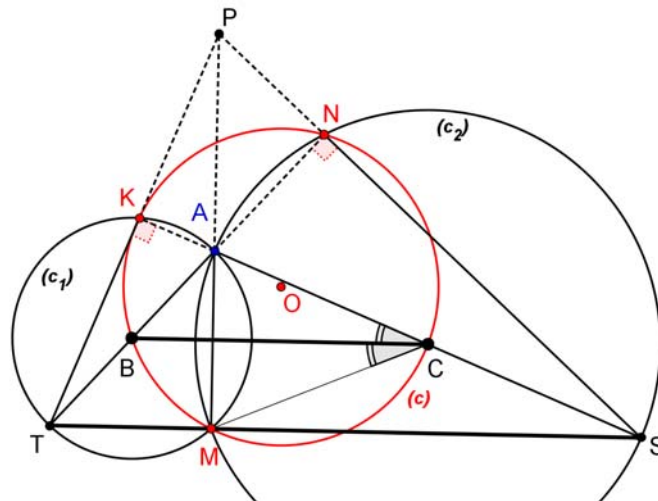
$$(x, y, z) = (7, 7, 7) \text{ ή } (x, y, z) = (-7, -7, -7)$$

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$ , τυχούσα χορδή του  $BC$  (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο  $M$  του μικρού τόξου  $BC$ . Οι κύκλοι  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $K, N$ , αντίστοιχα, και οι κύκλοι  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $M$ . Η παράλληλος από το σημείο  $M$  προς την  $BC$  τέμνει τους κύκλους  $c_1(B, BM)$ ,  $c_2(C, CM)$  στα σημεία  $T, S$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $AM, KT, NS$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

#### Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία  $K, A, C, S$  και  $N, A, B, T$  είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η  $AM$  είναι η κοινή χορδή των κύκλων  $c_1(B, BM)$  και  $c_2(C, CM)$ .

Άρα η διάκεντρος τους  $BC$  είναι μεσοκάθετη της  $AM$ .

Η  $BC$  όμως είναι παράλληλη με την  $TS$  (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η  $TS$  είναι κάθετος με την  $AM$  ( $AM \perp TS$ ). Δηλαδή  $\hat{AMT} = \hat{AMS} = 90^\circ$ .

Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία  $A, T$  και  $A, S$  είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους  $c_1(B, BM)$  και  $c_2(C, CM)$  αντίστοιχα.

Επομένως, τα σημεία  $A, C, S$  και  $A, B, T$  είναι συνευθειακά.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $K, A, C$  και  $N, A, B$  είναι συνευθειακά.

Στον κύκλο  $c(O, R)$ , το σημείο  $B$  είναι μέσο του τόξου  $KM$  (διότι  $BM, BK$  είναι ακτίνες του κύκλου  $c_1(B, BM)$ ). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα  $BM$  και  $BK$  γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$\hat{KCB} = \hat{MCB} \quad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος  $BC$  είναι μεσοκάθετη της  $AM$ , τα τρίγωνα  $ABC$  και  $MBC$  είναι ίσα, οπότε :

$$\hat{ACB} = \hat{MCB} \quad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι  $\hat{KCB} = \hat{ACB}$  και κατά συνέπεια τα σημεία  $K, A, C$  είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία  $N, A, B$  είναι επίσης συνευθειακά.

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα  $AMTK$  και  $AMSN$  συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{AKT} = \hat{ANS} = 90^\circ.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες  $TK \perp KS$  και  $TN \perp NS$ .

Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα  $AM \perp TS$ , συμπεραίνουμε ότι τα  $AM, KT, NS$  είναι ύψη του τριγώνου  $ATS$ , οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

### Παρατηρήσεις

Έστω  $P$  το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ATS$ . Τότε τα σημεία  $P, A, T, S$  αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο  $A$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $PTS$ .

Το τρίγωνο  $KMN$  είναι ορθικό του τριγώνου  $PTS$  και κατά συνέπεια το σημείο  $A$  είναι έκκεντρο του τριγώνου  $KMN$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2013**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
74<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} .$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9} \\ &= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

**Λύση**

(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το  $(100 - 20)\% = 80\%$  του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση:  $1600 - 1360 = 240$ .

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε  $2000 - 1360 = 640$  ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

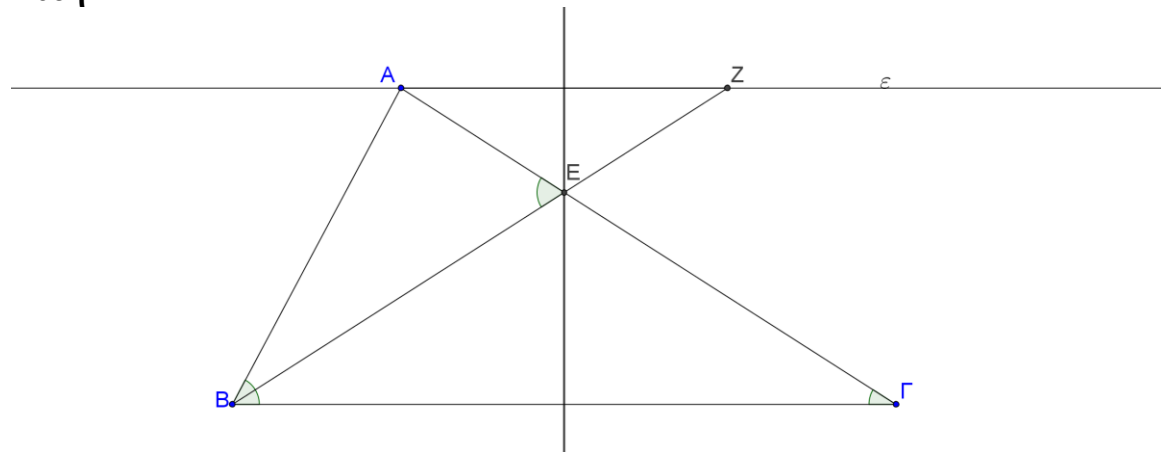
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η γωνία  $\hat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ . Η μεσοκάθετη της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AG$  στο σημείο  $E$  και η ευθεία  $BE$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$ , που περνάει από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$ , στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $AZ = AB$ , (β)  $\hat{A\hat{E}B} = \hat{B}$ .

### Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο  $E$  ανήκει στη μεσοκάθετη της  $B\Gamma$  έπεται ότι  $EB = EG$ , οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο  $EB\Gamma$  προκύπτει  $\hat{E\hat{B}\Gamma} = \hat{\Gamma}$ . Επειδή  $AZ \parallel B\Gamma$  έπεται ότι:  $\hat{E\hat{B}\Gamma} = \hat{A\hat{Z}B}$  (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης  $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ , έχουμε:

$$\hat{A\hat{Z}B} = \hat{E\hat{B}\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \hat{A\hat{B}Z}.$$

Άρα το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές με  $AB = AZ$ .

(β) Η γωνία  $\hat{A\hat{E}B}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $EB\Gamma$ , οπότε

$$\hat{A\hat{E}B} = \hat{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{B}.$$

### Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι  $\frac{7}{5}$ . Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το

18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του

υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Έστω  $\alpha, \beta$  οι δυο φυσικοί αριθμοί με  $\alpha > \beta$ , Τότε θα είναι  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$  και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\nu \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \nu.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων), οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\nu) = 7 \cdot (108 + \nu) \Leftrightarrow \text{(από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\nu = 756 + 7\nu \Leftrightarrow 18\nu = 36 \Leftrightarrow \nu = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος.

Έχουμε:  $\alpha = 18 \cdot 8 + \nu_1$ , με  $\nu_1 = 0, 1, 2, \dots, 17$  και  $\beta = 12 \cdot 9 + \nu_2$ , με  $\nu_2 = 0, 1, 2, \dots, 11$ .

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα  $\nu_1 = 5\nu_2$  είναι τα :

$$(\nu_1, \nu_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος  $(10, 2)$  μας δίνει  $\alpha = 154$  και  $\beta = 110$  και το κλάσμα

$$\frac{154}{110} \text{ που είναι ισοδύναμο με το } \frac{7}{5}.$$

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός  $\alpha$  είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού  $\sqrt{5}$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4, 6) - 2 \cdot (\alpha - 0, 2).$$

### Λύση

Έχουμε:  $4 < 5$ , οπότε  $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$ . Είναι

$2,1^2 = 4,41, 2,2^2 = 4,84$  και  $2,3^2 = 5,29$ , οπότε η ζητούμενη τιμή του  $\alpha$  είναι  $\alpha = 2,2$ .

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:  $A = 2$

### Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος  $\beta$  ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο  $x$  την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

### Λύση

Έχουμε  $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$ . Επειδή ο

$\beta$  είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι  $\beta = 1$  ή  $\beta = 2$ .



- Για  $\beta = 1$  η ανίσωση γίνεται:  $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1$ .
- Για  $\beta = 2$  η ανίσωση γίνεται:  
 $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1$ , η οποία είναι αδύνατη.

### Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $\chi O \psi$  μια ευθεία ( $\varepsilon$ ) σχηματίζει με τον άξονα  $\chi' \chi$  γωνία  $45^\circ$  και επίσης διέρχεται από το σημείο  $M(2, -6)$ . Το σημείο A ανήκει στον άξονα  $\chi' \chi$  και στην ευθεία ( $\varepsilon$ ), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα  $\psi' \psi$  και στην ευθεία ( $\varepsilon$ ).

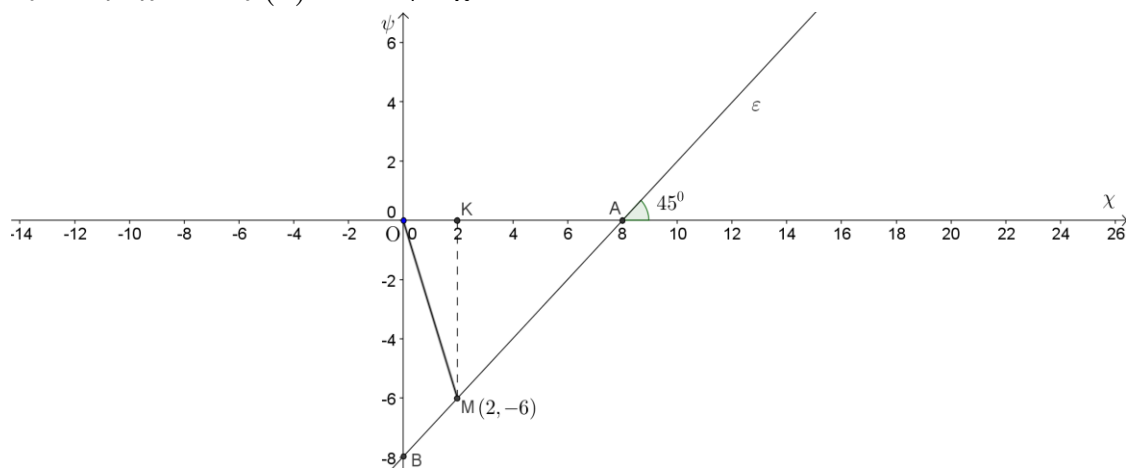
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\varepsilon$ ).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

### Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή  $\psi = \alpha\chi + \beta$ , όπου  $\alpha = \varepsilon\phi 45^\circ = 1$ . Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο  $M(2, -6)$  έχουμε ότι  $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$ . Άρα η εξίσωση της ευθείας ( $\varepsilon$ ) είναι:  $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα κοινά σημεία της ευθείας ( $\varepsilon$ ) με τους άξονες  $\chi' \chi$  και  $\psi' \psi$  είναι τα  $A(8, 0)$  και  $B(0, -8)$ , αντίστοιχα. Άρα έχουμε

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

γ) Αν K είναι το σημείο με συντεταγμένες  $(2, 0)$ , τότε το τρίγωνο KMA είναι ορθογώνιο στο K και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη  $KM = 6$  και  $KA = 6$ . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM = \sqrt{KM^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα OAM και OAB έχουν κοινό ύψος από την κορυφή O, έστω  $υ$ , έχουμε:

$$\frac{(OAM)}{(OAB)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot \nu}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \nu} = \frac{AM}{AB} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$(OAM) = \frac{3}{4}(OAB) = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

### Παρατήρηση

Το εμβαδό του τριγώνου  $OAM$  μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι το  $KM$  είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $OA$  (του τριγώνου  $OAM$ ).

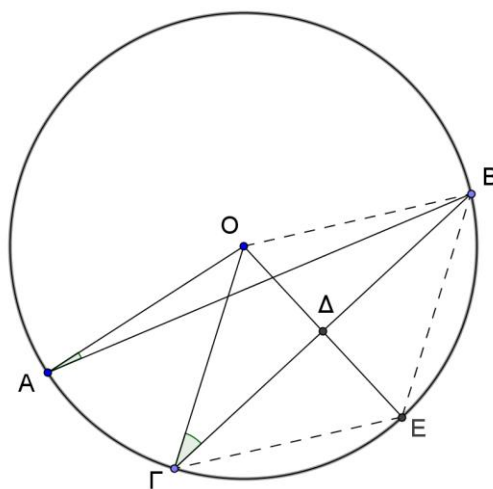
$$\text{Οπότε: } (OAM) = \frac{1}{2} KM \cdot OA = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24.$$

4. Σε κύκλο  $c(O, R)$  (κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ ) δίνονται σημεία  $A, \Gamma$  και  $B$  τέτοια ώστε  $\widehat{OAB} = 10^\circ$  και  $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$ . Τα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $OB$ . Από το σημείο  $O$  φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή  $\Gamma B$  που την τέμνει στο σημείο  $\Delta$ , ενώ τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $E$ .

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{A\Gamma B}$  και το μέτρο του τόξου  $\widehat{A\Gamma}$  σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $OB\Gamma E$  είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

### Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές ( $OA = OB = R$ ), έπεται ότι:

$$\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο  $O\Gamma B$  είναι ισοσκελές ( $O\Gamma = OB = R$ ), έπεται ότι:

$$\widehat{O\Gamma B} = \widehat{O\Gamma B} = 30^\circ.$$

Άρα έχουμε:  $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{O\Gamma B} - \widehat{OBA} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$  και  $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$ .

(β) Το ύψος του τριγώνου  $O\Gamma B$  είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{O\Gamma B}$ , οπότε  $\widehat{O\Delta\Gamma} = 90^\circ - \widehat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ , οπότε θα είναι και  $\widehat{O\Delta E} = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $O\Gamma E$  είναι ισόπλευρο, οπότε  $\Gamma E = O\Gamma = R$ . Επειδή η ευθεία  $OE$  είναι

μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι  $EB = GE = R$ , οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε  $OD = OG \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$ , και  $GD = OG \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$  οπότε

$$(OBE\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

### Παρατήρηση

Ο ρόμβος  $OBE\Gamma$ , αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς  $R$  που το κάθε ένα από αυτά (τα τρίγωνα) έχει εμβαδό  $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$ . Άρα το εμβαδό του ρόμβου θα είναι:

$$(OBE\Gamma) = 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

## Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ και } (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση  $(x, y)$ , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ .

### Λύση

Αν θέσουμε  $\frac{1}{x} = \varphi$  και  $\frac{1}{y} = \omega$ , το σύστημα  $(\Sigma_1)$  γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{array} \right\},$$

οπότε το σύστημα  $(\Sigma_1)$  έχει τη λύση:  $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$ .

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα  $(\Sigma_2)$ , οπότε θα έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}.$$

### Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  και  $z$  ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $y < x < z$ .

(β) Να βρείτε την τριάδα  $(x, y, z)$  για την οποία:  $x^2 + y^2 + z^2 = 680$ .

### Λύση

(α) Επειδή  $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$ , έπεται ότι  $x > y$ .

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει:  $z = 2x + 2y = 12y$ , οπότε  $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$ , οπότε  $z > x$ .

Άρα έχουμε:  $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$ .

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι  $y > 0$ , έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι:  $(x, y, z) = (10, 2, 24)$ .

### Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι  $x$  για τους οποίους οι αριθμοί  $A = 8x + 1$  και  $B = 2x - 3$  είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

### Λύση

Έστω  $A = 8x + 1 = \alpha^2$  και  $B = 2x - 3 = \beta^2$ . Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \quad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

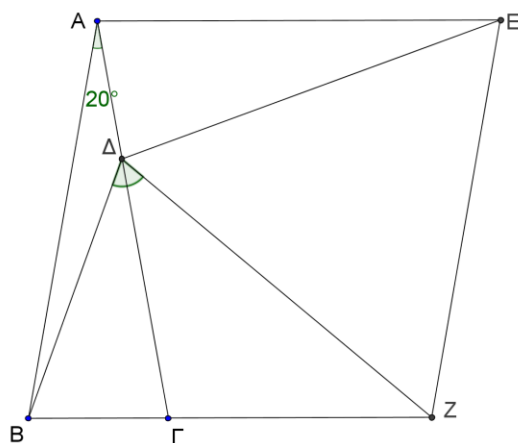
$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\beta^2 = 13 &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{array} \right\} &\text{ή} \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array} \right\} &\text{ή} \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{array} \right\} &\text{ή} \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (7, 3) &\text{ή} (\alpha, \beta) = (-7, -3) &\text{ή} (\alpha, \beta) = (7, -3) &\text{ή} (\alpha, \beta) = (-7, 3). \end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1), προκύπτει ότι:  $x = 6$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 20^\circ$ . Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  πάνω στην πλευρά  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = B\Gamma$ . Από το σημείο  $A$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $AE$  τέτοιο ώστε  $AE \parallel B\Gamma$ ,  $AE = AB$  και με τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $AB$ . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο  $BAEZ$ . Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $B\hat{\Delta}Z$ .

### Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι  $\hat{A} = 20^\circ$  και  $AE \parallel B\Gamma$  έχουμε ότι:

$$\hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta\Delta$  είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ( $AB = EA$ ,  $B\Gamma = A\Delta$ ) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες ( $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 80^\circ$ ).

Επομένως, έχουμε:  $E\Delta = A\Gamma = AB$ ,  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 20^\circ$ .

Επειδή το παραλληλόγραμμο  $BAEZ$  έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ( $AE = AB$ ), είναι ρόμβος, οπότε  $EZ = AB = E\Delta$ , δηλαδή το τρίγωνο  $E\Delta Z$  είναι ισοσκελές.

Επιπλέον, ισχύει:  $\hat{A}\hat{E}\hat{Z} = \hat{B} = 80^\circ$ . Επομένως  $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{Z} - \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $E\Delta Z$  είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι:  $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{E} - \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ , οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο

$BZ\Delta$  ( $ZB = AB = Z\Delta$ ) προκύπτει ότι:  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό  $x$  να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 + 3x + 1}{x} - \frac{27x}{9x^2 + 3x + 1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει η ισότητα;

### Λύση

Επειδή είναι  $x > 0$  θα είναι και  $9x^2 + 3x + 1 > 0$ , οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& (9x^2 + 3x + 1)^2 - 27x^2 \geq 6x(9x^2 + 3x + 1) \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)^2 - 6x(9x^2 + 3x + 1) - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 27x^2 \geq 0. \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (9x^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν  $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ , αφού  $x > 0$ .

### Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma$  της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$ , αν αυτή έχει ρίζες  $x_1 = 1$  και  $x_2 = \beta$ .

#### Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και  $\beta$  είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha(\beta^2 - 1) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι  $\beta = 1$ , τότε  $\alpha + \gamma = -1$  και  $\alpha + \gamma = 0$ , αδύνατο.

Άρα είναι  $\beta \neq 1$ , οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta + 1} = -1 + \frac{1}{\beta + 1}.$$

Επειδή  $\alpha \in \mathbb{Z}$  πρέπει:  $\frac{1}{\beta + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$ . Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$ , οπότε έχουμε:  $\alpha + \gamma = 0$  και  $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$ , το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε  $\alpha \neq 0$ .
- $\beta = -2$ , οπότε έχουμε  $\alpha + \gamma = 2$  και  $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2, \gamma = 4$ . Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών  $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$ .

### Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $x$  για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

#### Λύση

Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους  $\lambda$  έχει λύση ως προς  $x$  η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2 - \lambda)x^2 + (1 + \lambda)x - 2(2 + \lambda) = 0.$$

Αν  $\lambda = 2$  προκύπτει από την εξίσωση η λύση  $x = \frac{8}{3}$ .

Αν  $\lambda \neq 2$ , τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς  $x$ , αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda + 1)^2 + 8(4 - \lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για  $\lambda \geq 3$  και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε  $\Delta < 0$ . Επομένως, αφού ο  $\lambda$  είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι:  $\lambda = 1$ . Τότε η εξίσωση γίνεται  $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$ .

Άρα για  $x = \frac{8}{3}$  το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για  $x = -1 \pm \sqrt{7}$  παίρνει την ακέραια τιμή 1.

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$  (με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ ). Ο κύκλος  $C_B(B, AB)$  (με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $AB$ ), τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $A$ . Ο κύκλος  $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$  (με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $A\Gamma$ ), τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $M$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $N$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία  $K, A, M, N$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

#### Λύση

Έστω  $T$  το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων  $C_A$  και  $C_B$ . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $T, A, \Gamma$  είναι συνευθειακά.

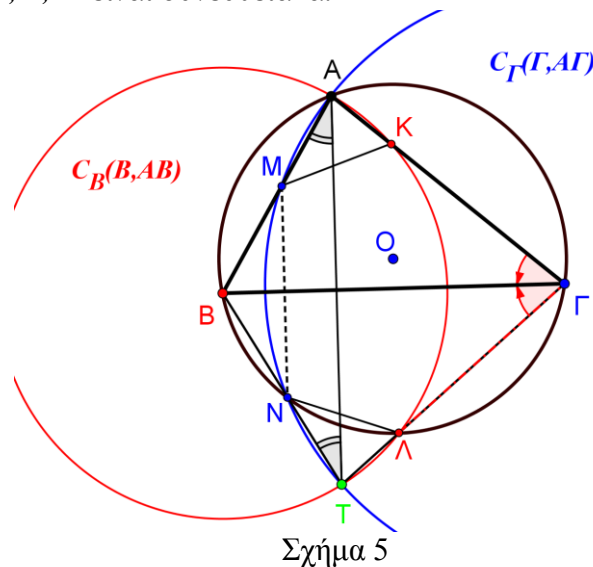
Οι χορδές  $BA$  και  $BA$  του κύκλου  $C$  είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου  $C_A$ , οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο  $C$ ) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\widehat{B\Gamma A} = \widehat{B\hat{\Gamma}A} = \hat{\Gamma} \quad (1).$$

Η  $B\Gamma$  είναι διάκεντρος των κύκλων  $C_B$  και  $C_\Gamma$ , οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής  $AT$  και θα διχοτομεί τη γωνία  $A\hat{\Gamma}T$ , δηλαδή

$$\widehat{B\Gamma A} = \widehat{B\hat{\Gamma}T} = \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Άρα τα σημεία  $T, A, \Gamma$  είναι συνευθειακά.



Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία  $T, N, B$  είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο  $BAT$  είναι ισοσκελές ( $BA = BT$ ). Άρα  $\hat{M}AT = \hat{N}TA$ , οπότε τα αντίστοιχα τόξα  $AN$  και  $MT$  (του κύκλου  $C_r$ ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων  $AN = AM + MN$  και  $MT = TN + MN$ , προκύπτει η ισότητα των τόξων  $AM$  και  $TN$ . Άρα το τετράπλευρο  $MATN$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με  $MN \parallel AT$ .

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο  $KATL$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με  $KL \parallel AT$ . Άρα  $MN \parallel KL$  και κατά συνέπεια το  $MKAN$  είναι τραπέζιο και η  $BΓ$  είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα  $AKM$  και  $TAN$  είναι ίσα. Άρα το  $MKAN$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

### Λύση

Περιορισμός:  $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$  ή  $x \geq 5$ . Η εξίσωση, για  $x \leq 0$  ή  $x \geq 5$ , είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 5x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \quad (E_2)$$

- $(E_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, x \geq 5, \text{ απορρίπτεται.}$$

- $(E_2): x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq -1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}, -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

### Πρόβλημα 2

Αν  $\alpha, \beta$  ακέραιοι και ο αριθμός  $A = \alpha^2 + 2\beta$  είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $B = \alpha^2 + \beta$  ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

### Λύση

Έστω ότι  $A = \alpha^2 + 2\beta = x^2$ , όπου  $x \in \mathbb{Z}$ . Τότε  $\beta = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$ . Επειδή  $\beta \in \mathbb{Z}$ , πρέπει ο

αριθμητής  $x^2 - \alpha^2$  να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι  $\alpha$  και  $x$  είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2 + \beta = \alpha^2 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2} = \frac{x^2 + \alpha^2}{2} = \frac{(x + \alpha)^2 + (x - \alpha)^2}{4} = \left(\frac{x + \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - \alpha}{2}\right)^2,$$



όπου οι αριθμοί  $\frac{x+\alpha}{2}$  και  $\frac{x-\alpha}{2}$  είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι  $\alpha$  και  $x$  είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

### Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου  $a$  η εξίσωση

$$4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & 4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 \\ &= (4x^4 + 8x^3 + a^2x^2) + (4ax^3 + 8ax^2 + a^3x) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= x^2(4x^2 + 8x + a^2) + ax(4x^2 + 8x + a^2) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= (4x^2 + 8x + a^2)(x^2 + ax + 1). \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα  $x^2 + ax + 1$  και  $4x^2 + 8x + a^2$  έχουν πραγματικές ρίζες

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad 64 - 16a^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad a^2 - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2 \quad \text{ή} \quad a = 2. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 4

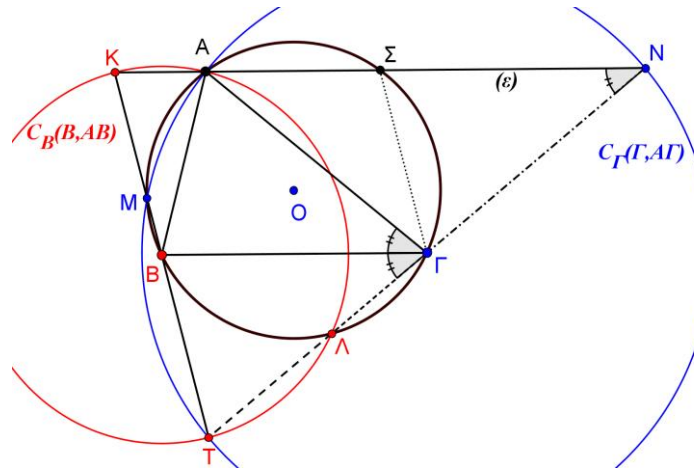
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$  (με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και ευθεία  $(\varepsilon)$  που περνάει από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη στη πλευρά  $B\Gamma$ . Ο κύκλος  $C_B(B, AB)$  (με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $AB$ ), τέμνει την  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $K$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $L$ . Ο κύκλος  $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$  (με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $A\Gamma$ ), τέμνει την  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $N$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $M$ . Οι κύκλοι  $C_B(B, AB)$ ,  $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$  τέμνονται στο σημείο  $T$  και η  $(\varepsilon)$  τέμνει τον  $C(O, R)$  στο σημείο  $\Sigma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Gamma, L, N, T$  είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι  $T\Sigma, K\Gamma, NB$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

### Λύση

(α) Το τρίγωνο  $\Gamma AN$  είναι ισοσκελές ( $\Gamma A = \Gamma N$  ως ακτίνες του κύκλου  $C_\Gamma$ ). Άρα  $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma}$ .



Σχήμα 6

Από την παραλληλία  $(\varepsilon) \parallel BG$  (με τέμνουσα την  $AG$ ) έχουμε:  $\widehat{NAG} = \widehat{AGB} = \widehat{G}$ .

Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει:  $\widehat{ANG} = \widehat{G}$  (1).

Από την ισότητα των χορδών  $AB$  και  $BA$  του κύκλου  $C(O, R)$  (οι χορδές  $AB$  και  $BA$  είναι ακτίνες του κύκλου  $C_B$ ) έχουμε:  $\widehat{AGB} = \widehat{BGA} = \widehat{G}$  (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:  $\widehat{ANG} = \widehat{BGA} = \widehat{G}$ , δηλαδή τα σημεία  $G, N, A$  είναι συνευθειακά.

Η διάκεντρος  $BG$  (των κύκλων  $C_B$  και  $C_G$ ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους  $AT$ . Άρα  $\widehat{AGB} = \widehat{BGT} = \widehat{G}$ . Από την ισότητα των γωνιών  $\widehat{BGT}$  και  $\widehat{BGA}$ , προκύπτει ότι τα σημεία  $G, T, A$  είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία  $G, A, N, T$  είναι συνευθειακά.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία  $B, K, M, T$  είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία  $B$  και  $G$  είναι μέσα των πλευρών  $TK$  και  $TN$ , αντίστοιχα, του τριγώνου  $TKN$ .

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο  $\Sigma$  είναι το μέσο της πλευράς  $KN$  (οπότε οι  $T\Sigma, K\Sigma, NB$  θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου  $TKN$ ).

Πράγματι, το τετράπλευρο  $ABG\Sigma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο  $C(O, R)$ , οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\widehat{G\Sigma N} = \widehat{KAB} \text{ (από το ισοσκελές τραπέζιο } ABG\Sigma \text{)}$$

$$\widehat{KAB} = \widehat{BKA} \text{ (από το ισοσκελές τρίγωνο } ABK \text{)}.$$

Άρα η  $\Sigma G$  είναι παράλληλη προς την  $KB$ , δηλαδή το  $\Sigma$  είναι το μέσο της  $KN$ .

### Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο  $A$  ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία  $G, N, T$ .

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και  $AT, NM, KA$  συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος  $C(O, R)$  είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου  $TKN$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2014**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8 \\ &= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16 : 8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε  $x$  ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν  $200 - x$  ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε  $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$

ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε  $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$  ευρώ. Συνολικά τα δύο

ραδιόφωνα πουλήθηκαν  $200 \cdot \frac{140}{100}$  ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} &= 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800 \\ &\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80. \end{aligned}$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και  $200 - 80 = 120$  ευρώ το ραδιόφωνο Β.

### Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

### Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:  
(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015} = 1 - \frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009}$$
$$\frac{1011}{2023} = 1 - \frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009} > \frac{1012}{2011} > \frac{1012}{2013} > \frac{1012}{2015} > \frac{1012}{2017} > \frac{1012}{2019} > \frac{1012}{2021} > \frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{1012}{2009} < 1 - \frac{1012}{2011} < 1 - \frac{1012}{2013} < 1 - \frac{1012}{2015} < 1 - \frac{1012}{2017} < 1 - \frac{1012}{2019} < 1 - \frac{1012}{2021} < 1 - \frac{1012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός  $\frac{1011}{2023}$  είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

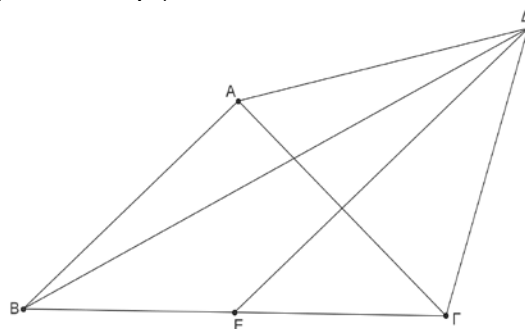
ενώ ο  $\frac{997}{2009}$  είναι ο μικρότερος.

### Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB = AG$ . Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

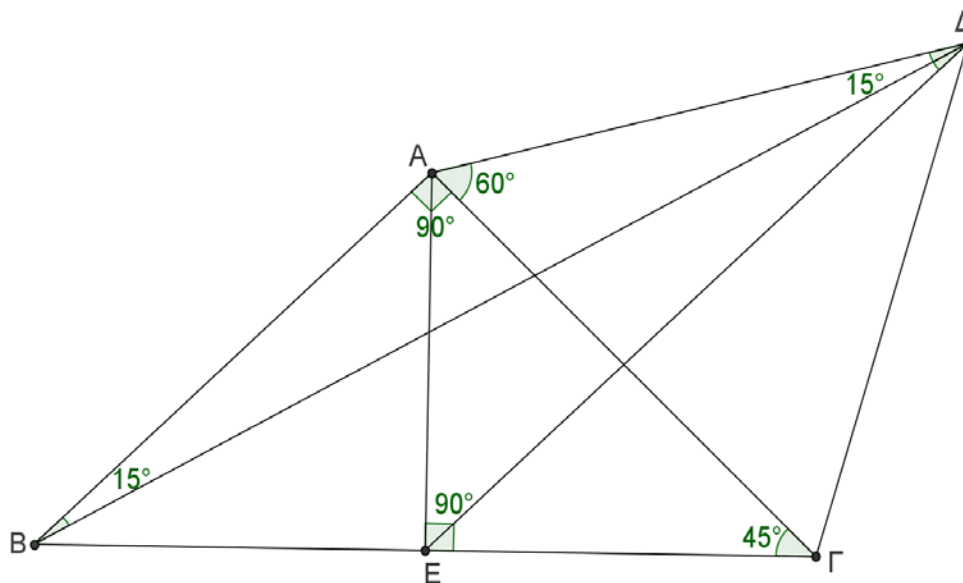
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία  $B\hat{A}E$ .



Σχήμα 1

### Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$  και η διάμεσός του  $AE$  είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο  $AEG$  είναι ορθογώνιο στο  $E$  με μία γωνία του  $45^\circ$ . Επομένως θα έχει  $E\hat{A}\Gamma = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ , οπότε αυτό είναι ισοσκελές με  $EA = EG$ .

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  έχουμε ότι:  $\Delta A = \Delta\Gamma$ . Επομένως τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  ισαπέχουν από τα άκρα  $A$  και  $\Gamma$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AG$ , οπότε η ευθεία  $DE$  είναι η μεσοκάθετη του  $AG$ .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  λαμβάνουμε τις ισότητες  $AB = A\Gamma = A\Delta$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  έχουμε  $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ , οπότε  $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ . Επειδή  $AB\Delta$  ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες  $AB$  και  $DE$  είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία  $AG$ , που τις τέμνει η ευθεία  $B\Delta$ , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$B\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Delta = 15^\circ$$

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$ , αν  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ .

#### Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$  λαμβάνουμε:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256}{81} - 1}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε  $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ , οπότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4 - 1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 + 1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256 \cdot 256 - 81 \cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256 + 81}{81}\right)\left(\frac{256 - 243}{81}\right)} - \frac{6}{13} \\ &= \frac{65536 - 6561}{81^2} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{81^2} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13. \end{aligned}$$

## Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το  $\frac{1}{3}$  από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

### Λύση

Έστω  $n$  το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι  $\frac{4n}{100}$ . Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4n}{100} = \frac{4n}{300} = \frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής  $n$  να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει  $n = 75k$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση  $170 \leq n \leq 230$ , έχουμε:

$$170 \leq n = 75k \leq 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75} \leq k \leq \frac{230}{75} \Leftrightarrow 2 + \frac{20}{75} \leq k \leq 3 + \frac{5}{75} \Leftrightarrow k = 3.$$

Επομένως έχουμε  $n = 75 \cdot 3 = 225$  μαθητές.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευρά  $\alpha$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$  και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z = \Delta\Gamma$ . Αν  $E(AB\Delta)$  και  $E(AB\Delta Z)$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Delta$  και του τετραπλεύρου  $AB\Delta Z$ , αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο  $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$ .

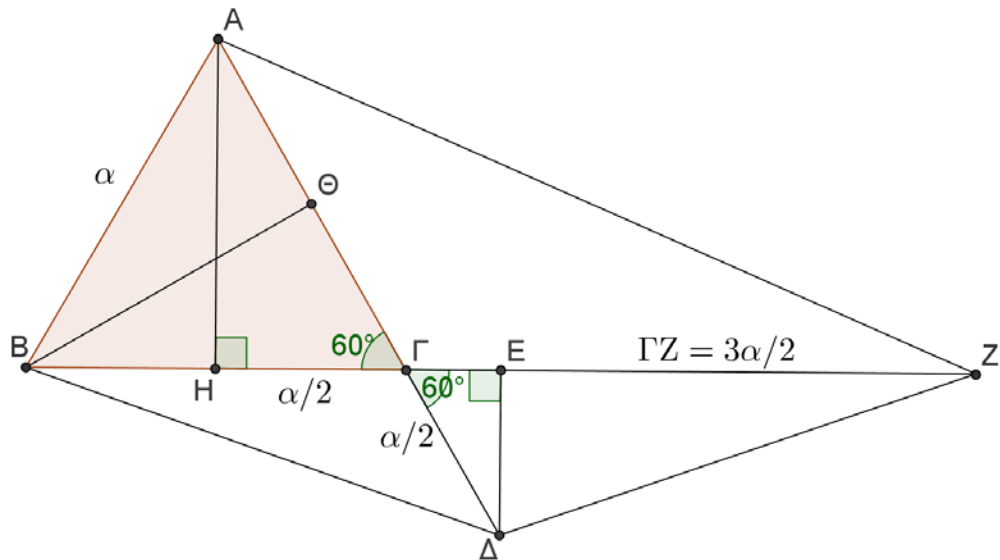
### Λύση

Το τρίγωνο  $AB\Delta$  έχει βάση  $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$  και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο  $AB\Delta Z$  έχουμε:  $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$ .

Στο τρίγωνο  $ABZ$  έχουμε βάση  $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$  και ύψος  $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ , οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο  $B\Delta Z$  έχουμε βάση  $BZ = \frac{5\alpha}{2}$  και ύψος  $\Delta E$  το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα  $AH\Gamma$  και  $\Gamma E\Delta$  ως εξής:



$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε:  $E\Delta = \Gamma\Delta \eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ .

Άρα έχουμε:

$$E(B\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $E(AB\Gamma) = E$ . Τότε  $E(B\Gamma\Delta) = \frac{E}{2}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $B\Theta$  με το τρίγωνο  $AB\Gamma$

και βάση  $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ . Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = E(AB\Gamma) + E(B\Gamma\Delta) = \frac{3E}{2}.$$

Ακόμα έχουμε:  $E(A\Gamma Z) = \frac{3E}{2}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $AH$  με το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και

βάση  $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$ . Τέλος έχουμε  $E(\Gamma\Delta Z) = \frac{3E}{4}$ , γιατί έχει το ίδιο ύψος  $\Delta E$  με το

τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  και βάση  $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$ . Έτσι έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E + \frac{E}{2} + \frac{3E}{2} + \frac{3E}{4} = \frac{15E}{4}$$

και επομένως

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{3E/2}{15E/4} = \frac{2}{5}.$$

## Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι  $\Delta$  κόβεται σε δύο κομμάτια  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  με βάρη  $\beta(\Delta_1)$  και  $\beta(\Delta_2)$ ,

αντίστοιχα, και λόγο βαρών  $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$ . Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι

ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού  $\Delta$  μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ .

### Λύση

Έστω  $\alpha(\Delta)$ ,  $\alpha(\Delta_1)$  και  $\alpha(\Delta_2)$  η αξία των διαμαντιών  $\Delta, \Delta_1$  και  $\Delta_2$ , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1) + \beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά  $100 - 58 = 42\%$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος  $\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$

εξαρτάται από τους λόγους των βαρών  $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$  και  $\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$ , μπορούμε, χωρίς απώλεια

της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι  $\beta(\Delta_1) = 3$  και  $\beta(\Delta_2) = 7$  με  $\beta(\Delta) = 10$ .

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι  $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$  και  $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$  και  $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$ . Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι  $100 - (9 + 49) = 42$ , δηλαδή σε ποσοστό 42%.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}.$$

### Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε  $x = 2014$ , η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^2 + (2x+1)^2} + \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3 - 18x}{x^2 + (2x-1)^2} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2 - (4x)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{5x^2+4x+1} + \frac{2x(x^2+3)}{5x^2-4x+1} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \\ &= 2x(x^2+3) \left[ \frac{1}{5x^2+4x+1} + \frac{1}{5x^2-4x+1} - \frac{2(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right] \\ &= 2x(x^2+3) \left( \frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right) = 2x(x^2+3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 - 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2} = 0$$

### Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

### Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι  $x$  ευρώ και τόμου Β είναι  $y$  ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x + 120y = 4000 \Leftrightarrow 5x + 6y = 200 \quad (1)$$

$$50 \cdot \frac{90x}{100} + 60 \cdot \frac{80y}{100} = 1680 \Leftrightarrow 45x + 48y = 1680 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 6y = 200 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45x + 54y = 1800 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y = 120 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = \frac{1680 - 48y}{45} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 16 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

### Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2 \left[ (x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right],$$

όπου  $x, y$  είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών  $x, y$  διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$ .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\sqrt{B}$  είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών  $x, y$ .

### Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(x^2 + y^2)xy \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy)^2 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \\ B &= 2 \left[ (x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right] = 2 \left[ x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4 \right] \\ &= 2 \left[ 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 \right] = 4 \left( x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 \right) \\ &= 4 \left( x^2 + y^2 + xy \right)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{B} = \left| 2(x^2 + xy + y^2) \right| = 2(x^2 + xy + y^2) \in \mathbb{Q},$$

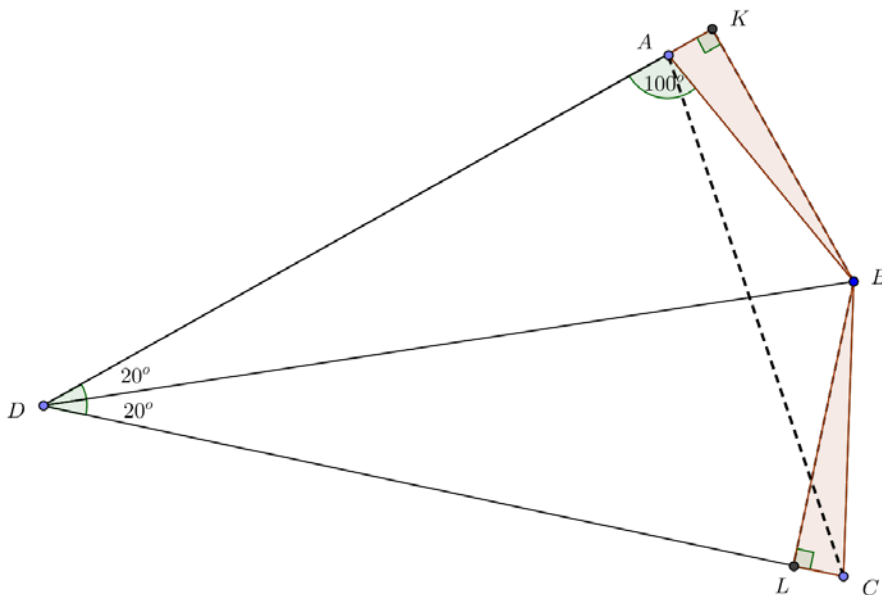
αφού οι αριθμοί  $x, y$  είναι ρητοί και  $x^2 + xy + y^2 = \left( x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ .

#### Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο  $ABCD$  με τη γωνία  $\hat{A} = 100^\circ$  και  $\hat{D} = 40^\circ$ . Αν  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $C\hat{D}A$  και  $DB = DC$ , να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας  $C\hat{A}B$ .

#### Λύση

Εφόσον η  $DB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $C\hat{D}A$ , θα έχουμε ότι  $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$  και από το ισοσκελές τρίγωνο  $DBC$  θα έχουμε ότι  $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$  και επιπλέον έχουμε ότι  $D\hat{B}A = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$ . Αν τώρα φέρουμε τις προβολές  $BK$  και  $BL$ , αφού το  $B$  είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι  $BK = BL$  και  $B\hat{A}K = 80^\circ$ , οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $BAK$  και  $BLC$  είναι ίσα, που σημαίνει ότι  $BA = BC$ . Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο  $BAC$  παίρνουμε ότι:  $C\hat{A}B = 20^\circ$ .



Σχήμα 4

### Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Έστω  $k$  ένας ακέραιος και  $x$  ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \text{ και } B = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\begin{aligned}
A - B &= \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} - \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1} = \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1) - (x^{k+1} + 1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} \\
&= \frac{x^{k+2} + x^k + 1 - 2x^{k+1} - 1}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)},
\end{aligned}$$

οπότε, αφού  $x > 0$  και  $k$  ακέραιος, έχουμε:

$$A - B = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 1 \\ > 0, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, & \text{αν } x = 1 \\ A > B, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases}.$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1)}{(x^{k+1} + 1)^2} = \frac{x^{2k+2} + x^k + x^{k+2} + 1}{(x^{k+1} + 1)^2} \\
&= 1 + \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)^2} = 1 + \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)^2} \geq 1.
\end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν,  $x = 1$ .

Επομένως έχουμε ότι:

$$A = B, \text{ αν } x = 1 \text{ και } A > B, \text{ αν } 0 < x \neq 1.$$

## Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων  $(x, y)$  που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

### Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \tag{1}$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν:  $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ .

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1.  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις:  $(x, y) = (-1, -1)$  ή  $(x, y) = (1, 1)$ .

2.  $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$  ή  $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$  ή  $x = y - 1$ .

$$\text{Για } x = y \pm 1 \text{ η εξίσωση γίνεται: } 2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$ , η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 56$

3.  $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$  ή  $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2$  ή  $x = y - 2$ .

Για  $x = y + 2$  η εξίσωση γίνεται:  $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$ , η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 4$  και έχει ρίζες  $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$  ή  $y = \frac{7}{5}$ .

Άρα προκύπτει η λύση  $(x, y) = (3, 1)$

Για  $x = y - 2$  η εξίσωση γίνεται:  $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$ , η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι  $\Delta = 4$  και έχει ρίζες  $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$  ή  $y = -\frac{7}{5}$ .

Άρα προκύπτει η λύση  $(x, y) = (-3, -1)$ .

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις:  $(-1, -1), (1, 1), (3, 1), (-3, -1)$ .

### Πρόβλημα 3

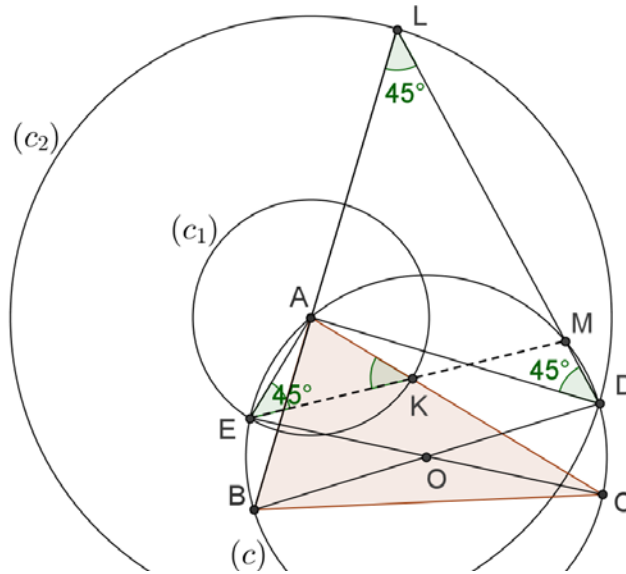
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με  $AB < AC < BC$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο ( $c$ ) (με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και έστω  $D, E$  τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B, C$ , αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο ( $c$ )). Ο κύκλος ( $c_1$ ) (με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AE$ ), τέμνει την  $AC$  στο σημείο  $K$ . Ο κύκλος ( $c_2$ ) (με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AD$ ), τέμνει την προέκταση της  $AB$  (προς το μέρος του  $A$ ) στο σημείο  $L$ . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $EK$  και  $DL$  τέμνονται πάνω στο κύκλο ( $c$ ).

### Λύση

Έστω  $M$  το σημείο τομής της  $DL$  με τον κύκλο ( $c$ ) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $E, K, M$  βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία  $\widehat{EAC}$  είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο  $EC$  του κύκλου ( $c$ ). Το τρίγωνο  $AEK$  είναι ισοσκελές (διότι  $AE, AK$  είναι ακτίνες του κύκλου ( $c_1$ )). Άρα:

$$\widehat{AEK} = \widehat{AKE} = 45^\circ. \quad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία  $\widehat{BAD}$  είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο  $BD$  του κύκλου  $(c)$ , οπότε και η γωνία  $\widehat{DAL}$  είναι ορθή. Το τρίγωνο  $ADL$  είναι ισοσκελές (διότι  $AD, AL$  είναι ακτίνες του κύκλου  $(c_2)$ ). Άρα έχουμε

$$\widehat{ADL} = \widehat{ALD} = 45^\circ. \quad (2)$$

Οι γωνίες  $\widehat{ADM} = \widehat{ADL}$  και  $\widehat{AEM}$  είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο  $(c)$  και βαίνουν στο τόξο  $\widehat{AM}$ , δηλαδή

$$\widehat{AEM} = \widehat{ADL} \quad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα  $\widehat{AEK} = \widehat{AEM} = 45^\circ$ , οπότε τα σημεία  $E, K, M$  είναι συνευθειακά.

#### Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος  $x$  μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

#### Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \quad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x + 240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \quad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει  $x < 30$ , τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \quad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.



Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι  $x < 30$ , οπότε πρέπει να είναι  $x \geq 30$ .

Παρατηρούμε ότι για  $x = 30$ , έχουμε την περίπτωση

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30 - 8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του  $x$  είναι 30.

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

### Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής  $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  με τον άξονα των  $x$  είναι της μορφής  $A_1(x_1, 0)$  και  $A_2(x_2, 0)$ , όπου  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3\alpha - 5, \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \quad (2)$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω  $|x_1| < |x_2|$ , από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι  $x_1, x_2$  πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο  $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$ . Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1, 186), (2, 93), (3, 62), (6, 31), (-1, -186), (-2, -93), (-3, -62), (-6, -31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι:  $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3}$ , οπότε οι δυνατές τιμές για την

παράμετρο  $\alpha \in \mathbb{R}$  είναι οι εξής:  $64, \frac{100}{3}, \frac{70}{3}, 14, -\frac{182}{3}, -30, -20, -\frac{32}{3}$ .

### Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το  $x^2 y^2$  η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε  $x^2 + y^2 - xy = \frac{91}{13} = 7$ . Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη

εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι:  $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$ , οπότε

$xy = 3$  από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 4 \\ x-y = \pm 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x, y) = (3, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -3) \text{ ή } (x, y) = (1, 3) \text{ ή } (x, y) = (-3, -1). \end{aligned}$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έχουμε

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases},$$

οπότε, αν θέσουμε  $\varphi = x^2 + y^2$  και  $\omega = xy$ , λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi^2 - \omega^2 = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi + \omega)(\varphi - \omega) = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi - \omega = 7 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 10 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$ ). Η διχοτόμος  $B\Delta$  τέμνει τον κύκλο  $C(O, R)$ , στο σημείο  $Z$ . Έστω  $E$  τυχόν σημείο του τμήματος  $\Delta\Gamma$ . Η ευθεία  $BE$  τέμνει τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $H$ . Οι ευθείες  $A\Gamma$  και  $ZH$  τέμνονται στο σημείο  $\Theta$ . Επίσης, η ευθεία  $ZE$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα  $B\Delta H\Theta$ ,  $B\Delta EK$  και  $\Delta Z\Theta K$  είναι εγγράψιμα.

### Λύση

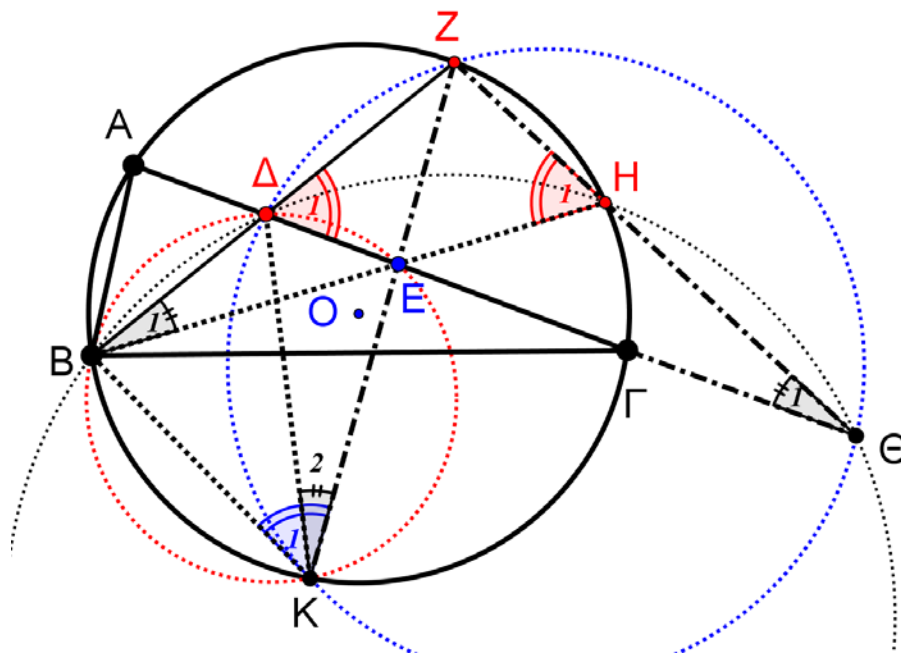
Η γωνία  $\hat{H}_1$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο  $C(O, R)$  και βαίνει στο τόξο  $BZ$ .

Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $A\Delta Z$ . Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών  $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ , προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο  $B\Delta H\Theta$  είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $BKHZ$  έχουμε:  $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$ , η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα  $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$ , μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου  $B\Delta EK$ .**

Από το εγγράψιμο  $B\Delta EK$  έχουμε:  $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$ . Από το εγγράψιμο  $B\Delta H\Theta$  έχουμε:  $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$ . Άρα είναι:  $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$ .

Επομένως και **το τετράπλευρο  $\Delta Z\Theta K$  είναι εγγράψιμο.**

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς  $n$ , που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες  $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$  και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

#### Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1, d_4 = n \text{ και } d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$

$$\Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 640 \Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά  $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$  και επειδή οι  $d_2$  και  $d_3$  είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n = 3 \cdot 159$  έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=4 \cdot 127$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$ , οπότε είναι  $n=7 \cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=9 \cdot 63$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39$ , απορρίπτονται, αφού ο  $n=15 \cdot 39$  έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31$ , οπότε είναι  $n=19 \cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2015**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}, \quad B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11} = 24 : 6 + 25 - 2 \cdot 8 + 8 : 4 + \frac{9}{11} = 4 + 25 - 16 + 2 + \frac{9}{11} \\ &= 15 + \frac{9}{11} = 15 \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = (32 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = 144 : 9 - 1 + \frac{5}{7} = 16 - 1 + \frac{5}{7} \\ &= 15 + \frac{5}{7} = 15 \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε: } A - B = 15 \frac{9}{11} - 15 \frac{5}{7} = 15 + \frac{9}{11} - 15 - \frac{5}{7} = \frac{9}{11} - \frac{5}{7} = \frac{63 - 55}{77} = \frac{8}{77} > 0,$$

οπότε θα είναι  $A > B$ .

**Πρόβλημα 2**

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος  $\alpha = 6$  μέτρα και πλάτος  $\beta = 4$  μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, (ii) το εμβαδό του ορθογωνίου.

**Λύση**

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι  $\Pi = 2(\alpha + \beta) = 2(6 + 4) = 20$  μέτρα και το εμβαδό του είναι  $E = \alpha\beta = 6 \cdot 4 = 24$  τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει  $6 + 6 \cdot \frac{20}{100} = 6 + 1,2 = 7,2$  μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει  $4 - 4 \cdot \frac{5}{100} = 4 - 0,2 = 3,8$  μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$$\Pi' = 2(7,2 + 3,8) = 2 \cdot 11 = 22 \text{ μέτρα, \textit{οπότε η αύξησή της είναι}}$$

$$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2 \text{ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι}$$

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$$E' = 7,2 \cdot 3,8 = 27,36 \text{ τετρ. μέτρα, \textit{οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι}}$$

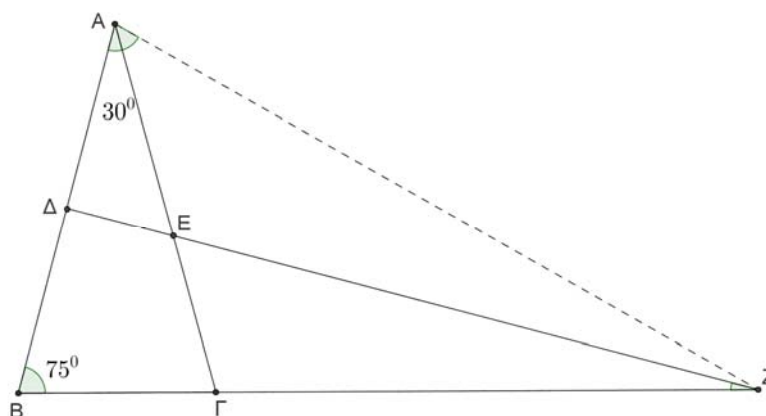
$$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36 \text{ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι}$$

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

### Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Η μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες  $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z}$ .

### Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές  $AB = A\Gamma$  θα έχει τις

$$\text{απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = \frac{180^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Επειδή το  $Z$  είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς  $AB$  θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία  $A$  και  $B$ , δηλαδή είναι  $ZA = ZB$ . Επομένως το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή  $\hat{B}\hat{A}\hat{Z} = \hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 75^\circ$ . Τότε θα είναι  $\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$ .

Η μεσοκάθετη  $Z\Delta$  της πλευράς  $AB$  του τριγώνου  $AZB$  είναι και διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{A}\hat{Z}\hat{B}$ , οπότε θα είναι  $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$ .

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο  $BZ\Delta$  με  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z} = 90^\circ$ , έχουμε:

$$\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z}$  έχουμε:  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = \hat{B}\hat{A}\hat{Z} - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ .

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους  $x-1, x, x+1$  που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο  $x$  είναι πολλαπλάσιο του 10, ο  $x+1$  είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο  $x-1$  είναι πολλαπλάσιο του 3.

#### Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι  $x=10, x+1=11$  είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι  $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$ , οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

**Παρατήρηση.** Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του  $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$ . Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$ , αν  $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$ .

#### Λύση

Έχουμε  $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ , οπότε θα είναι  $a^{-1} = \frac{16}{81}$  και

$$\begin{aligned} A &= \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3} + \frac{1}{33} + \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{\frac{65}{16}}{\frac{16}{16}-\frac{48}{16}} + \frac{1}{33} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{65}{16} + \frac{1}{33} + \frac{9}{27} = \frac{66}{33} + \frac{9}{27} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$



### Πρόβλημα 2°

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος  $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ , αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι  $\alpha = \frac{28}{\nu}$  και  $\gamma = \frac{42}{\nu}$ , όπου  $\nu$  θετικός ακέραιος αριθμός.

#### Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου  $\beta$  των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος  $\nu$  πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο  $\alpha$  είναι:

$$\alpha = 4, \text{ για } \nu = 7, \alpha = 2, \text{ για } \nu = 14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο  $\gamma$  είναι:

$$\gamma = 6, \text{ για } \nu = 7, \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14.$$

Επομένως έχουμε:  $\alpha = 4, \gamma = 6$ , για  $\nu = 7$  και  $\alpha = 2, \gamma = 3$ , για  $\nu = 14$ .

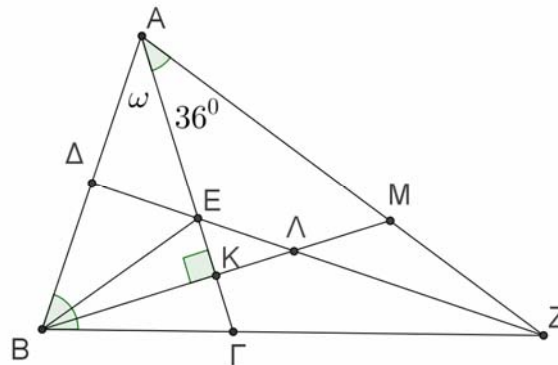
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου  $\overline{\alpha\beta\gamma}$  είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \omega^\circ$ . Η μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Η κάθετη από το σημείο  $B$  προς την πλευρά  $A\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$ , το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta Z$  στο  $\Lambda$  και το ευθύγραμμο τμήμα  $AZ$  στο σημείο  $M$ . Αν είναι  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 36^\circ$ , να αποδείξετε ότι:

- (α)  $\omega = 36^\circ$ ,                      (β)  $AM = \Gamma Z$ ,                      (γ)  $B\Lambda = \Lambda Z$ .

#### Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  θα έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η  $\Delta Z$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $AB$ , το τρίγωνο  $ZAB$  είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές  $ZA = ZB$ , οπότε θα έχουμε:

$$\hat{Z}\hat{A}\hat{B} = \hat{Z}\hat{B}\hat{A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{B} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο  $ABM$  η  $AK$  είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\hat{A}\hat{B}\hat{K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \hat{A}\hat{M}\hat{K}.$$

Επομένως το τρίγωνο  $ABM$  είναι ισοσκελές με  $AM = AB$ . Από υπόθεση είναι  $AB = AG$ . Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο  $ZAB$  έχουμε

$$\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ = \hat{G}\hat{A}\hat{Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο  $GAZ$  είναι ισοσκελές με  $AG = GZ$ . Άρα έχουμε:

$$AM = AB = AG = GZ.$$

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $B\Delta Z$  έχουμε:  $\hat{\Lambda}\hat{Z}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{B} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ , ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\Gamma KB$  έχουμε:  $\hat{\Lambda}BZ = \hat{K}B\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ . Άρα έχουμε:  $\hat{\Lambda}\hat{Z}\hat{B} = \hat{\Lambda}\hat{B}\hat{Z} = 18^\circ \Rightarrow \Lambda BZ$  ισοσκελές τρίγωνο με  $B\Lambda = \Lambda Z$ .

#### Πρόβλημα 4

Αν οι  $x, y, z, w, m$  είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης  $A = (x + y) \cdot z^m - w$ .

#### Λύση

Από τη συνθήκη, οι  $x, y, z, w, m$  είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή  $w = 1$ . Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη  $z^m$ . Παρατηρούμε ότι  $4^5 > 5^4$ , οπότε για τη μέγιστη τιμή  $z = 4, m = 5$ . Οπότε απομένει να έχουμε  $x + y = 2 + 3 = 5$ . Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι  $5 \cdot 4^5 - 1 = 5 \cdot 1024 - 1 = 5119$ .

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή  $w = 5$  και η δύναμη  $z^m$  να είναι η ελάχιστη, οπότε  $z = 1$ . Η μικρότερη τιμή τώρα για το  $x + y$  είναι  $x + y = 2 + 3 = 5$  η ελάχιστη τιμή είναι  $5 \cdot 1^4 - 5 = 0$ .

### Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση:  $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  για τις οποίες υπάρχουν τιμές του  $x$  για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

**Λύση.** Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x + (x+1)(x-1) &< x^2 + x - 2 + \lambda \\ \Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 &< x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1, \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για  $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1$ , εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

### Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα 
$$\begin{cases} x + y - 1 = 6(x - 3)(y + 2) \\ \frac{3}{x - 3} - \frac{4}{y + 2} = 11 \end{cases}$$

#### Λύση

Οι περιορισμοί είναι  $x \neq 3, y \neq -2$ . Θέτουμε  $\frac{1}{x - 3} = a$  και  $\frac{1}{y + 2} = b$ , οπότε

$$x + y - 1 = (x - 3) + (y + 2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} ..$$

Επομένως, με περιορισμό  $a, b \neq 0$  το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 3(6 - b) - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases},$$

οπότε  $x = \frac{16}{5}, y = -1$ , που πληρούν τους περιορισμούς.

### Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι  $x, y$  που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p,$$

όπου  $p$  πρώτος θετικός ακέραιος.

#### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:  $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x + 1) + y(y + 1) = p$  (1)

Όμως οι αριθμοί  $x(x + 1), y(y + 1)$  ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει  $p = 2$ , αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι  $x(x + 1), y(y + 1)$  **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x + 1) + y(y + 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1) = 2 \\ y(y + 1) = 0 \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x(x + 1) = 0 \\ y(y + 1) = 2 \end{cases} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x + 1) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ και } y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1.$$

Επομένως το σύστημα  $(\Sigma_1)$  έχει τις λύσεις:

$$(x, y) = (1, 0) \text{ ή } (1, -1) \text{ ή } (-2, 0) \text{ ή } (-2, -1)$$

Ομοίως, για το σύστημα  $(\Sigma_2)$  βρίσκουμε τις λύσεις:

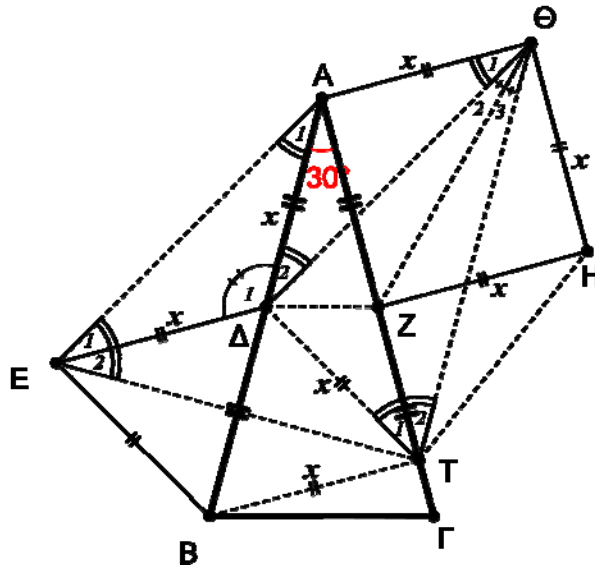
$$(x, y) = (0, 1) \text{ ή } (-1, 1) \text{ ή } (0, -2) \text{ ή } (-1, -2).$$

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Έστω  $\Delta, Z$  τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο  $B\Delta E$  και τετράγωνο  $AZH\Theta$ . Η μεσοκάθετη του  $B\Delta$ , τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $T$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο  $AET$  είναι ισόπλευρο,  
 (β) τα τρίγωνα  $ATB$  και  $\Delta\Theta T$  είναι ίσα.

#### Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές ( $\Delta A = \Delta E = x$ ) με  $\hat{\Delta}_1 = 120^\circ$ . Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^\circ.$$

Η  $ET$  είναι μεσοκάθετη της  $B\Delta$ , άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο  $B\Delta E$ ) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{\hat{B\hat{E}\Delta}}{2} = 30^\circ.$$

Στο τρίγωνο  $AET$  έχουμε,  $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^\circ$  και  $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η  $AB$  είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της  $ET$ . Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \quad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα  $A\Delta\Theta$  και  $A\Delta T$  είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \quad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^\circ - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα  $ATB$  και  $\Delta\Theta T$  είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

**Παρατήρηση.** Επιπλέον, στο σημείο  $Z$  τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου  $\Delta\Theta T$ , δηλαδή το σημείο  $Z$  είναι έκκεντρο του τριγώνου  $\Delta\Theta T$ .

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει ότι  $x^2 + 2y^2 = 4$ , να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $A = \sqrt{x^2 + 5x^2 + 2y^2} + \sqrt{x^4 + 32y^2}$  είναι σταθερή, ανεξάρτητη των  $x, y$ .

### Λύση

Έχουμε ότι  $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$ , οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2.$$

Επιπλέον  $x^4 + 32y^2 = (4 - 2y^2)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4(y^2 + 2)^2$ , οπότε

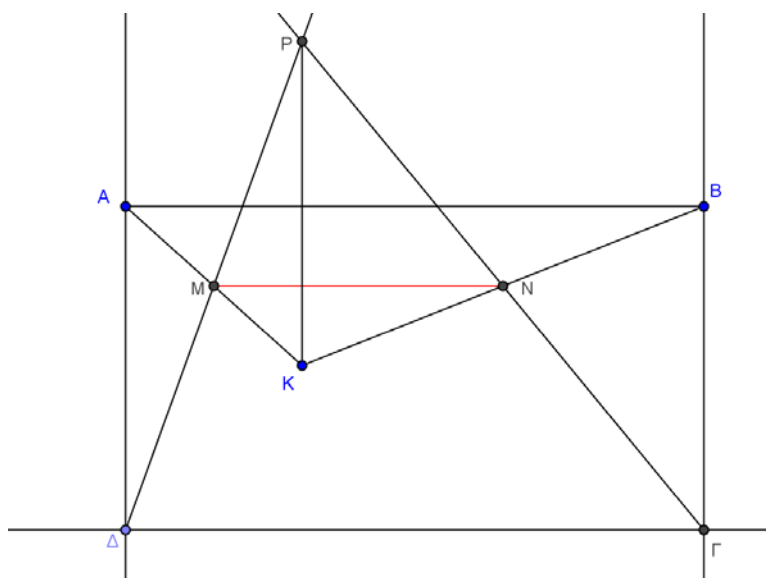
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2 + 2).$$

Συνεπώς  $A = x^2 + 2 + 2(y^2 + 2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$ .

### Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και σημείο  $Κ$  στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα  $Μ, Ν$  των  $ΑΚ, ΒΚ$  αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες  $ΓΝ, ΔΜ$  τέμνονται στο σημείο  $Ρ$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $ΡΚ$  είναι κάθετη στην ευθεία  $ΓΔ$ .

### Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο  $ΑΚΒ$  το τμήμα  $ΜΝ$  συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα  $ΜΝ // ΑΒ$  και  $ΜΝ = \frac{ΑΒ}{2}$ . Όμως το  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε  $ΑΒ = ΓΔ$ , επομένως  $ΜΝ = \frac{ΓΔ}{2}$  και επιπλέον  $ΑΒ // ΓΔ$  οπότε και  $ΜΝ // ΓΔ$ . Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα  $ΡΜΝ, ΡΔΓ$  είναι όμοια με λόγο

ομοιότητας  $\frac{\Gamma\Delta}{\text{MN}} = 2$ , οπότε θα είναι και  $\frac{\text{P}\Delta}{\text{PM}} = 2$  οπότε το  $\text{M}$  είναι το μέσον του  $\text{P}\Delta$ . Άρα στο τετράπλευρο  $\text{P}\Delta\text{K}$  οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως,  $\text{PK} \parallel \text{A}\Delta$ , οπότε, αφού  $\text{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$ , έπεται ότι η ευθεία  $\text{PK}$  είναι κάθετη στην ευθεία  $\Gamma\Delta$ .

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός  $a$  είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς  $\frac{5a}{2}$ ,  $\frac{a+2}{5}$ ,  $a$ .

(β) Να βρείτε το υποσύνολο  $\text{A}$  των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3}, \quad 2(3x-a) + x > 2(x+1) - a, \quad a-x \leq 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του  $x$  που περιέχονται στο σύνολο  $\text{A}$ .

### Λύση

(α) Αφού  $a > 0$ , έχουμε:  $\frac{5a}{2} - a = \frac{3a}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} > a$ . Επίσης, έχουμε

$a > \frac{a+2}{5} \Leftrightarrow 5a > a+2 \Leftrightarrow 4a > 2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$ , που ισχύει αφού ο  $a$  είναι θετικός

ακέραιος Άρα  $a > \frac{a+2}{5}$ .

Επομένως έχουμε τη διάταξη:  $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$ .

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3} \Leftrightarrow 9x-3a-3x \leq 4x+2a \Leftrightarrow 2x \leq 5a \Leftrightarrow x \leq \frac{5a}{2}$ .
- $2(3x-a) + x > 2(x+1) - a \Leftrightarrow 6x-2a+x > 2x+2-a \Leftrightarrow 5x > a+2 \Leftrightarrow x > \frac{a+2}{5}$ .
- $a-x \leq 2(x-a) \Leftrightarrow a-x \leq 2x-2a \Leftrightarrow 3a \leq 3x \Leftrightarrow x \geq a$ .

Επειδή ισχύει ότι  $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$ , το υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο συναληθεύουν οι

τρεις ανισώσεις είναι:  $\text{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq \frac{5a}{2}, a \in \mathbb{Z}_+^* \right\} = \left[ a, \frac{5a}{2} \right], a \in \mathbb{Z}_+^*$ .

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του  $x$  που περιέχονται στο σύνολο  $\text{A}$  θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου  $\text{A}$ . Αν αυτοί είναι  $m$  και  $M$ , αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο  $\text{A}$  είναι:  $(M-m)+1$ . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ . Τότε  $\text{A} = [2k, 5k]$ , οπότε περιέχει  $3k+1 = \frac{3a}{2} + 1$  ακέραιους.
- $a = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ . Τότε  $\text{A} = \left[ 2k+1, 5k + \frac{5}{2} \right] = \left[ 2k+1, 5k+2 + \frac{1}{2} \right]$ , οπότε περιέχει  $3k+1+1 = \frac{3(a-1)}{2} + 2 = \frac{3a}{2} + \frac{1}{2}$  ακέραιους.

#### Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα  $\Sigma$  στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma: \begin{cases} \alpha\sqrt[3]{b} - c = \alpha \\ b\sqrt[3]{c} - \alpha = b \\ c\sqrt[3]{a} - b = c \end{cases}$$

#### Λύση

Αν κάποιος από τους  $a, b, c$  είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε  $a = b = c = 0$  είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι  $a, b, c > 0$  και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο  $c$  είναι μεγαλύτερος ή ίσος των  $a, b$ . Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε  $\alpha\sqrt[3]{b} = \alpha + c \geq 2\alpha$ , οπότε  $\sqrt[3]{b} \geq 2$ , δηλαδή  $b \geq 8$  (1).

Οπότε θα είναι  $c \geq 8$  (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του  $b$ ). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε  $b = b\sqrt[3]{c} - \alpha \geq 2b - \alpha$ , οπότε  $\alpha \geq b$  και από την (1) έχουμε  $\alpha \geq 8$ . Η τελευταία τώρα δίνει  $c = c\sqrt[3]{a} - b \geq 2c - b$ , οπότε  $b \geq c$ .

Επομένως, τελικά έχουμε  $b \geq c \geq a \geq b$ , δηλαδή  $a = b = c$ . Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε  $a\sqrt[3]{a} = 2a$  και αφού  $a > 0$ , έχουμε ότι  $a = 8$ , οπότε  $a = b = c = 8$  είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι  $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (8, 8, 8)\}$ .

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις

$y = \frac{1}{x}$  και  $y = -\frac{1}{x}$ . Μία ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον κλάδο της υπερβολής  $y = \frac{1}{x}$  που

βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία  $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right), B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ ,

και τους δύο κλάδους της υπερβολής  $y = -\frac{1}{x}$  στα σημεία  $\Gamma\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma}\right)$  και  $\Delta\left(\delta, -\frac{1}{\delta}\right)$

με  $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$ . Να αποδείξετε ότι:

(i)  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(ii) τα τρίγωνα  $OAG$  και  $OBD$  έχουν ίσα εμβαδά.

#### Λύση

Η ευθεία  $\varepsilon_{AB}$  που περνάει από τα σημεία  $A$  και  $B$  έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{\alpha} = \left( \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \right) (x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

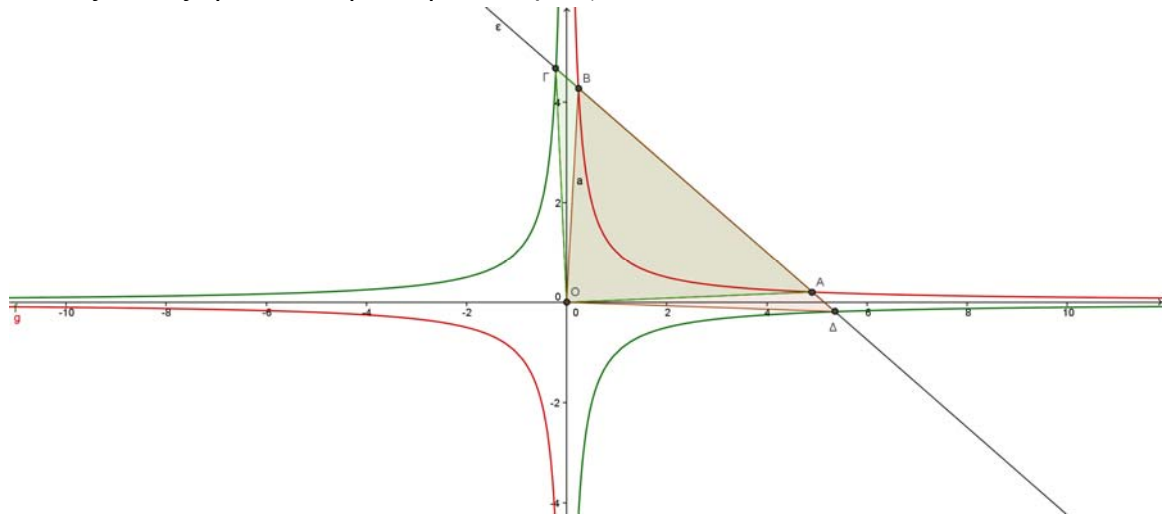
Η ευθεία  $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$  που περνάει από τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  έχει εξίσωση:

$$y + \frac{1}{\gamma} = \left( \frac{-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\gamma}}{\delta - \gamma} \right) (x - \gamma) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\gamma\delta} x - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες  $\varepsilon_{AB}$  και  $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$  συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα:  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  έχουν τετμημένες  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  και  $\frac{\gamma + \delta}{2}$  οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  έχουν κοινό μέσο, έστω  $M$ . Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  που προκύπτει από τις συνθήκες  $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$ , ισχύει ότι:

$$A\Gamma = AM + M\Gamma = BM + M\Delta = B\Delta,$$

οπότε τα τρίγωνα  $OAG$  και  $OBA$  έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή  $O$ , οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

## Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 2}.$$

### Λύση

Αν θέσουμε

$$A(x) = 3x^2 - 3x + 4, \quad B(x) = x^2 + 3, \quad \Gamma(x) = 2x^2 - 3x + 5, \quad \Delta(x) = 2x^2 + 2,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$A(x) + B(x) = \Gamma(x) + \Delta(x) \Leftrightarrow A(x) - \Delta(x) = \Gamma(x) - B(x) = P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση



$$\begin{aligned}
& \sqrt{\Delta(x)+P(x)}+\sqrt{B(x)}=\sqrt{B(x)+P(x)}+\sqrt{\Delta(x)} \\
& \Leftrightarrow \Delta(x)+P(x)+B(x)+2\sqrt{B(x)[\Delta(x)+P(x)]}= \\
& \quad (x)+P(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)[B(x)+P(x)]} \\
& \Leftrightarrow B(x)[\Delta(x)+P(x)]=\Delta(x)[B(x)+P(x)] \\
& \Leftrightarrow P(x)[B(x)-\Delta(x)]=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \text{ ή } B(x)-\Delta(x)=0 \\
& \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0 \\
& \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.
\end{aligned}$$

### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους  $x, y$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $x^3 + y^3 - x - y = pq$ , όπου  $p, q$  πρώτοι αριθμοί.

#### Λύση

Γράφουμε  $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1)$ , το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το  $(x-1)x(x+1)$ .

Όμοια ο 6 διαιρεί το  $(y-1)y(y+1)$ , οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το  $pq$ , και αφού  $p, q$  πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει  $pq = 6$ .

Επομένως η εξίσωση γίνεται  $(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) = 6$ . Αν τώρα  $x, y \geq 2$ , τότε  $(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) \geq 6 + 6 = 12$ , οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο  $y$ . Τότε όμως  $(y-1)y(y+1) = 0$ , οπότε  $(x-1)x(x+1) = 6$  και αφού  $x$  μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει  $x = 2$ . Επομένως οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{(2, 0), (2, 1), (0, 2), (1, 2)\}.$$

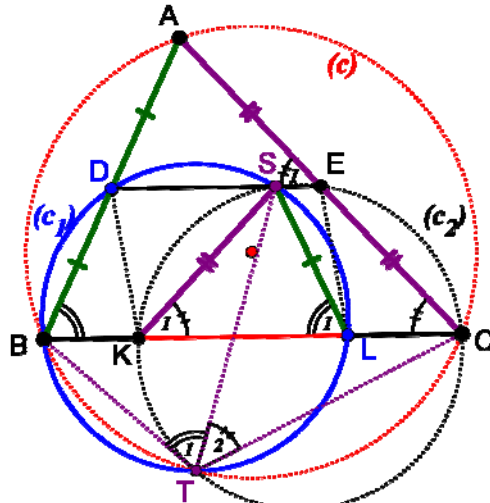
### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ABC$  (με  $AB < AC < BC$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  και έστω  $D, E$  τα μέσα των  $AB$  και  $AC$  αντίστοιχα. Έστω  $T$  τυχόν σημείο του μικρού τόξου  $BC$  και  $(c_1), (c_2)$  οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων  $BDT$  και  $CET$  αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  τέμνουν την  $BC$  στα σημεία  $L$  και  $K$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $DELK$  είναι παραλληλόγραμμο.

#### Λύση

Η  $DE$  συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα  $DE \parallel BC$ , άρα το τετράπλευρο  $DELK$ , είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο  $DELK$  παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $DE = KL = \frac{BC}{2}$ .

Έστω ότι ο κύκλος  $(c_1)$ , τέμνει το τμήμα  $DE$  στο σημείο  $S$ . Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος  $(c_2)$  περνάει από το σημείο  $S$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο  $CEST$  είναι εγγράμμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $ABTC$ , έχουμε:  $\hat{A} + \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 180^\circ$  (1).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $SLTB$ , έχουμε:  $\hat{T}_1 = \hat{L}_1$  (2).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $DSL B$ , έχουμε:  $\hat{L}_1 = \hat{B}$  (3).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε:  $\hat{T}_2 = \hat{C}$  και επειδή  $\hat{E}_1 = \hat{C}$  (από την παραλληλία  $DE \parallel BC$ ), συμπεραίνουμε ότι  $\hat{T}_2 = \hat{E}_1$  και κατά συνέπεια το τετράπλευρο  $CEST$  είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία  $\hat{E}_1$  είναι ίση με την απέναντι εσωτερική  $\hat{T}_2$ ). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $DE$ .**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα  $DSL B$  και  $SECK$  είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL = DB = \frac{AB}{2}, \quad SK = EC = \frac{AC}{2},$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών  $\hat{L}_1 = \hat{B}$  και  $\hat{K}_1 = \hat{C}$ , συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα  $ABC$  και  $SLK$  είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας  $\frac{1}{2}$ ).

Τελικά προκύπτει ότι:  $DE = KL = \frac{BC}{2}$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2016**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

**Λύση**

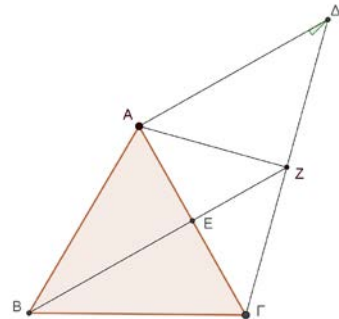
$$\begin{aligned} A &= \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{-20}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{-5}\right)^3 + \left(\frac{-8}{2}\right)^3 - \left(\frac{9}{-3}\right)^3 \\ &= (-4)^2 + (-3)^3 + (-4)^3 - (-3)^3 = (-4)^2 + (-4)^3 = 16 - 64 = -48. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς  $\alpha$ . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ =  $\alpha$  κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

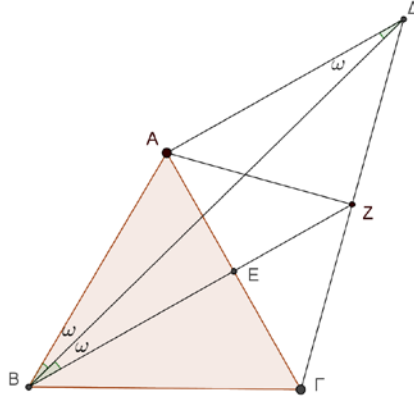
(α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΖΓ.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΒ.



**Λύση**

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή ΖΑ = ΖΓ.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι  $AD = a$ , το τρίγωνο  $ABD$  είναι ισοσκελές με

$$\hat{A}LB = \hat{A}LD \quad (1)$$

Όμως έχουμε

$$\hat{B}LD = \hat{B}LG + \hat{G}LD = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \quad (2)$$

Επομένως από το τρίγωνο  $ABD$  έχουμε:

$$\hat{A}LB = \hat{A}LD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

**Εναλλακτικά**, μετά τη σχέση (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Η διάμεσος  $BE$  του ισόπλευρου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά  $AG$ , όπως είναι κάθετη και η  $AD$ , από την υπόθεση. Επομένως είναι  $BE \parallel AD$ , οπότε

$$\hat{A}LB = \hat{L}BE \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\hat{A}LD = \hat{L}BE. \quad (4)$$

Άρα η  $BD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}BE$ , οπότε θα έχουμε

$$\hat{A}LD = \hat{L}BE = \frac{\hat{A}BE}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η  $BE$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , δηλαδή  $\hat{A}BE = \frac{\hat{A}B\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε  $\hat{A}LB = 15^\circ$ .

### Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση  $\alpha\%$ . Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά  $\beta\%$ . Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του  $\beta$  συναρτήσει της τιμής του  $\alpha$ .

### Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$\begin{aligned} 540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} &= 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \beta = 540\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100} \cdot \beta &= 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha \cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}. \end{aligned}$$

#### Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού  $A$  είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του  $A$ , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

#### Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: 88, 89, 98, 99. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο  $A$  πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός  $A$  είναι διψήφιος, τότε πρέπει  $A = 88$ , ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί 8888, 9988 έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι 8988, 9888, οπότε η ελάχιστη τιμή του  $A$  είναι 8988.

### Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Αν  $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$  και  $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

## Λύση

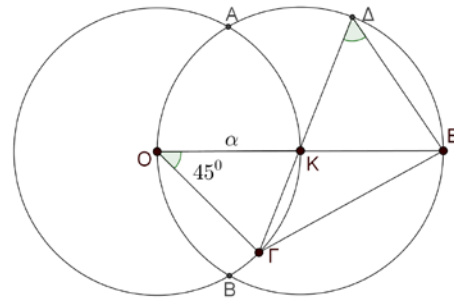
Έχουμε ότι  $\alpha = \frac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^\nu : 2^{2\nu-1} = 4^\nu : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2$ .

και  $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$ , οπότε είναι  $\alpha^2 = 4$ ,  $\alpha^3 = 8$  και

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8 - 10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

## Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $OK = \alpha$  και δύο κύκλοι ακτίνας  $\alpha$  που έχουν κέντρα στα σημεία  $O$  και  $K$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ . Το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στο τόξο  $KB$  και η ευθεία  $\Gamma K$  τέμνει τον κύκλο  $C_2$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $\alpha$  στο σημείο  $\Delta$ . Η ευθεία  $OK$  τέμνει τον κύκλο  $C_2$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $\alpha$  στο σημείο  $E$ . Αν είναι  $\widehat{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$ , να βρείτε :

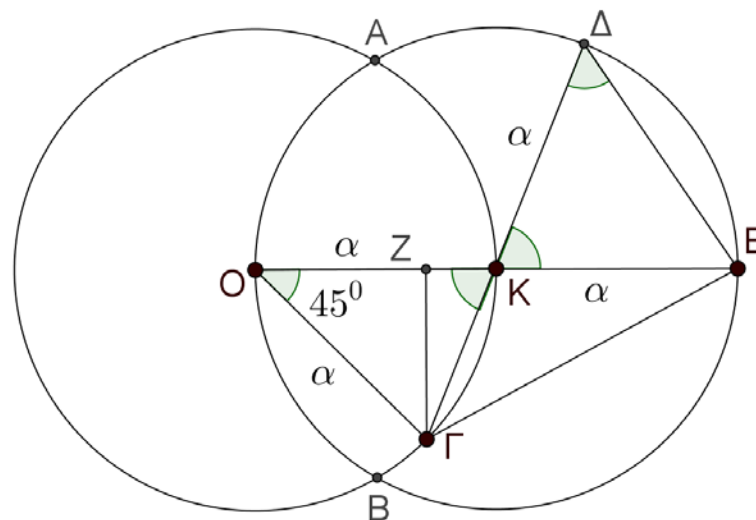


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{K\hat{\Delta}E}$ ,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου  $O\Gamma E$  συναρτήσει του  $\alpha$ .

## Λύση

(α) Το τρίγωνο  $OK\Gamma$  έχει  $OK = O\Gamma = \alpha$ , οπότε είναι ισοσκελές με βάση  $K\Gamma$ . Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\widehat{OK\hat{\Gamma}} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες  $\widehat{K\hat{\Delta}E}$  και  $\widehat{OK\hat{\Gamma}}$  είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\widehat{\Delta KE} = \widehat{OK\Gamma} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία  $\widehat{K\Delta E}$  είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου  $\Delta KE$  (έχει  $K\Delta = KE = \alpha$ ), οπότε

$$\widehat{K\Delta E} = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω  $\Gamma Z$  το ύψος του τριγώνου  $ΟΓΕ$  από την κορυφή  $\Gamma$ . Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο  $ΟΓZ$  έχουμε

$$\Gamma Z = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου  $ΟΓΕ$  είναι

$$E(ΟΓ\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

### Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

#### Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά  $x$ , όπου  $x \geq 4$ , από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε  $\frac{450}{x}$  καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το  $x$  είναι  $x=4$  ή  $x=5$ . Όμως η τιμή  $x=4$  απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση  $450:4$  δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι  $x=5$  και ο Γιώργος πήρε συνολικά  $\frac{720}{5} = 144$  καραμέλες.

### Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία  $a, b, c, d$ , ισχύει ότι:  $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα  $\frac{A}{36}$ ,  $\frac{B}{45}$  υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να



βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων  $a, b, c, d$ .

**Λύση**

(α) Ισχύει ότι  $\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < \frac{3959}{36} < \frac{3960}{36} = 110$ . Επίσης η μικρότερη τιμή του  $\overline{5c3d}$

λαμβάνεται όταν  $c = d = 0$ , άρα

$$\frac{B}{45} = \frac{\overline{5c3d}}{45} > \frac{5030}{45} > 111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία  $a, b, c, d$  ισχύει ότι:

$$\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} = \frac{B}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους,

το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι  $\frac{A}{36} < 110 < 111 < \frac{B}{45}$ .

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109 \leq \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι  $\overline{3a5b} > 109 \cdot 36 \Leftrightarrow \overline{3a5b} > 3924$ , οπότε πρέπει  $a = 9$  και ο  $b$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 112 \cdot 45 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 5040,$$

οπότε  $c = 0$  και το  $d$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19. \quad (1)$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \quad (2)$$

**Λύση.**

Έχουμε:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19 \Leftrightarrow 4x \leq 20 \Leftrightarrow x \leq 5.$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \Leftrightarrow 6x - 3 - 23 > 4x - 21 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για  $\frac{5}{2} < x \leq 5$ , οπότε οι ακέραιες τιμές του  $x$  που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3, 4 και 5.

## Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος  $A = \overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \dots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_\nu \cdot 10^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot 10^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ ,  $\nu \geq 2$ , ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

### Λύση

Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1, 2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

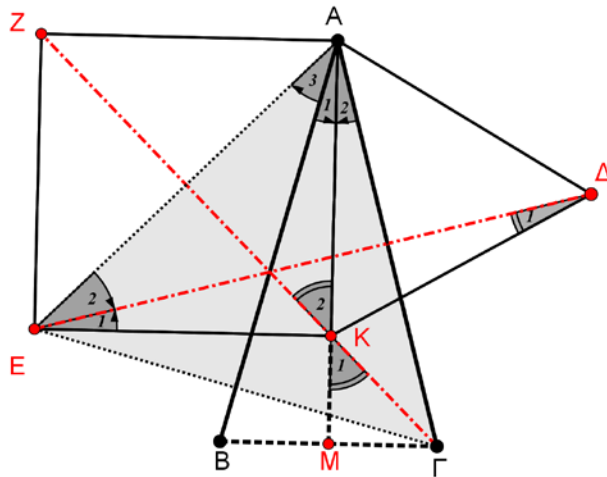
- 1, 1, 2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112. Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός  $A = 4112$  διαιρείται με το 8.
- 1, 1, 2, 2, 2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112. Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός  $A = 22112$  διαιρείται με το 8.

Άρα υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του  $A$  που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος 4112 και ο πενταψήφιος 22112.

## Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Στο ύψος  $AM$  θεωρούμε σημείο  $K$  ώστε  $MB=MG=MK$ . Με βάση την  $AK$  κατασκευάζουμε τετράγωνο  $AKEZ$  (στο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AM$ , που περιέχει το  $B$ ) και ισόπλευρο τρίγωνο  $AK\Delta$  (στο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AM$ , που περιέχει το  $\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta E$  και  $\Gamma Z$ , τέμνονται πάνω στην  $AB$ .

### Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία  $\Gamma, K, Z$  είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $M\Gamma K$ , έχουμε:  $\hat{K}_1 = 45^\circ$ .

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AKZ$ , έχουμε:  $\hat{K}_2 = 45^\circ$ .

Άρα τα σημεία  $\Gamma, K, Z$  είναι συνευθειακά, οπότε η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος της  $AE$  (\*) και κατά συνέπεια το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές ( $\Gamma A = \Gamma E$ ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ \text{ (διότι } \widehat{A} = 30^\circ) \text{ και } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ \text{ (διότι } \widehat{EAK} = 45^\circ).$$

Άρα  $\widehat{EAG} = 60^\circ$  και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο AEG είναι ισόπλευρο.

$$\text{Επιπλέον } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3.$$

Άρα η AB είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{EAG}$  (\*\*).

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει  $\widehat{ΔΚΕ} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ .

Άρα  $\widehat{Δ}_1 + \widehat{Ε}_1 = 15^\circ$ . Επειδή όμως  $\widehat{Ε}_1 + \widehat{Ε}_2 = 45^\circ$ , καταλήγουμε  $\widehat{Ε}_2 = 30^\circ$ ,

δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{AEG}$  (\*\*\*) .

Από τα συμπεράσματα (\*),(\*\*) και (\*\*\*) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο  $k$ , ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

#### Λύση

Θέτουμε  $n = 2014$  και τότε έχουμε:  $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$  και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό  $A$  στη μορφή  $A = \varphi(n)^2 - k$ , όπου  $\varphi(n)$  πολυώνυμο μεταβλητής  $n$  με ακέραιους συντελεστές και  $k$  θετικός ακέραιος.

Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (n^2 - 9)(n^2 - 4)(n^2 - 1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 = \\ &= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2 - 7)^2 - 36 \end{aligned}$$

Επομένως, αν στον αριθμό  $A$  προσθέσουμε θετικό ακέραιο  $k = 36$ , παίρνουμε ότι  $A + 36 = n^2(n^2 - 7)^2 = (n^3 - 7n)^2$ , που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το  $k$  είναι η τιμή  $k = 36$ .

#### Σημείωση.

Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό  $k = B^2 - A$ , με  $B^2 > A$ , όπου  $B$  θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος αριθμός είναι ο  $k = A^2 - A$ .

### Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακεραίου αριθμού  $\alpha$  για την οποία ο ακέραιος

$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$

είναι πρώτος.

**Λύση**  
Έχουμε

$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2 = (\alpha^2 + 18 + 8\alpha + 1)(\alpha^2 + 18 - 8\alpha - 1)$$

$$= (\alpha^2 + 8\alpha + 19)(\alpha^2 - 8\alpha + 17) = [(\alpha + 4)^2 + 3][(\alpha - 4)^2 + 1].$$

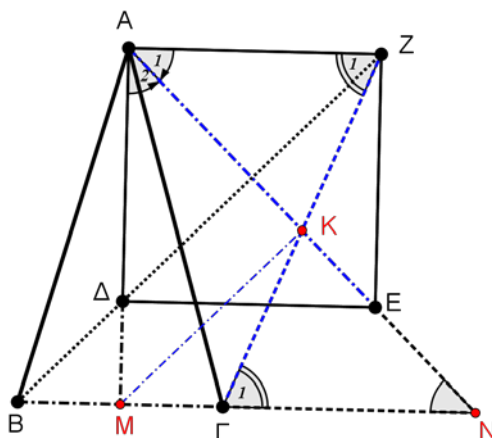
Επειδή  $(\alpha + 4)^2 + 3 \geq 3$ , ο ακέραιος A θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha - 4)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

### Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε MB = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

**Λύση**



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{N} = 45^\circ$ , συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως  $MA=MN \Leftrightarrow M\Delta+\Delta A=M\Gamma+\Gamma N$  και με δεδομένη την ισότητα  $M\Gamma=M\Delta$ , καταλήγουμε:  $\Delta\Delta=\Gamma N=AZ$ .

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α)  $\Gamma N=AZ$  β)  $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1$  και γ)  $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$ .

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε  $KZ=K\Gamma$  και  $KA=KN$ .

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ).

### Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \quad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 > 4\alpha^2 + 4\alpha,$$

που ισχύει.

Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου  $\alpha$  το  $\alpha+1$ , παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \quad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha+2} \cdot \frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

#### Σημείωση.

Η ανισότητα (1) θα μπορούσε να προκύψει μέσω της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αφού  $\alpha > 0$ , ως εξής:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{1 \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

αφού είναι  $\frac{\alpha+1}{\alpha} \neq 1$ . Ομοίως προκύπτουν και οι ανισότητες (2), (3) και (4), οπότε

τελειώνουμε την άσκηση όπως παραπάνω.

### Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z, w$  που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ x + \frac{1}{x} - w = 2, \quad y + \frac{1}{y} - w = 2, \quad z + \frac{1}{z} + w = 2, \quad y + \frac{1}{z} + w = 2 \right\}.$$

#### Λύση

Έστω

$$(\Sigma) \left\{ x + \frac{1}{x} = w + 2 \quad (1), \quad y + \frac{1}{y} = w + 2 \quad (2), \quad z + \frac{1}{z} = 2 - w \quad (3), \quad y + \frac{1}{z} = 2 - w \quad (4) \right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left( 1 - \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } xy = 1.$$

**Περίπτωση 1:** Έστω  $x = y$ . Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{z} \Leftrightarrow (z - x) \left( 1 + \frac{1}{zx} \right) = 0 \Leftrightarrow x = z \text{ ή } xz = -1.$$

- Αν  $x = z$ , τότε  $x = y = z$  και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$w = 0 \text{ και } x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow w = 0 \text{ και } x = 1. \text{ Επομένως, σε αυτή την}$$

υποπερίπτωση έχουμε τη λύση  $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$ .

- Αν  $xz = -1$ , τότε οι  $x, z$  θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

**Περίπτωση 2:** Έστω  $xy = 1$ . Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z - \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1, \text{ αφού } z \geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

- Για  $x = 1$ , προκύπτει πάλι η λύση  $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$ .
- Για  $x = 2$ , προκύπτει η λύση  $(x, y, z, w) = \left( 2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

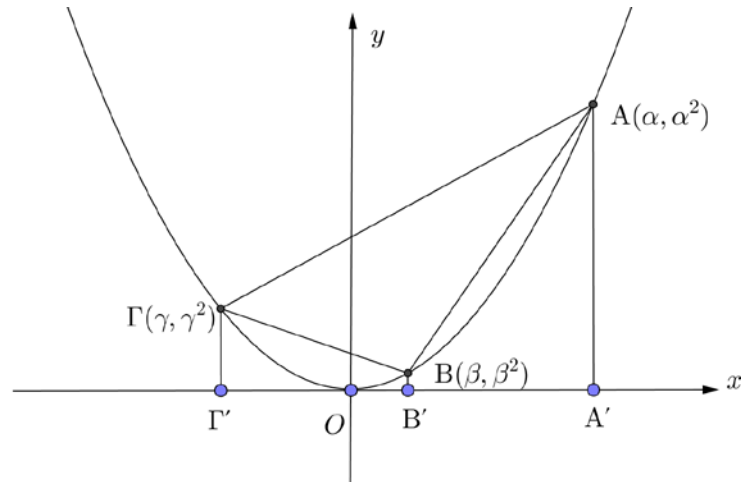
### Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση  $y = x^2$  και τα σημεία της  $A, B$  και  $\Gamma$  με τετμημένες  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$ . Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση του  $\omega$ .

### Λύση

Αν είναι  $A', B'$  και  $\Gamma'$  οι προβολές των σημείων  $A, B$  και  $\Gamma$  πάνω στον άξονα  $x'x$ , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E(AB\Gamma) &= E(AG\Gamma'A') - E(ABB'A') - E(B\Gamma\Gamma'B') \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2} \cdot 2\omega - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \cdot \omega - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \cdot \omega = \frac{\omega}{2} \cdot (2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \beta^2 - \gamma^2) \\ &= \frac{\omega}{2} \cdot (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \beta^2) = \frac{\omega}{2} \cdot [\alpha^2 - \beta^2 - (\beta^2 - \gamma^2)] = \\ &= \frac{\omega}{2} \cdot [(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\beta - \gamma)(\beta + \gamma)] = \frac{\omega^2}{2} \cdot (\alpha + \beta - \beta - \gamma) = \frac{\omega^2}{2} \cdot 2\omega = \omega^3 \end{aligned}$$



Σχήμα 5

### Σημείωση.

Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β' Λυκείου. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 E(AB\Gamma) &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{BA}, \mathbf{B\Gamma}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha - \beta & \alpha^2 - \beta^2 \\ \gamma - \beta & \gamma^2 - \beta^2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} [(\alpha - \beta)(\gamma^2 - \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma - \beta)] \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\gamma + \beta - \alpha - \beta) \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2} \omega \cdot (-\omega)(-2\omega) = \omega^3.
 \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Στο ύψος  $AD$  θεωρούμε σημείο  $K$  ώστε  $\Delta B = \Delta \Gamma = \Delta K$ . Οι προεκτάσεις των υψών  $BE$  και  $\Gamma Z$  τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $N$ ,  $K$  και  $M$  είναι συνευθειακά.

### Λύση

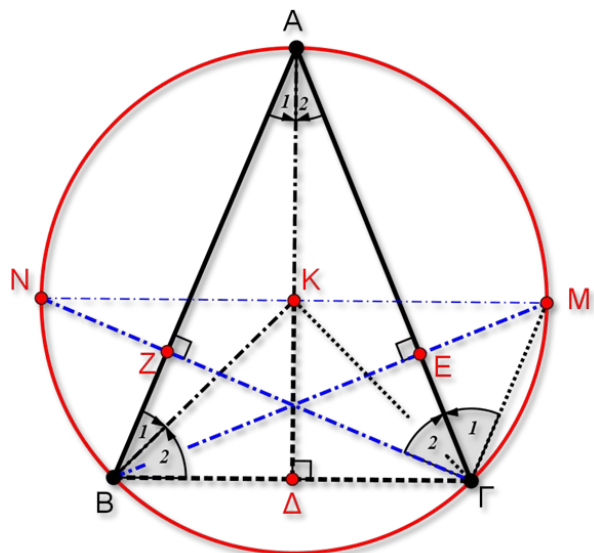
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι  $KA = KB = KG$  (δηλαδή ότι το σημείο  $K$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $B\Delta K$ , έχουμε:  $\hat{B}_2 = 45^\circ$ .

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  (αφού  $\hat{A} = 45^\circ$ ) έχουμε:

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ.$$

Άρα  $\hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{B}_2 = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ = \hat{A}_1$ , δηλαδή το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές με  $KA=KB$ . Όμοια αποδεικνύουμε ότι  $KA=KG$ , οπότε το  $K$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



Σχήμα 6

Η γωνία  $\hat{\Gamma}_1$  είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο AM.

Άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{MBA} = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$  (από το ορθογώνιο τρίγωνο AEB).

Ισχύει επίσης  $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$  (από το ορθογώνιο τρίγωνο AΓZ).

Επομένως  $\hat{M\hat{\Gamma}N} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$ , δηλαδή η MN είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο K του κύκλου.

### Πρόβλημα 3

Έστω  $P(x)$  πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α)  $P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$ .

(β) Όλοι οι συντελεστές του  $P(x)$  είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του  $P(5)$ .

### Λύση

Το πολυώνυμο  $Q(x) = P(x) - x^2$  είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x) = P(x) - x^2 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x) = ax^4 - 10ax^3 + (35a+1)x^2 - 50ax + 24a$$

Άρα είναι

$$P(5) = 24a + 25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:



$$a \leq 10, -10a \leq 10, 35a + 1 \leq 10, -50a \leq 10, 24a \leq 10$$

$$\Leftrightarrow a \leq 10, a \geq -1, a \leq \frac{9}{35}, a \geq -\frac{1}{5}, a \leq \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \leq 24a \leq \frac{9 \cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} + 25 \leq 24a + 25 \leq \frac{9 \cdot 24}{35} + 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{101}{5} \leq 24a + 25 \leq \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \leq P(a) \leq \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του  $P(a)$  είναι  $\frac{101}{5}$  και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του  $P(a)$  είναι  $\frac{1091}{35}$ .

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό  $A = 14^7 + 14^2 + 1$ .

#### Λύση

Θέτουμε για ευκολία  $n = 14$  και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό  $A = n^7 + n^2 + 1$ . Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο  $n^2 + n + 1$  είναι παράγοντάς του  $A$  ως εξής:

$$\begin{aligned} A &= n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 = \\ &= n(n^3 + 1)(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 = n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1 = \\ &= (n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1) \end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός  $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$  διαιρεί τον αριθμό  $A$ . Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2017**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
 78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
 11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left( -\frac{1}{4} \right)^{-2}.$$

**Λύση**

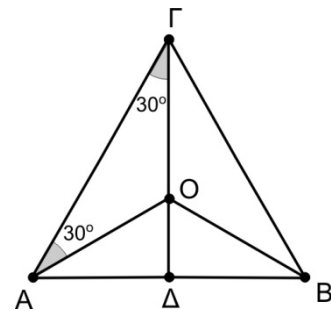
$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left( -\frac{1}{4} \right)^{-2} \\ &= \left( \left( \frac{-10}{2} \right)^3 + \left( \frac{-15}{-3} \right)^3 \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - (-4)^2 \\ &= \left( (-5)^3 + (+5)^3 \right) \cdot (-2)^3 + (-4)^2 - (-4)^2 \\ &= (-5^3 + 5^3) \cdot (-2)^3 + 16 - 16 = 0 \cdot (-2)^3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά AB. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση AB στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη AB και το σημείο Δ είναι το μέσο της AB.

(β) Αν  $\widehat{O\hat{A}\Gamma} = \widehat{O\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ .



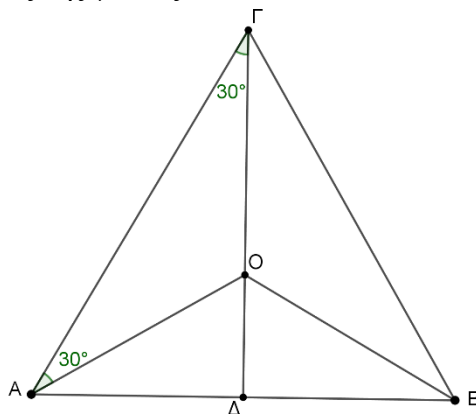
**Λύση**

(α) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση τη AB, έχουμε ότι  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $O A = O B$ , δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του AB, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του AB. Επομένως τέμνει κάθετα την AB στο μέσο της, δηλαδή  $A\Delta = \Delta B$ .

(β) Το τρίγωνο  $\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $\Gamma$  και έχει  $\hat{A}\Gamma\Delta = 30^\circ$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ . Επομένως

$$\hat{\Delta}\hat{A}O = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma - \hat{O}\hat{A}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \hat{O}\hat{A}\Gamma,$$

οπότε η  $AO$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}\hat{A}\Gamma$ .



Σχήμα 1

### Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

### Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι:  $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$  ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού

μαζί με το ΦΠΑ είναι:  $1200 + 288 = 1488$  ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι:  $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$  ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ,}$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι:  $1562,4 : 12 = 130,2$  ευρώ.

### Πρόβλημα 4

Ο τετρανήπιος θετικός ακέραιος  $A$  διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς  $A$ .

### Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο  $A$  έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα  $x$ . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι  $15 + x$  και διαιρείται με το 9 μόνον για  $x = 3$ . Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο  $A$  έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα  $x$ . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι  $18 + x$  και διαιρείται με το 9 μόνον για  $x = 0$  ή  $x = 9$ . Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα  $x$ . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι  $21+x$  και διαιρείται με το 9 μόνον για  $x=6$ . Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα  $x$ . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι  $24+x$  και διαιρείται με το 9 μόνον για  $x=3$ . Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός  $\nu$  είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left( -\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018.$$

### Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left( -\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018 \\ &= \left( \left( -\frac{10}{2} \right)^{2\nu+1} + \left( +\frac{15}{3} \right)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + \left( -\frac{8}{2} \right)^{2\nu} - \left( -\frac{4}{1} \right)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left( (-5)^{2\nu+1} + (+5)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + (-4)^{2\nu} - (-4)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left( -5^{2\nu+1} + 5^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + 2018 = -5^{2\nu-1} (5^2 - 1) 2017^2 + 2018 \\ &= -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 2017^2 + 2018 = -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 4068289 + 2018. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το  $\frac{1}{3}$  του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

### Λύση

Ονομάζουμε Α, Β το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε  $x$  λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα  $\frac{2}{3}$  του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε  $2x$  από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι  $(2x) \cdot B = 80$ . Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι  $A = 9B$ . Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι  $xA = x(9B) = 9xB = 9 \cdot 40 = 360$ . Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι  $360 + 80 = 440$  τ.μ.

### Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο  $A$  χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο  $A$  που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

#### Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό  $A$  μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω  $k \geq 1$  φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση  $k = 0$  γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

$$\text{πολ.}6+4 = \text{πολ.}3+3+1 = \text{πολ.}3+1,$$

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2, 3, ..., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του  $A$ .

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό  $A$  που διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους αριθμούς 2, 4, 7, 8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4, 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

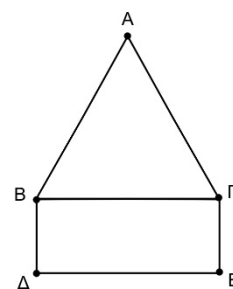
### Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο πλευράς  $\alpha$ . Το σχήμα  $B\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά

$$B\Delta = \frac{\alpha}{2}.$$

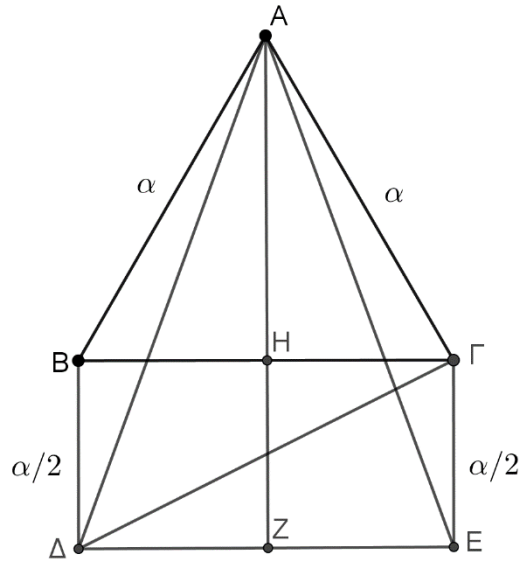
(α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = A\text{E}$ .

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $\alpha$  τα εμβαδά των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $A\Delta\Gamma$ .



#### Λύση

(α) (1<sup>ος</sup> τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή  $A$  προς την πλευρά  $B\Gamma$  την τέμνει στο  $H$  και έστω επίσης τέμνει την πλευρά  $\Delta E$  του ορθογωνίου στο  $Z$ . Τότε η  $AH$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $B\Gamma$ , οπότε  $BH = H\Gamma$ . Επειδή η  $AZ$  είναι κάθετη προς την πλευρά  $B\Gamma$  θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της  $\Delta E$ . Επομένως και τα τετράπλευρα  $B\Delta ZH$ ,  $HZE\Gamma$  είναι ορθογώνια, οπότε  $BH = \Delta Z$  και  $H\Gamma = ZE$ . Επομένως θα είναι και  $\Delta Z = ZE$ . Έτσι η  $AZ$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $\Delta E$ , οπότε  $A\Delta = A\text{E}$ .



Σχήμα 2

(2<sup>ος</sup> τρόπος) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουν ίσες πλευρές  $AB = A\Gamma = \alpha$  και  $B\Delta = \Gamma E = \frac{\alpha}{2}$ , ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \widehat{A\hat{\Gamma}B} + \widehat{B\hat{\Gamma}E} = \widehat{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν και  $A\Delta = AE$ .

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z),$$

όπου

$$(ABH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}, \quad (B\Delta ZH) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2(\sqrt{3}+1)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης  $(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta)$ . Όμως είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}, \quad (B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}, \quad (AB\Delta) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2(2\sqrt{3}+1)}{8}.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

### Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε  $x$  τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου  $x$  είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι  $16x$ . Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι  $90 \cdot 11$ . Συνεπώς πρέπει  $16x = 90 \cdot 11$ , που δίνει  $x = \frac{90 \cdot 11}{16} = \frac{45 \cdot 11}{8}$ , που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες  $(x, y, z)$  ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

### Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) &= 3 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε  $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$ .

Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 & \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases} \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \Leftrightarrow \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι  $(3, 1, -1), (1, 1, -1), (3, 0, -1), (1, 0, -1)$ .

### Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο  $A$  χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο  $A$  που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

### Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό  $A$  μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω  $k \geq 1$  φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση  $k = 0$  γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.



Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός A δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο A δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,..., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του A.

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό A που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του A να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

#### Πρόβλημα 4

Στη πλευρά  $BΓ$  ισοπλεύρου τριγώνου  $ΑΒΓ$ , θεωρούμε σημείο  $M$  (διαφορετικό από το μέσο της  $BΓ$ ) και ευθεία  $(ε)$  που περνάει από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη στη  $BΓ$ . Ο κύκλος  $C_1$  (που έχει κέντρο το μέσο  $K$  του  $MB$  και ακτίνα  $KB$ ) τέμνει την  $AB$  στο  $Δ$ . Ο κύκλος  $C_2$  (που έχει κέντρο το μέσο  $Λ$  του  $MΓ$  και ακτίνα  $ΛΓ$ ) τέμνει την  $ΑΓ$  στο  $E$ . Οι ευθείες  $KΔ$  και  $ΛE$  τέμνουν την ευθεία  $(ε)$  στα σημεία  $Π$  και  $P$  αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες  $KΔ$  και  $ΛE$  τέμνονται στο σημείο  $T$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΠPT$  είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους  $α$  της πλευράς  $BΓ$ .

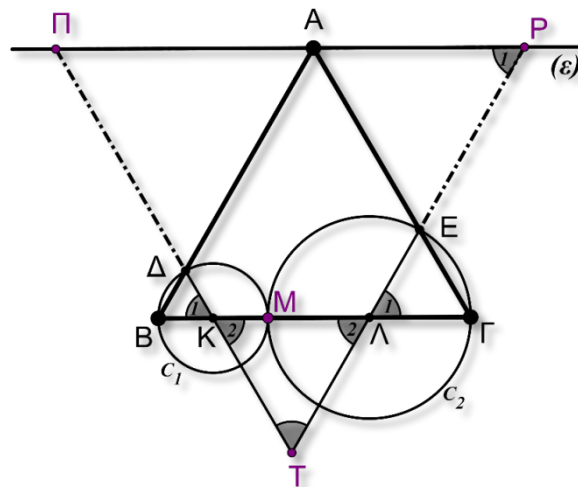
#### Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο  $TKΛ$  είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο  $KΒΔ$  είναι ισοσκελές (διότι  $KΔ,KB$  ακτίνες του κύκλου  $C_1$ ). Επειδή όμως  $\hat{B} = 60^\circ$ , συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο  $KΒΔ$  είναι (τελικά) ισόπλευρο.

Οπότε  $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 60^\circ$ .

Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα  $\hat{Λ}_1 = \hat{Λ}_2 = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $KΒΔ$  είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$KΛ = MK + MΛ = \frac{MB}{2} + \frac{MΓ}{2} = \frac{MB + MΓ}{2} = \frac{BΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον  $AP \parallel BG$ , συμπεραίνουμε ότι  $\hat{L}_1 = \hat{P}_1 = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $TP\Pi$  είναι ισόπλευρο (διότι και  $\hat{T} = 60^\circ$ ).

Το τετράπλευρο  $APAB$  είναι παραλληλόγραμμο (διότι  $\hat{B} = \hat{L}_1 = \hat{P}_1 = 60^\circ$ ).

Άρα το τρίγωνο  $TP\Pi$  είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου  $TP\Pi$  είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2 \sqrt{3}}{16}.$$

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $x^3 - x - 1 = 0$ , να αποδείξετε ότι ο  $\rho$  είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

### Λύση

Εφόσον ο αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $x^3 - x - 1 = 0$ , θα είναι  $\rho \neq 0$  και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

$$\text{Άρα } (\rho^3)^3 = (\rho + 1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$$

(\*) ισχύει  $\rho \neq 0$ .

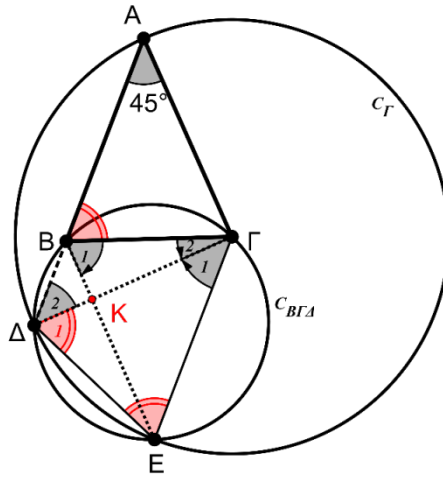
### Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} = 45^\circ$ . Ο κύκλος  $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$  (που έχει κέντρο το  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma A$ ) τέμνει την προέκταση της  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  (έστω  $C_{B\Gamma\Delta}$ ) τέμνει τον  $C_\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma E\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

### Λύση

Το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές, διότι  $\Gamma A$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ακτίνες του κύκλου  $C_\Gamma$ . Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45^\circ \quad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου  $C_G$ . Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \quad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο  $C_G$ . Άρα η εξωτερική του γωνία  $\hat{B}$  ισούται με την απέναντι εσωτερική  $\hat{E}$ . Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67,5^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:  $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$ .

Άρα  $BD \parallel GE$ , οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί  $BE = \Delta\Gamma$  (διαγώνιες του ισοσκελούς τραpezίου) και  $\Gamma\Delta = \Gamma E$  (ακτίνες του  $C_G$ ). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα  $\hat{B}_1 = \Gamma_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67,5^\circ$  και επειδή  $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$ , καταλήγουμε  $\hat{\Gamma}_2 = 22,5^\circ$  και κατά συνέπεια  $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67,5^\circ + 22,5^\circ = 90^\circ$ .

### Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $v \geq 2$ , ο αριθμός

$$A = \frac{v^7 + v^6 + v^5 + 1}{v^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

### Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} v^7 + v^6 + v^5 + 1 &= v^5(v^2 + 1) + ((v^2)^3 + 1) = v^5(v^2 + 1) + (v^2 + 1)(v^4 - v^2 + 1) \\ &= (v^2 + 1)(v^5 + v^4 - v^2 + 1) = (v^2 + 1)[v^4(v + 1) - (v + 1)(v - 1)] \\ &= (v^2 + 1)(v + 1)(v^4 - v + 1). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$A = \frac{v^7 + v^6 + v^5 + 1}{v^2 + 1} = (v + 1)(v^4 - v + 1).$$

Για  $v \geq 2$  είναι  $v+1 \geq 3$  και  $v^4 - v + 1 = v(v^3 - 1) + 1 \geq 2 \cdot 7 + 1 = 15$ , οπότε ο ακέραιος  $A$  είναι σύνθετος.

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

#### Λύση

Έστω  $x, y$  τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι  $xy = 2(x+y)$  (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του  $d$  υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι  $d^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \stackrel{(1)}{=} (x+y)^2 - 4(x+y)$ .

Ισχύει ότι  $(x+y)^2 \geq 4xy$  (αφού είναι ισοδύναμη με  $(x-y)^2 \geq 0$ ) και λόγω της (1) έχουμε ότι  $4xy = 8(x+y)$ , άρα  $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$ , οπότε  $x+y \geq 8$ . (2)

Θέτουμε  $x+y = t$  και τότε  $d^2 = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4 \stackrel{(2)}{\geq} (8-2)^2 - 4 = 32$ .

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι  $\sqrt{32}$ , και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε:

$$f(a) = 0 \text{ και } f(f(x)) = xf(x) + a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του  $a$  και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

#### Λύση

Θέτοντας  $x = a$  στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(f(a)) = af(a) + a \Rightarrow f(0) = a.$$

Για  $x = 0$  στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:  $f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(a) = a$ , οπότε από τη σχέση  $f(a) = 0$  έπεται ότι  $a = 0$ .

Για  $a = 0$  πρέπει να υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 0$  και  $f(f(x)) = xf(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής  $f(x) = x^c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f(x^c) = x \cdot x^c \Rightarrow (x^c)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2} = x^{c+1} \Rightarrow c^2 = c+1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$

### Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0.$$

#### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7 + x^6 + x^5 + 1 &= x^5(x^2 + 1) + ((x^2)^3 + 1) = x^5(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^5 + x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)[x^4(x+1) - (x+1)(x-1)] \\ &= (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο  $x^2 + 1$  δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο  $x^4 - x + 1$  είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε  $\alpha \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$\alpha^4 - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + 1 = 0.$$

Όμως για  $\alpha \leq 0$  ή  $\alpha \geq 1$  η παράσταση  $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$  είναι μη αρνητική, οπότε  $f(\alpha) + 1 > 0$ .

Για  $0 < \alpha < 1$  είναι  $\alpha^4 > 0$ ,  $-\alpha + 1 > 0$  και  $\alpha^4 - \alpha + 1 > 0$ . Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} = 36^\circ$ . Ο κύκλος  $C_1(\Gamma, \Gamma A)$  (που έχει κέντρο το  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma A$ ) τέμνει την προέκταση της  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  (έστω  $C_2$ ) τέμνει τον  $C_1$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι  $AE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  και ότι η  $\Delta\Gamma$  εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

#### Λύση

Το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές, διότι  $\Gamma A$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ακτίνες του κύκλου  $C_1$ . Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$  είναι ισοσκελές, διότι  $\Gamma E$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ακτίνες του κύκλου  $C_1$ . Άρα:

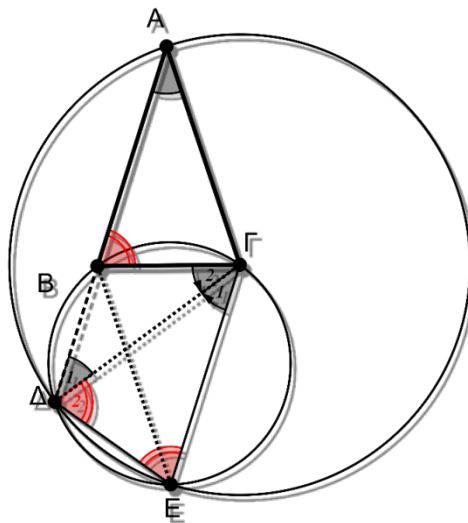
$$\hat{E} = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο  $B\Gamma E\Delta$  είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο  $C_2$ . Άρα η εξωτερική του γωνία  $\hat{B}$  ισούται με την απέναντι εσωτερική  $\hat{E}$ . Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:  $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 36^\circ$ .

Άρα  $B\Delta \parallel \Gamma E$ , οπότε το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ( $BE$  και  $\Gamma\Delta$ ) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο  $EB\Gamma$  είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία  $E$  και  $A$  ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης  $B\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  οπότε η  $AE$  θα είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .



Σχήμα 5

Από την παραλληλία  $B\Delta \parallel \Gamma E$  συμπεραίνουμε ότι  $\hat{B} = B\hat{\Gamma}E = 72^\circ$ , οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $EB\Gamma$  είναι ίσα.

Επειδή όμως  $\hat{A} = \hat{D}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 36^\circ$  και η  $\hat{\Gamma}_2$  σχηματίζεται από τη  $B\Gamma, \Delta\Gamma$  (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η  $\Delta\Gamma$  θα είναι εφαπτομένη.

#### Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $9^{8^{8^9}}$ ,  $8^{9^{9^8}}$ .

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι  $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$ . Αφού  $9 > 8$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[8^{\frac{8^9}{9^8}}]{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι  $6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$ ,

που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Θα αποδείξουμε ότι  $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$ . Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι  $8^{8^9} \ln 9 > 9^{9^8} \ln 8$ . Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9} \ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8} \ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9 \ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8 \ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού  $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9 \ln 8 > 9^8 \ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2 \ln 3}{3 \ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι  $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$ , η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού  $2 \ln 2 = \ln 4 > \ln 3$ .

Από την άλλη αρκεί  $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$ , που ισχύει.

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2018**





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**79<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**10 Νοεμβρίου 2018**

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left( \frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right).$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left( \frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right) \\ &= \left( \left( \frac{-8}{2} \right)^3 + \left( \frac{-12}{-3} \right)^3 + 10 \right) \cdot \left( \left( \frac{-8}{2} \right)^2 + \left( \frac{-12}{-3} \right)^2 - 22 \right) \\ &= \left( (-4)^3 + (+4)^3 + 10 \right) \cdot \left( (-4)^2 + (+4)^2 - 22 \right) \\ &= (-4^3 + 4^3 + 10) \cdot (16 + 16 - 22) = 10 \cdot 10 = 100. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με  $\hat{A} = 40^\circ$  και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ . Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.

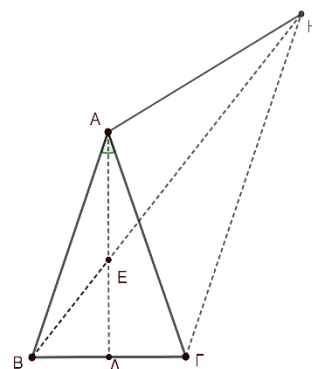
Να αποδείξετε ότι:

(α)  $\hat{A}\hat{H}B = 20^\circ$ ,

(β)  $\hat{A}\hat{G}H = 40^\circ$ ,

(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{H}G$ .

**Σημείωση:** Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



**Λύση**

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με  $\hat{A} = 40^\circ$  και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , θα είναι  $\hat{A}_1 = \hat{B}\hat{A}E = 20^\circ$ . Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές,

συμπεραίνουμε ότι  $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 20^\circ$ . Επειδή τέλος το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές με  $AB = AH$ , θα ισχύει:  $\hat{A}\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$ .

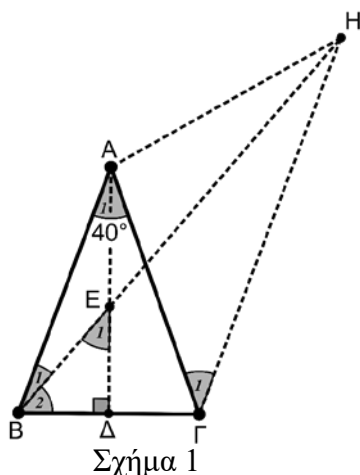
(β) Επειδή το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές με  $\hat{A}\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$  θα είναι

$$\hat{B}\hat{A}H = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\hat{B}\hat{A}H = \hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{A}H \Rightarrow 140^\circ = 40^\circ + \hat{\Gamma}\hat{A}H \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{A}H = 100^\circ.$$

Επειδή  $A\Gamma = AB = AH$ , το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2 \cdot \hat{A}\hat{G}H = 180^\circ - \hat{\Gamma}\hat{A}H \Rightarrow \hat{A}\hat{G}H = \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι  $\hat{A}\hat{H}\Gamma = \hat{A}\hat{G}H = 40^\circ$ , ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι  $\hat{A}\hat{H}B = 20^\circ$ , Επομένως θα έχουμε

$$\hat{B}\hat{H}\Gamma = \hat{A}\hat{H}\Gamma - \hat{A}\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή  $\hat{B}\hat{H}\Gamma = \hat{A}\hat{H}B = 20^\circ$ , οπότε η BH είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{H}\Gamma$ .

### Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματά του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

### Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε  $x$  ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματά του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματά του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{x}{2} + 50 \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow x = 100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε  $y$  ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y = \frac{y}{2} + 40 + 100 \Leftrightarrow y - \frac{y}{2} = 100 + 40 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 140 \Leftrightarrow y = 280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε  $z$  ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z = \frac{z}{2} + 30 + 280 \Leftrightarrow z - \frac{z}{2} = 280 + 30 \Leftrightarrow \frac{z}{2} = 310 \Leftrightarrow z = 620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

#### Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ , με  $\alpha < \beta < \gamma$ , έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $\alpha, \beta$  ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των  $\beta, \gamma$ , να βρείτε τις δυνατές τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ .

#### Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$$\alpha = 72\kappa, \beta = 72\lambda, \gamma = 72\mu \quad (\text{όπου } \kappa, \lambda, \mu \text{ διαφορετικοί ανά δύο με } \kappa < \lambda < \mu).$$

Επειδή πρέπει οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  να είναι και διαιρέτες του  $1008 = 14 \cdot 72$ , πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa} = \frac{72 \cdot 14}{72\kappa} = \frac{14}{\kappa}, \quad \frac{1008}{72\lambda} = \frac{72 \cdot 14}{72\lambda} = \frac{14}{\lambda}, \quad \frac{1008}{72\mu} = \frac{72 \cdot 14}{72\mu} = \frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι  $\kappa, \lambda, \mu$  να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.

Λόγω της προϋπόθεσης  $\kappa < \lambda < \mu$  οι δυνατές τιμές για την τριάδα  $(\kappa, \lambda, \mu)$  είναι:  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$  ή  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$  ή  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$  ή  $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$ .

Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$ , τότε  $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 504$ , η οποία είναι δεκτή, γιατί  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma) = 72$ .
- Αν είναι  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$ , τότε  $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 1008$ , η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 144 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$ .
- Αν είναι  $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$ , τότε  $\alpha = 72, \beta = 504, \gamma = 1008$ , η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$ .
- Αν είναι  $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$ , τότε  $\alpha = 144, \beta = 504, \gamma = 1008$  που δεν είναι δεκτή γιατί  $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$ .

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι  $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 504$ .

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left( \frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left( \frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

### Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left( \frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left( \frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200 \\ &= \left( \left( \frac{-20}{4} \right)^{11} + \left( \frac{-25}{-5} \right)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left( \left( \frac{-8}{2} \right)^{20} - \left( \frac{4}{1} \right)^{20} \right) + 200 \\ &= \left( (-5)^{11} + (+5)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left( (-4)^{20} - 4^{20} \right) + 200 \\ &= (-5^{11} + 5^{11}) \cdot (-2018)^2 + (4^{20} - 4^{20}) + 200 = 0 \cdot (-2018)^2 + 0 + 200 = 200. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

**Σημείωση:** Ο μέσος όρος  $n$  αριθμών  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  είναι ο αριθμός  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$ .

### Λύση

Ονομάζουμε  $A$  το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου,  $B$  του δεύτερου,  $\Gamma$  του τρίτου και  $\Delta$  του τέταρτου. Τότε είναι  $A = 120$  γραμμάρια και

$$\frac{A+B}{2} = 115 \Leftrightarrow A+B = 230 \Leftrightarrow 120+B = 230 \Leftrightarrow B = 230-120 = 110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma}{3} = 115-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma}{3} = 105 \Leftrightarrow A+B+\Gamma = 315 \Leftrightarrow \Gamma = 315 - (A+B)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = 315 - (120+110) \Leftrightarrow \Gamma = 315 - 230 = 85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4} = 105 - 10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4} = 95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta = 380$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 380 - (A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta = 380 - (120+110+85) \Leftrightarrow \Delta = 380 - 315 = 65.$$

Επομένως το τέταρτο μέλο ήταν 65 γραμμάρια.

### Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου  $\alpha$ , για τις οποίες η εξίσωση  $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$  έχει ακέραιες λύσεις.

#### Λύση

Πρέπει  $x \neq 2$  και  $x \neq 6$ . Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6) = (x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = x^2 - (2+\alpha)x + 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x = 2\alpha - 6$$

Επομένως για  $\alpha \neq 5$  έχουμε

$$x = \frac{2\alpha - 6}{\alpha - 5} = \frac{2(\alpha - 5) + 4}{\alpha - 5} = 2 + \frac{4}{\alpha - 5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής  $(\alpha - 5)$  να είναι διαιρέτης του 4, οπότε  $\alpha - 5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ . Επομένως  $\alpha \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ .

Για τις παραπάνω τιμές προκύπτουν οι λύσεις  $x = 1, 0, -2, 6, 4, 3$ , από τις οποίες η  $x = 6$  πρέπει να εξαιρεθεί λόγω των περιορισμών. Επομένως οι ζητούμενες τιμές του  $\alpha$  είναι: 1, 3, 4, 7, 9.

### Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} = 40^\circ$  και για το σημείο  $\Delta$  ισχύει ότι:  $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$ .

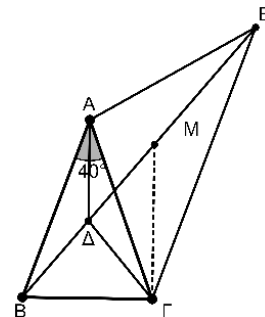
Αν η  $\Gamma M$  είναι παράλληλη στην  $A\Delta$  και το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές ( $AB = AE$ ), να αποδείξετε ότι:

(α) Η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

(β)  $\hat{\Gamma A E} = 100^\circ$ .

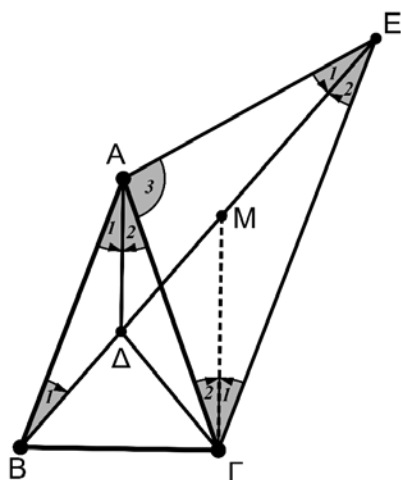
(γ) η  $AM$  είναι κάθετη στην  $GE$ .

**Σημείωση:** Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



#### Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $\Delta B = \Delta \Gamma$ ), το σημείο  $\Delta$  θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης  $B\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ . Η κορυφή  $A$  ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της  $B\Gamma$  (διότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές). Άρα η  $A\Delta$  είναι η μεσοκάθετη της  $B\Gamma$  και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο  $\Delta AB$  είναι ισοσκελές ( $\Delta A = \Delta B$ ) και  $\hat{A}_1 = 20^\circ$ , θα ισχύει  $\hat{B}_1 = 20^\circ$ . Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{B}_1 = \hat{E}_1 = 20^\circ$  και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + 20^\circ + \hat{A}_3 + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ.$$

Άρα είναι:  $\hat{A}_3 = 100^\circ$ .

(γ) Το τρίγωνο  $AGE$  είναι ισοσκελές ( $AE = AG$ ) με  $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_3 = 100^\circ$ , οπότε:

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 40^\circ.$$

Ισχύει όμως  $\hat{\Gamma}_2 + \hat{A}_2 = 20^\circ$  (διότι  $\hat{\Gamma}_2, \hat{A}_2$  εντός εναλλάξ  $A\Delta \parallel \Gamma M$  και  $AG$  τέμνουσα).

Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι  $\hat{B}_1 = \hat{E}_1 = 20^\circ$ . Άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{E}_2 = 20^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $\Gamma ME$  είναι ισοσκελές με  $M\Gamma = ME$ . Επομένως, το  $M$  θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης  $\Gamma E$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AGE$ , όπως και το  $A$ , οπότε θα είναι  $AM \perp \Gamma E$ .

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους  $x$  που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \text{ και την ανίσωση } \frac{x(x-1)}{2}-2 < \frac{x(x-5)}{2}+6.$$

### Λύση

Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι  $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 > 0$ .

Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x(x-1)}{2}-2 < \frac{x(x-5)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4 < x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x < 12+4 \Leftrightarrow 4x < 16 \Leftrightarrow x < 4.$$

Επομένως, η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για  $x=1$  ή  $x=2$ .

### Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι τέτοιοι ώστε  $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$ , να βρείτε τις

δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

### Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4 - 36\beta^4 = 5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = 0. \quad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των  $\alpha, \beta$  πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης  $\alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4$ . Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 &= \alpha^4 - 9\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = \alpha^2(\alpha^2 - 9\beta^2) + 4\beta^2(\alpha^2 - 9\beta^2) \\ &= (\alpha^2 - 9\beta^2)(\alpha^2 + 4\beta^2) \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = 0 &\Leftrightarrow (\alpha^2 - 9\beta^2)(\alpha^2 + 4\beta^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 9\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ ή } \alpha = -3\beta. \end{aligned}$$

Αν  $\alpha = 3\beta$ , τότε  $K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\beta - \beta}{3\beta + \beta} = \frac{1}{2}$ , ενώ

Αν  $\alpha = -3\beta$ , τότε  $K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{-3\beta - \beta}{-3\beta + \beta} = \frac{-4}{-2} = 2$ .

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με  $\beta^4$  (αν είναι  $\beta = 0$ , τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται  $0 = 1$ , άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = 0 \Leftrightarrow \beta^4 \left( \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^4 - 5 \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 36 \right) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^4 - 5 \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 36 = 0$$

$$\stackrel{\frac{\alpha}{\beta} = \omega}{\Leftrightarrow} \omega^4 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (\omega^2)^2 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = 9 \text{ ή } \omega^2 = -4 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \omega = 3 \text{ ή } \omega = -3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ ή } \alpha = -3\beta.$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

$$\text{Αν } \alpha = 3\beta, \text{ τότε } K = \frac{3\beta - \beta}{3\beta + \beta} = \frac{1}{2}, \text{ ενώ, αν } \alpha = -3\beta, \text{ τότε } K = \frac{-3\beta - \beta}{-3\beta + \beta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

### Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{99}$$

και

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}$$

### Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς A και B διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του A είναι της μορφής  $\frac{2}{3\kappa}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, 33$ , δηλαδή ο A έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο B έχει προσθετέους της μορφής  $\frac{1}{\nu}$ , όπου το  $\nu$  παίρνει

όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο B έχει  $99 - 33 = 66$  όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό A.

Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του A και των όρων του B η οποία σε κάθε όρο του A θα αντιστοιχίζει δύο όρους του B. Με απλή

παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου  $\frac{2}{3\kappa}$  του A και

του αθροίσματος των όρων  $\frac{1}{3\kappa-1}$  και  $\frac{1}{3\kappa+1}$  του B, για  $\kappa = 1, 2, \dots, 33$ .

Επειδή βλέπουμε ότι  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ , θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa-1} + \frac{1}{3\kappa+1} > \frac{2}{3\kappa},$$

για κάθε  $\kappa = 1, 2, \dots, 33$ . Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2 - 1} > \frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα  $18\kappa^2 > 18\kappa^2 - 2$ , που ισχύει για κάθε  $\kappa = 1, 2, \dots, 33$

Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}, \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}, \dots, \frac{1}{98} + \frac{1}{100} > \frac{2}{99},$$

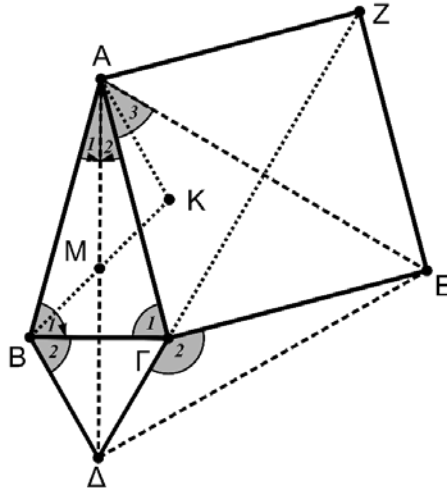
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι  $B > A$ .



#### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) με  $\hat{A} = 30^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  και τετράγωνο  $AG\epsilon Z$ . Αν το σημείο  $M$  είναι το μέσο της  $A\Delta$  και το σημείο  $K$  είναι το συμμετρικό της κορυφής  $B$  ως προς το σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.  
 β) Οι ευθείες  $AK$ ,  $EM$  και  $\Delta\Gamma$  περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

#### Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = AG$  και  $\hat{A} = 30^\circ$  θα ισχύει:  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 75^\circ$ . Η  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος της  $B\Gamma$ , οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A} = 30^\circ$ , οπότε θα είναι:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ$ .

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $\Delta\Gamma\epsilon$ . Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i)  $AB=AG=\Gamma\epsilon$  (ii)  $B\Delta=\Gamma\Delta$  και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \text{ και}$$

$$\widehat{\Delta\Gamma\epsilon} = 360^\circ - \hat{\Gamma}_1 - 90^\circ - 60^\circ = 360^\circ - 150^\circ - 75^\circ = 135^\circ,$$

δηλαδή ισχύει ότι: (iii)  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma\epsilon} = 135^\circ$ .

Άρα τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $\Delta\Gamma\epsilon$  είναι ίσα και κατά συνέπεια  $A\Delta = \Delta\epsilon$ , οπότε το τρίγωνο  $A\Delta\epsilon$  είναι ισοσκελές. Για τη γωνία  $\widehat{\Delta\Delta\epsilon}$  του ισοσκελούς τριγώνου  $A\Delta\epsilon$  έχουμε:

$$\widehat{\Delta\Delta\epsilon} = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ,$$

αφού η γωνία  $\hat{A}_3$  είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου  $AG\epsilon$ .

Άρα το τρίγωνο  $A\Delta\epsilon$  είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία  $\widehat{\Delta\Gamma Z}$  έχουμε:  $\widehat{\Delta\Gamma Z} = \hat{\Gamma}_2 + \widehat{\Gamma\Gamma Z} = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ . Άρα τα σημεία  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $Z$  είναι συνευθειακά και επειδή η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετη της  $A\epsilon$ , συμπεραίνουμε ότι η  $\Delta Z$  είναι μεσοκάθετη της  $A\epsilon$ .

Επειδή το  $M$  είναι μέσο της  $A\Delta$ , και το τρίγωνο  $A\Delta\epsilon$  είναι ισόπλευρο, η  $EM$  θα είναι μεσοκάθετη της  $A\Delta$ .

Εφόσον το  $K$  είναι το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $M$ ,  $MA=MB$  και  $B\hat{M}\Delta = A\hat{M}K$  τα τρίγωνα  $MAK$  και  $M\Delta B$  είναι ίσα, οπότε  $B\hat{M}\Delta = M\hat{A}K = 30^\circ$ . Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι η  $AK$  είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου  $A\Delta\epsilon$ .

Επομένως, οι ευθείες  $AK$ ,  $EM$  και  $\Delta\Gamma$  περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου  $A\Delta\epsilon$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι τέτοιοι ώστε  $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1$ , να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

### Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6 - 27\beta^6 = -26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0. \quad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των  $\alpha, \beta$  πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης  $\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6$ . Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + 27\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^3(\alpha^3 - \beta^3) + 27\beta^3(\alpha^3 - \beta^3) \\ &= (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 &\Leftrightarrow (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3\beta \text{ ή } \alpha = \beta, \end{aligned}$$

αφού  $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2 = \left(\alpha - \frac{3\beta}{2}\right)^2 + \frac{45\beta^2}{4} > 0$ , για  $\alpha\beta \neq 0$  (ισχύει από την υπόθεση)

και  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0$ , για  $\alpha\beta \neq 0$ .

Αν  $\alpha = -3\beta$ , τότε  $K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{9\beta^2 - \beta^2}{9\beta^2 + \beta^2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ , ενώ, αν  $\alpha = \beta$ , τότε

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2}{\beta^2 + \beta^2} = 0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με  $\beta^6$  (αν είναι  $\beta = 0$ , τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται  $0 = 1$ , άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \beta^6 \left( \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 26\omega - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -27 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \text{ ή } \alpha^3 = -27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -3\beta$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο  $K = \frac{4}{5}$  ή  $K = 0$ .

## Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z, w$  είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι  $x + y + z + w = 8$ , να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

### Λύση

Ξεκινώντας από την υπόθεση  $1 \leq x \leq 5$ , θα έχουμε ότι:

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 6x - 5,$$

όπου η ισότητα ισχύει για  $x = 1$  ή  $x = 5$ .

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$y^2 \leq 6y - 5, z^2 \leq 6z - 5, w^2 \leq 6w - 5,$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνον όταν οι  $y, z, w$  παίρνουν τις τιμές 1 ή 5.

Προσθέτοντας τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 6(x + y + z + w) - 20 = 6 \cdot 8 - 20 = 28.$$

Έχουμε ισότητα όταν ένας από τους αριθμούς ισούται με 5 και οι άλλοι με 1, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 28.

## Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος  $A = \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$  έχει ψηφία τέτοια ώστε  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$ , να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού  $9 \cdot A$ .

### Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά  $9 \cdot A = 10 \cdot A - A$ , έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 9 \cdot A &= 10 \cdot A - A = \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0 0} - \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} \\ &= (\alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10) - (\alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0) \\ &= \alpha_3 \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot 10 - \alpha_0 \\ &= \alpha_3 \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1 - 1) \cdot 10 + (10 - \alpha_0) \end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$ , ο αριθμός  $9 \cdot A$  έχει τα ψηφία  $\alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$ , τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

**Σημείωση:** Η αφαίρεση  $10A - A$  μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνηθισμένο τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$ , ως εξής:

$$\begin{array}{r} \phantom{-} \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{-} \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{-} \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{-} \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \hline \alpha_3 \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ - \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \hline \alpha_3 \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{\alpha_3} \alpha_2 - \alpha_3 \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \alpha_1 - \alpha_2 \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \alpha_0 - \alpha_1 - 1 \phantom{\alpha_0} \\ \phantom{\alpha_3} \phantom{\alpha_2} \phantom{\alpha_1} \phantom{\alpha_0} 10 - \alpha_0, \end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

## Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$ . Η παράλληλη από το  $O$  προς την  $A\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Ο περιγεγραμμένος

κύκλος, έστω  $(c_1)$ , του τριγώνου  $AΔO$  τέμνει την  $AΓ$  στο σημείο  $E$  και το κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $Z$ . Έστω ότι η  $ΔZ$  τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα  $OΔA$  και  $OΓE$  είναι ίσα.
- (β) Τα τρίγωνα  $OZE$  και  $OΓE$  είναι ίσα.
- (γ) Τα σημεία  $Γ, O, H$  είναι συνευθειακά.

### Λύση

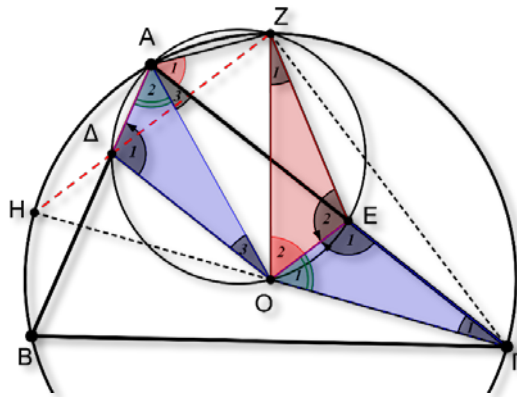
(α) Επειδή  $OΔ \parallel AE$  το τετράπλευρο  $AΔOE$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε  $AΔ = OE$ .

Τα τρίγωνα  $OΔA$  και  $OΓE$  έχουν:

(1)  $AΔ = OE$  (από το ισοσκελές τραπέζιο  $AΔOE$ ).

(2)  $OA = OG$  (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABΓ$ ).

(3) Το τρίγωνο  $OAG$  είναι ισοσκελές ( $OA = OG$ ) οπότε:  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_3$ . Η γωνία  $\hat{E}_1$  είναι εξωτερική στο τετράπλευρο  $AΔOE$ , οπότε:  $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ . Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα:  $\hat{O}_1 = \hat{A}_2$



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων  $OΔA$  και  $OΓE$ .

(β) Τα τρίγωνα  $OΓE$  και  $OZE$  έχουν:

(i)  $OZ = OG$  (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABΓ$ ),

(ii) η  $OE$  είναι κοινή πλευρά.

(iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{O}_2$  (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο  $(c_1)$  και βαίνουν στο τόξο  $ZE$ ).

$\hat{A}_1 = \frac{Z\hat{O}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2}$  (η γωνία  $\hat{A}_1$  είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο

κύκλο του τριγώνου  $ABΓ$  με αντίστοιχη επίκεντρη την  $\hat{\Gamma O Z}$ ), οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα  $OΓE$  και  $OZE$  είναι ίσα.

(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα  $OΔA$  και  $OZE$  είναι ίσα, οπότε  $OΔ = OZ$ . Επομένως το τετράπλευρο  $OΔZE$  είναι ισοσκελές τραπέζιο και  $ΔZ \parallel OE$ .

Από την ισότητα των τριγώνων  $OΓE$  και  $OZE$  προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων  $OZ = OG$  και  $EZ = EG$ , από τις οποίες προκύπτει ότι η  $OE$  είναι μεσοκάθετη της  $ΓZ$ . Άρα και η  $ΔZ$  θα είναι κάθετη στην  $ΓZ$ , δηλαδή το σημείο  $H$  είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου  $Γ$ , οπότε τα σημεία  $Γ, O, H$  είναι συνευθειακά.

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 .$$

#### Λύση.

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$  που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το  $x = 0$  δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για  $x \neq 0$  μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το  $x^2$ , οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2 - x - 18 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε  $x - \frac{3}{x} = \omega$ , οπότε  $x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = \omega^2 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = \omega^2 + 6$ . Με αντικατάσταση

στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 + 6 - \omega - 18 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 12 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ ή } \omega = -3.$$

Άρα έχουμε;

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{x} = 4 \text{ ή } x - \frac{3}{x} = -3 &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} &\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος  $A = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$  έχει ψηφία τέτοια ώστε  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$ , να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού  $9 \cdot A$ .

#### Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά  $9 \cdot A = 10 \cdot A - A$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 9 \cdot A &= 10 \cdot A - A = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}0 - \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} \\ &= (\alpha_4 \cdot 10^5 + \alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10) - (\alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0) \\ &= \alpha_4 \cdot 10^5 + (\alpha_3 - \alpha_4) \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot 10 - \alpha_0 \\ &= \alpha_4 \cdot 10^5 + (\alpha_3 - \alpha_4) \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1 - 1) \cdot 10 + (10 - \alpha_0) \end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$ , ο αριθμός  $9 \cdot A$  έχει τα ψηφία  $\alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$ , τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

**Σημείωση:** Η αφαίρεση  $10 \cdot A - A$  μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$ , ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc}
& & & & 1 & \\
& & & & \alpha_0 & 0 \\
& \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\
- & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
& \alpha_4 & \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_1 - 1 & 10 - \alpha_0,
\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

### Πρόβλημα 3

Αν οι αριθμοί  $x, y, z$  είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$

$$y + 2z^2 = 3x^3$$

$$z + 2x^2 = 3y^3$$

#### Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο  $z$  είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή  $z \geq \max\{x, y\}$ . (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z > 1$ . Τότε, αφού  $z \geq \max\{x, y\}$ , θα είναι  $x + 2y^2 < z + 2z^2 < 3z^3$ , άτοπο.
- $z = 1$ . Τότε  $x + 2y^2 = 3$  και αφού  $1 \geq \max\{x, y\}$  έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν  $x = y = 1$ . Άρα έχουμε τη λύση:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ .

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με  $y \geq \max\{x, z\}$  ή  $x \geq \max\{y, z\}$  οδηγούν στην ίδια λύση.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  (με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$ . Η εφαπτομένη στο  $B$  του κύκλου ( $c$ ) τέμνει την ευθεία  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Έστω  $M$  είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραpezίου  $AB\Gamma\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- (α) Η ευθεία  $AD$  είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω  $(c_1)$ , του τριγώνου  $\Delta BE$ .
- (β) Το σημείο  $M$  ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω  $(c_2)$ , του τριγώνου  $OB\Gamma$ .
- (γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων  $\Delta BE$  και  $OB\Gamma$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο  $B$ .

#### Λύση

(α) Επειδή το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1, \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2.$$

Επίσης, επειδή η  $BE$  εφάπτεται στον κύκλο ( $c$ ), θα ισχύει:  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$  (γωνία από τη χορδή  $B\Gamma$  και την εφαπτόμενη  $BE$ ). Άρα έχουμε

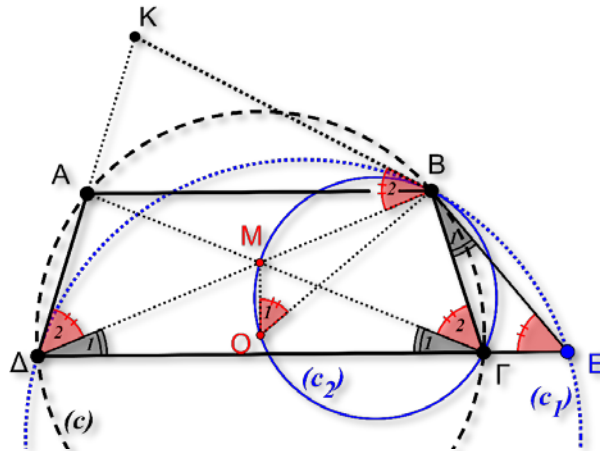
$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Έστω  $(c_1)$  και  $(c_2)$  οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων  $\Delta BE$  και  $OB\Gamma$ , αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία  $\hat{\Delta}_2$  (που δημιουργείται από τη

χορδή  $B\Delta$  και την  $A\Delta$ ) είναι ίση με την γωνία  $\hat{E}$ , οπότε η  $A\Delta$  θα εφάπτεται στον κύκλο  $(c_1)$ . Πράγματι, η γωνία  $B\hat{\Gamma}\Delta$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $B\Gamma E$ , οπότε:

$$B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ , καταλήγουμε στις ισότητες:  $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{E}$ .



Σχήμα 5

**(β)** Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής  $M$  των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  ανήκει στον κύκλο  $(c_2)$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma O M$  είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η  $OM$  είναι μεσοκάθετος της  $AB$ , οπότε:

$$M\hat{O}B = \hat{M}_1 = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο  $B\Gamma O M$  είναι εγγράψιμο.

**(γ)** Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου  $(c_1)$  στο σημείο  $B$  και έστω ότι τέμνει την προέκταση της  $AD$  στο σημείο  $K$ . Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία  $BK$  είναι εφαπτομένη και του κύκλου  $(c_2)$ .

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2)$$

γιατί η  $K\Delta$  είναι εφαπτομένη του  $(c_1)$  (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών:  $K\hat{B}M = \hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2 = B\hat{\Gamma}M$ . Άρα η  $BK$  εφάπτεται και του κύκλου  $(c_2)$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2019**





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”

9 Νοεμβρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-16)^5}{(-8)^5} + \frac{(-12)^5}{6^5} + 1 \right) \cdot \left( \frac{(-16)^3}{8^3} + \frac{(-12)^3}{(-6)^3} + 2019 \right).$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-16)^5}{(-8)^5} + \frac{(-12)^5}{6^5} + 1 \right) \cdot \left( \frac{(-16)^3}{8^3} + \frac{(-12)^3}{(-6)^3} + 2019 \right) \\ &= \left( \left( \frac{-16}{-8} \right)^5 + \left( \frac{-12}{6} \right)^5 + 1 \right) \cdot \left( \left( \frac{-16}{8} \right)^3 + \left( \frac{-12}{-6} \right)^3 + 2019 \right) \\ &= (2^5 + (-2)^5 + 1) \cdot ((-2)^3 + 2^3 + 2019) \\ &= (2^5 - 2^5 + 1) \cdot (-2^3 + 2^3 + 2019) = 1 \cdot 2019 = 2019. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{3}$  των

χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{4}$  των χρημάτων που του

είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{5}$  των

χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα  $x$  ευρώ.

Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε  $\frac{x}{3}$  ευρώ και του έμειναν  $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$  ευρώ. Τη δεύτερη

μέρα ξόδεψε  $\frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{6}$  ευρώ και του έμειναν  $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{3x}{6} = \frac{x}{2}$  ευρώ. Την τρίτη μέρα

ξόδεψε  $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{10}$  ευρώ και του έμειναν  $\frac{x}{2} - \frac{x}{10} = \frac{4x}{10} = \frac{2x}{5}$  ευρώ.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5} = 240 \Leftrightarrow \frac{2x}{5} = \frac{240}{1} \Leftrightarrow 2x = 1200 \Leftrightarrow x = \frac{1200}{2} \Leftrightarrow x = 600 \text{ ευρώ.}$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος (χωρίς εξίσωση)

Την πρώτη μέρα του μένουν τα  $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  μέρους των χρημάτων του.

Τη δεύτερη μέρα ξοδεύει το  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$  μέρους των χρημάτων του και του μένει το  $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  μέρους των χρημάτων.

Την τρίτη μέρα ξοδεύει το  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$  μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα  $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$  μέρους των χρημάτων που είναι 240€. Άρα το  $\frac{1}{5}$  είναι  $240 : 2 = 120$ €, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν  $120 \cdot 5 = 600$ €.

### 3<sup>ος</sup> τρόπος

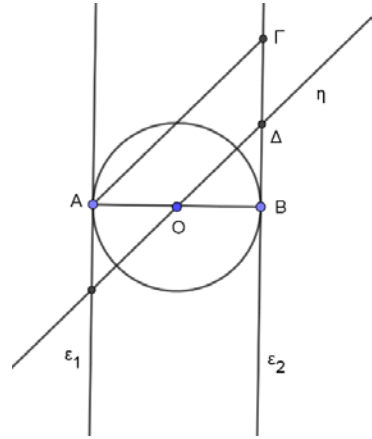
Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{5}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα  $\frac{4}{5}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν 240 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας  $240 \cdot \frac{5}{4} = 300$  ευρώ.

Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{4}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα  $\frac{3}{4}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν 300 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας  $300 \cdot \frac{4}{3} = 400$  ευρώ.

Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{3}$  των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα  $\frac{2}{3}$  των χρημάτων που του είχε μαζί του που ήταν 400 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι είχε μαζί του στο ξεκίνημα της πρώτης μέρας  $400 \cdot \frac{3}{2} = 600$  ευρώ.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο  $AB$ , κέντρο  $O$  και οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  που είναι κάθετες στα άκρα  $A$  και  $B$  της διαμέτρου  $AB$ . Στην ευθεία  $\varepsilon_2$  παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία  $\eta$  να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$ . Η ευθεία  $\eta$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .



- (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $OB\Delta$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι το  $\Delta$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $B\Gamma$ .  
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου  $AO\Delta\Gamma$ .

### Λύση

(α) Οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα  $A$  και  $B$  της διαμέτρου  $AB$ . Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ,  $AB = B\Gamma$ , επομένως οι γωνίες της βάσης του  $A\Gamma$  είναι  $45^\circ$  η καθεμία. Στο τρίγωνο  $O\Delta B$ , έχουμε  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{O} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Delta}\hat{O}\hat{B} = 45^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{O} = 45^\circ$  και  $\hat{O}\hat{\Delta}\hat{B} = 45^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 45^\circ$ .

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο  $OB\Delta$  είναι ισοσκελές και από την υπόθεση  $B\Gamma = AB$  έχουμε:

$$\Delta B = OB = \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Επομένως το  $\Delta$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $B\Gamma$ .

(γ) Το τετράπλευρο  $AO\Delta\Gamma$  είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του  $AO, \Gamma\Delta$  τέμνονται στο σημείο  $B$  και οι πλευρές του  $A\Gamma, O\Delta$  είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει

$$AO = \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta. \text{ Επομένως, το τετράπλευρο } AO\Delta\Gamma \text{ είναι ισοσκελές τραπέζιο.}$$

### Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

### Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα

με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το  $\frac{23}{1} = 23$ . Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12. Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\frac{26}{13}, \frac{25}{5}, \frac{23}{1}, \frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{15}{3}, \frac{14}{2} \text{ (υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)}$$

$$\frac{24}{8}, \frac{16}{4}, \frac{12}{6} \text{ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).}$$

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \left( \frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9} \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left( \frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-10} + 100 \right).$$

### Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left( \left( \frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9} \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left( \frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-10} + 100 \right) \\ &= \left( \left( \left( \frac{-32}{4} \right)^9 + \left( \frac{-16}{-2} \right)^9 \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left( \left( \frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 100 \right) \\ &= \left( ((-8)^9 + (+8)^9) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left( (-5)^{10} - (-5)^{10} + 100 \right) \\ &= \left( (-8^9 + 8^9) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot (0 + 100) = \left( 0 \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot (+100) = 20 \cdot 100 = 2000. \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιχνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

### Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος απάντησε σωστά σε  $x$  ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε σωστά σε  $12 - x$  ερωτήσεις, οπότε το τελικό κέρδος του, έστω  $K$ , θα είναι:

$$K = 600 + 80x - 40(12 - x) \Leftrightarrow K = 600 + 80x - 480 + 40x \Leftrightarrow K = 120 + 120x.$$

Επομένως, για την εύρεση του  $x$  πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$120 + 120x = 1320 \Leftrightarrow 120x = 1320 - 120 \Leftrightarrow 120x = 1200 \Leftrightarrow x = 10.$$

### Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019}, \frac{2021}{2020}, \frac{2022}{2021}, \frac{3020}{3019}, \frac{3021}{3020}, \frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022}, \frac{4022}{4023}, \frac{5020}{5021}, \frac{5021}{5022}, \frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και στα δύο ερωτήματα.

### Λύση.

(α) Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής  $\frac{\nu+1}{\nu} = 1 + \frac{1}{\nu}$ ,

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων  $\frac{\mu+1}{\mu}$ ,  $\frac{\nu+1}{\nu}$  έχουμε:

$$\frac{\mu+1}{\mu} > \frac{\nu+1}{\nu} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\mu} > 1 + \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \mu < \nu.$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το  $\frac{2020}{2019}$ , και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή, δηλαδή το  $\frac{3022}{3021}$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα γράφονται ως:

$$\frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019} = 1 \frac{1}{2019}$$
$$\frac{2021}{2020} = 1 + \frac{1}{2020} = 1 \frac{1}{2020}$$

⋮  
⋮  
⋮

$$\frac{3022}{3021} = 1 + \frac{1}{3021} = 1 \frac{1}{3021}$$

Όμως  $\frac{1}{2019} > \frac{1}{2020} > \dots > \frac{1}{3021}$ , οπότε μεγαλύτερο κλάσμα το πρώτο, δηλαδή το  $\frac{2020}{2019}$ , και μικρότερο το τελευταίο, δηλαδή το  $\frac{3022}{3021}$ .

(β) Παρατηρούμε ότι τα αντίστροφα των δεδομένων κλασμάτων

$$\frac{4021}{4020}, \frac{4022}{4021}, \frac{4023}{4022}, \frac{5021}{5020}, \frac{5022}{5021}, \frac{5023}{5022},$$

είναι της ίδιας μορφής με αυτά του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το πρώτο και μικρότερο το τελευταίο. Επομένως, για τα αντίστροφα τους το συμπέρασμα είναι ότι μεγαλύτερο είναι το τελευταίο, δηλαδή το  $\frac{5023}{5022}$ , και μικρότερο το πρώτο, δηλαδή το  $\frac{4021}{4020}$ .

#### Πρόβλημα 4

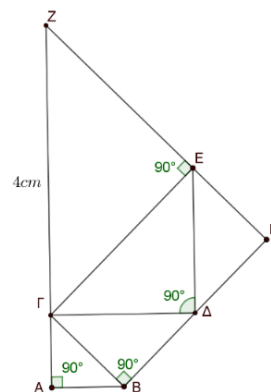
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες  $\hat{B}\hat{A}\hat{G}$ ,  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{G}$ ,  $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{G}$  και  $\hat{Z}\hat{E}\hat{G}$  είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι:  $AB = AG$ ,  $BG = B\Delta$ ,  $\Delta G = \Delta E$ ,  $EG = EZ$  και  $\Gamma Z = 4 \text{ cm}$ .

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



#### Λύση

(α) Αν  $AB = AG = x$ , τότε από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$B\Gamma^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow B\Gamma = x\sqrt{2} = B\Delta.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\Delta^2 = (x\sqrt{2})^2 + (x\sqrt{2})^2 = 4x^2 \Rightarrow \Gamma\Delta = 2x = \Delta E.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma E^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2 \Rightarrow \Gamma E = 2\sqrt{2}x = EZ.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΖ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma Z^2 = (2\sqrt{2}x)^2 + (2\sqrt{2}x)^2 = 16x^2 \Rightarrow \Gamma Z = 4x,$$

οπότε  $\Gamma Z = 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ cm}$ .

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΓ, ΔΒΓ, ΕΔΓ και ΖΕΓ είναι ορθογώνια ισοσκελή οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες με  $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Επομένως, έχουμε:

$$\hat{A}\hat{G}\hat{Z} = \hat{A}\hat{G}\hat{B} + \hat{B}\hat{G}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{G}\hat{E} + \hat{E}\hat{G}\hat{Z} = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ,$$

οπότε τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ έχει τρεις γωνίες του ορθές, αφού  $\hat{G}\hat{B}\hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\hat{B}\hat{G}\hat{E} = \hat{B}\hat{G}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{G}\hat{E} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$  και  $\hat{G}\hat{E}\hat{H} = 180^\circ - \hat{G}\hat{E}\hat{Z} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Επομένως και η τέταρτη γωνία του θα είναι ορθή, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδό

$$E_{(B\Gamma E H)} = B\Gamma \cdot \Gamma E = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \text{ cm}^2.$$

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  και  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ .

### Λύση

Από την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$  και τις σχέσεις

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} 10[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] &= 29\alpha\beta \Rightarrow 10(\alpha + \beta)^2 - 20\alpha\beta = 29\alpha\beta \\ \Rightarrow 10(\alpha + \beta)^2 &= 49\alpha\beta \stackrel{\alpha + \beta = 7}{\Rightarrow} \alpha\beta = \frac{10(\alpha + \beta)^2}{49} = \frac{10 \cdot 7^2}{49} \Rightarrow \alpha\beta = 10. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{10} \quad \text{και} \\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{2}{\alpha\beta} = \left(\frac{7}{10}\right)^2 - \frac{2}{10} = \frac{49}{100} - \frac{2}{10} = \frac{29}{100}. \end{aligned}$$

Διαφορετικά, αφού πρώτα βρούμε ότι  $\alpha\beta = 10$  μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Από την εξίσωση  $\alpha + \beta = 7$  έχουμε ότι  $\beta = 7 - \alpha$ , οπότε με αντικατάσταση του  $\beta$  στην εξίσωση  $\alpha\beta = 10$  έχουμε:

$$\alpha(7 - \alpha) = 10 \Leftrightarrow 7\alpha - \alpha^2 = 10 \Leftrightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα  $\Delta = 9$  και ρίζες  $\alpha = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \alpha = 5$  ή  $\alpha = 2$ ,

οπότε έχουμε:  $(\alpha, \beta) = (5, 2)$  ή  $(\alpha, \beta) = (2, 5)$ . Με αντικατάσταση βρίσκουμε άμεσα

και από τα δύο ζεύγη:  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{7}{10}$  και  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{29}{100}$ .

### Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο παρονομαστής τους είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής

$$\frac{\nu}{\nu+1} = \frac{\nu+1-1}{\nu+1} = 1 - \frac{1}{\nu+1},$$

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων  $\frac{\mu}{\mu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}$  έχουμε:

$$\frac{\mu}{\mu+1} > \frac{\nu}{\nu+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\mu+1} > 1 - \frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu+1} > -\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu+1} < \frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \mu > \nu.$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή, δηλαδή το  $\frac{4021}{4022}$ , και μικρότερο είναι αυτό που έχει το

μικρότερο αριθμητή, δηλαδή το  $\frac{3019}{3020}$ .

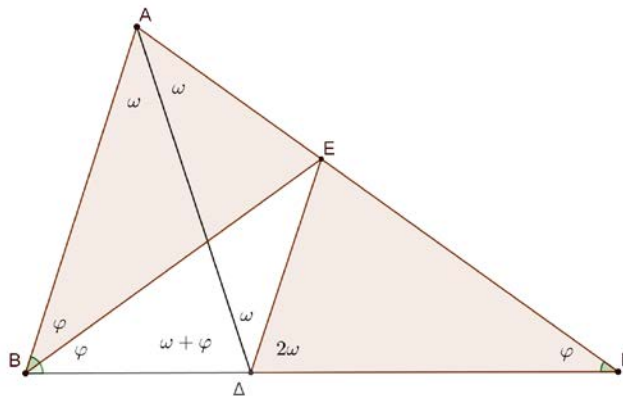
### Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\hat{A}B\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B}\hat{\Gamma}A$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $B\hat{A}\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $AB = \Delta\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{B}\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\hat{A}\hat{\Gamma}$ .

### Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι  $\hat{A} = B\hat{A}\hat{\Gamma} = 2\omega$ ,  $\hat{\Gamma} = B\hat{\Gamma}A = \varphi$ , οπότε θα είναι  $\hat{B} = A\hat{B}\hat{\Gamma} = 2\varphi$ .

(α) Από την υπόθεση έχουμε  $E\hat{B}\hat{\Gamma} = \frac{A\hat{B}\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{\Gamma}E$ , οπότε το τρίγωνο  $BE\Gamma$  είναι

ισοσκελές με  $BE = E\Gamma$ . Επιπλέον  $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{\Gamma}E$  και από την υπόθεση

$AB = \Delta\Gamma$ . Επομένως τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες.

(β) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν τα εξής:

- $E\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = B\hat{A}E = \hat{A} = 2\omega$
- $AE = E\Delta \Rightarrow$  το τρίγωνο  $AE\Delta$  είναι ισοσκελές  $\Rightarrow A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2} = \omega = B\hat{A}\hat{\Delta}$ .

Επομένως οι ευθείες  $AB$  και  $\Delta E$  είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την  $A\Delta$  σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως θα έχουν και



$$\widehat{E}\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{A}\widehat{B}\Delta \Rightarrow 2\omega = 2\varphi \Rightarrow \omega = \varphi,$$

οπότε έχουμε

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + \varphi = 180^\circ \Rightarrow 5\omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ.$$

Άρα είναι  $\widehat{B}\widehat{A}\Gamma = 2\omega = 72^\circ$ .

#### Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού  $\alpha$  για τις οποίες ο ρητός αριθμός

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4} \text{ είναι ακέραιος.}$$

#### Λύση

Για  $\alpha \neq 1$ , έχουμε

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4} = \frac{(\alpha - 1)^3 (\alpha + 1)^3}{(\alpha - 1)^4} = \frac{(\alpha + 1)^3}{\alpha - 1}.$$

Αν τώρα θέσουμε  $\alpha - 1 = x$ , τότε έχουμε  $\alpha + 1 = x + 2$  και

$$A = \frac{(x+2)^3}{x} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} = x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x}.$$

Επομένως, ο ρητός αριθμός  $A$  είναι ακέραιος, αν και μόνον αν,

$$\begin{aligned} \frac{8}{x} = \frac{8}{\alpha - 1} \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow (\alpha - 1) \text{ είναι διαιρέτης του } 8 \\ &\Leftrightarrow \alpha - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \{2, 3, 5, 9, 0, -1, -3, -7\}. \end{aligned}$$

### Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων  $\alpha + \beta$  και  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .

#### Λύση

Από τις ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$$

και τις σχέσεις  $\alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta$  παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) &= 90\alpha\beta \stackrel{\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta}{\Rightarrow} (\alpha + \beta)(16\alpha\beta - \alpha\beta) = 90\alpha\beta \\ &\Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot 15\alpha\beta = 90\alpha\beta \stackrel{\alpha\beta \neq 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 6. \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 18\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2}{18} = \frac{6^2}{18} = 2,$$

οπότε θα είναι:  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{2} = 3.$

### Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:  $\begin{cases} xy^3 = -8 \\ (x+y)y = 2 \end{cases}.$

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Πρέπει  $xy \neq 0$ , αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{cases} xy^3 = -8 \\ (x+y)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cdot y^2 = -8 \\ xy + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y^2) \cdot y^2 = -8 \\ xy = 2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 2y^2 - 8 = 0 \\ x = \frac{2-y^2}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ x = \frac{2-y^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2 \pm 6}{2} \\ x = \frac{2-y^2}{y} \end{cases} \stackrel{y^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = \frac{2-y^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Πρέπει  $xy \neq 0$ , αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{cases} xy^3 = -8 \\ (x+y)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cdot y^2 = -8 \\ xy + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Αν θέσουμε:  $xy = \varphi$ ,  $y^2 = \omega > 0$ , τότε με αγνώστους  $\varphi$  και  $\omega$  προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \varphi\omega = -8 \\ \varphi + \omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi\omega = -8 \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(2 - \varphi) = -8 \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^2 - 2\varphi - 8 = 0 \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{2 \pm 6}{2} \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 4 \text{ ή } \varphi = -2 \\ \omega = 2 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi, \omega) = (4, -2) \\ \text{ή} \\ (\varphi, \omega) = (-2, 4) \end{cases}.$$

Επειδή πρέπει  $\omega = y^2 > 0$ , δεκτή είναι μόνο η λύση  $(\varphi, \omega) = (-2, 4)$ , οπότε οι τιμές των  $x, y$  θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\begin{cases} xy = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ y = 2 \text{ ή } y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 2) \text{ ή } (x, y) = (1, -2).$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιέπιπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΓΖΗ.

### Λύση

Έστω  $\Theta$  το μέσο της πλευράς  $AB$ . Τότε στο τρίγωνο  $ABE$  η  $\Theta H$  συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά  $BE$  και ίση με το μισό της,

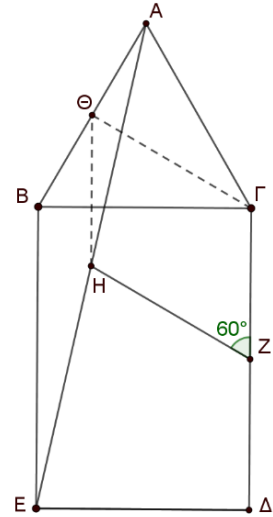
δηλαδή  $\Theta H = \frac{BE}{2}$ . Επειδή το τετράπλευρο  $BΓΔE$  είναι

ορθογώνιο, έχει ίσες τις απέναντι πλευρές του, οπότε  $BE = ΓΔ$ . Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Theta H$  και  $ΓZ$  είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο  $ΓZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα είναι και  $ZH \parallel Γ\Theta$ .

Όμως η  $Γ\Theta$  είναι κάθετη προς τη  $AB$  (ως διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου  $ABΓ$  είναι και ύψος), οπότε θα είναι και  $ZH \perp AB$ .

Επιπλέον οι γωνίες  $\hat{\Gamma}ZH$  και  $\hat{A}B\Gamma$  είναι οξείες και έχουν πλευρές ανά δύο κάθετες, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{\Gamma}ZH = \hat{A}B\Gamma = 60^\circ.$$



Σχήμα 4

### Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$  για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 3)x^2 + (\lambda^2 + 1)x - (11\lambda - 18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους  $\sqrt{17}$ .

### Λύση

Αν  $\beta, \gamma$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε πρέπει:

$$\beta^2 + \gamma^2 = (\sqrt{17})^2 = 17. \quad (1)$$

Με τον περιορισμό  $\lambda \neq 3$ , οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τους τύπους Vieta:

$$\beta + \gamma = -\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda - 3}, \quad \beta\gamma = -\frac{11\lambda - 18}{\lambda - 3} \quad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 17 \Leftrightarrow (\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma = 17 \Leftrightarrow \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{(\lambda - 3)^2} + \frac{2(11\lambda - 18)}{\lambda - 3} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 + 2(11\lambda - 18)(\lambda - 3) - 17(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + 7\lambda^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{-7 + \sqrt{225}}{2} = 4 \text{ (η άλλη ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Για  $\lambda = 2$  η εξίσωση γίνεται:  $-x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 4$ , ενώ για  $\lambda = -2$  η εξίσωση γίνεται:  $-5x^2 + 5x + 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0$  με ρίζες ετερόσημες, οπότε δεν μπορεί η μία από αυτές να είναι το μήκος πλευράς τριγώνου. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή για την παράμετρο  $\lambda$  είναι το 2.

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$108(x-2)^4 + (4-x^2)^3 = 0 .$$

#### Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$108(x-2)^4 + (4-x^2)^3 = 0 \Leftrightarrow 108(x-2)^4 + (2-x)^3(2+x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 108(x-2)^4 - (x-2)^3(2+x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 [108(x-2) - (x+2)^3] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 (108x - 216 - x^3 - 6x^2 - 12x - 8) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 (-x^3 - 6x^2 + 96x - 224) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 (x^3 + 6x^2 - 96x + 224) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \text{ ή } x^3 + 6x^2 - 96x + 224 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x^3 + 6x^2 - 96x + 224 = 0.$$

Η εξίσωση  $x^3 + 6x^2 - 96x + 224 = 0$  έχει πιθανές ακέραιες ρίζες, όλους τους διαιρέτες του 224. Με το σχήμα Horner διαπιστώνουμε εύκολα ότι μία ακέραια ρίζα της είναι το 4 με παραγοντοποίηση:

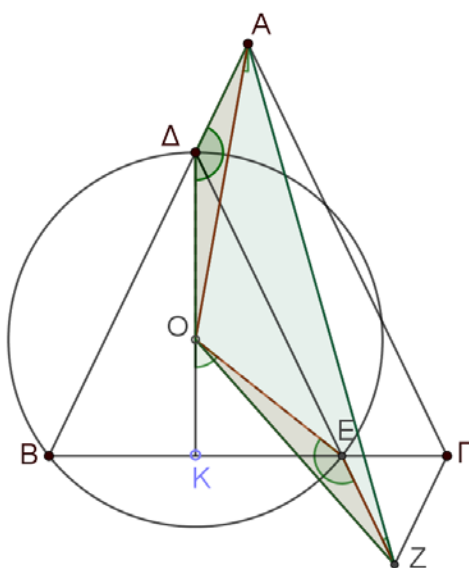
$$x^3 + 6x^2 - 96x + 224 = (x-4)(x^2 + 10x - 56) = (x-4)^2(x+14).$$

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: 2 (τριπλή), 4 (διπλή) και -14.

### Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Παίρνουμε σημείο  $\Delta$  πάνω στην πλευρά  $AB$  και σημείο  $E$  πάνω στην πλευρά  $B\Gamma$  έτσι ώστε οι ευθείες  $\Delta E$  και  $A\Gamma$  να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της  $\Delta E$  προς το μέρος του  $E$  παίρνουμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $EZ = A\Delta$ . Αν  $O$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $\Delta BE$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $O, Z, A$  και  $\Delta$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

#### Λύση



Σχήμα 5

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, αφού από την παραλληλία ΔΕ || ΑΓ έπεται ότι ΔÊΒ = ΑÊΒ = ΑÊΓ. Επομένως η ευθεία ΟΔ είναι μεσοκάθετη της πλευρά ΒΕ και διχοτόμος της γωνίας ΒΔÊ, οπότε ΟΔÊ = ΟΔΒ.

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ έχουν από τις υποθέσεις δύο πλευρές τους ίσες, ΑΔ = ΕΖ και ΟΔ = ΟΕ. Επιπλέον, έχουμε

$$\text{ΟÊΖ} = 180^\circ - \text{ΟÊΔ} = 180^\circ - \text{ΟΔÊ} = 180^\circ - \frac{\text{ΒΔÊ}}{2} = 180^\circ - \text{ΟΔΒ} = \text{ΟΔΑ}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και ΔÂΟ = ÔΖΕ = ÔΖΔ, δηλαδή οι κορυφές Α και Ζ του τετραπλεύρου ΟΖΑΔ βλέπουν την πλευρά ΑΟ υπό ίσες γωνίες, οπότε τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

### Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:  $\begin{cases} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{cases}$ .

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Πρέπει  $xy \neq 0$ , αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy \cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3 - y^2) \cdot y^2 = -108 \\ xy = -3 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 3y^2 - 108 = 0 \\ x = \frac{-3 - y^2}{y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2} \\ x = -\frac{3 + y^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{-3 \pm 21}{2} \\ x = -\frac{3 + y^2}{y} \end{cases} \stackrel{y^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y^2 = 9 \\ x = -\frac{3 + y^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = -3 \\ x = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Πρέπει  $xy \neq 0$ , αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{cases} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{cases}.$$

Αν θέσουμε:  $xy = \varphi$ ,  $y^2 = \omega > 0$ , τότε με αγνώστους  $\varphi$  και  $\omega$  προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varphi\omega = -108 \\ \varphi + \omega = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi\omega = -108 \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-3 - \varphi) = -108 \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^2 + 3\varphi - 108 = 0 \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2} \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{-3 \pm 21}{2} \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 9 \text{ ή } \varphi = -12 \\ \omega = -3 - \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi, \omega) = (9, -12) \\ \text{ή} \\ (\varphi, \omega) = (-12, 9) \end{cases}. \end{aligned}$$

Επειδή πρέπει  $\omega = y^2 > 0$ , δεκτή είναι μόνο η λύση  $(\varphi, \omega) = (-12, 9)$ , οπότε οι τιμές των  $x, y$  θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\begin{cases} xy = -12 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -12 \\ y = 3 \text{ ή } y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-4, 3) \text{ ή } (x, y) = (4, -3).$$

#### Πρόβλημα 4

Με  $k$  διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς  $2, 3, 4, \dots, 1024$  έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του  $k$ .

#### Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός της μορφής  $2^k$  είναι πολλαπλάσιο όλων των δυνάμεων του 2 με μικρότερο θετικό εκθέτη. Έτσι καθένας από τους αριθμούς

$$2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 32 = 2^5, 64 = 2^6, 128 = 2^7, 256 = 2^8, 512 = 2^9, 1024 = 2^{10}$$

είναι πολλαπλάσιο όλων των προηγούμενων του, εκτός του πρώτου, οπότε όλοι πρέπει να έχουν διαφορετικά χρώματα. Επομένως ο αριθμός των χρωμάτων που θα χρειαστούμε είναι  $k \geq 10$ .

Θα αποδείξουμε ότι με τα 10 χρώματα, έστω  $X_i$ , για τον αριθμό  $2^i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$  μπορούμε να χρωματίσουμε όλους τους υπόλοιπους έτσι ώστε να μην υπάρχει το ίδιο χρώμα μεταξύ ενός αριθμού και κάποιου πολλαπλασίου του. Πράγματι, αρκεί να κάνουμε την αντιστοίχιση:

$$X_i \rightarrow \{2^i, 2^i + 1, \dots, 2^{i+1} - 1\}, i = 1, 2, \dots, 9 \text{ και } X_{10} \rightarrow 2^{10} = 1024.$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι  $k_{\min} = 10$ .

The Art of Mathematics

**ΘEMATA 2020**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
81<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
6 Νοεμβρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}} + \frac{(-12)^{16}}{6^{15}} + 2^0 \right) \cdot \left( \frac{(-8)^{31}}{4^{31}} + \frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}} + 2020 \right).$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}} + \frac{(-12)^{16}}{6^{15}} + 2^0 \right) \cdot \left( \frac{(-8)^{31}}{4^{31}} + \frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}} + 2020 \right) \\ &= \left( \frac{(-6)^{16} (-6)^1}{(-3)^{16}} + \frac{(-12)^{15} (-12)}{6^{15}} + 2^0 \right) \cdot \left( \left( \frac{-8}{4} \right)^{31} + \left( \frac{-20}{-10} \right)^{31} + 2020 \right) \\ &= \left( (-6) \cdot \left( \frac{-6}{-3} \right)^{16} + (-12) \cdot \left( \frac{-12}{6} \right)^{15} + 2^0 \right) \cdot \left( \left( \frac{-8}{4} \right)^{31} + \left( \frac{-20}{-10} \right)^{31} + 2020 \right) \\ &= \left( (-6) \cdot 2^{16} + (-12) \cdot (-2)^{15} + 2^0 \right) \cdot \left( (-2)^{31} + 2^{31} + 2020 \right) \\ &= \left( (-6) \cdot 2^{16} - (-6) \cdot (-2) \cdot (-2)^{15} + 1 \right) \cdot \left( -2^{31} + 2^{31} + 2020 \right) \\ &= \left( (-6) \cdot 2^{16} - (-6) \cdot (-2)^{16} + 1 \right) \cdot (0 + 2020) = (0 + 1) \cdot 2020 = 2020. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)**

Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει μία μόνο φορά με όλες τις υπόλοιπες ομάδες. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες

**Λύση**



Για να έχουν οι δώδεκα ομάδες διαφορετικούς βαθμούς στον πίνακα της βαθμολογίας, δεδομένου ότι ο μέγιστος αριθμός παιχνιδιών και βαθμών είναι 11, η μοναδική δυνατή βαθμολογία είναι η παρακάτω:

O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Επομένως, αν υπάρχει τέτοια αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες, αυτή θα είναι η ενδέκατη.

Η απάντηση αυτή θα είναι αποδεκτή, εφόσον αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να προκύψει η παραπάνω βαθμολογία στο τέλος της ενδέκατης αγωνιστικής ημέρας. Πράγματι, η παραπάνω βαθμολογία είναι εφικτή, αν υποθέσουμε ότι κάθε ομάδα έχει κερδίσει όλα τα παιχνίδια με ομάδες που βρίσκονται κάτω από αυτή στη βαθμολογία, δηλαδή η O1 θα κερδίσει όλες τις υπόλοιπες ομάδες, η O2 θα κερδίσει τις O3, O4, ... O12, κ.ο.κ. Επομένως, η αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες είναι η ενδέκατη.

### Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

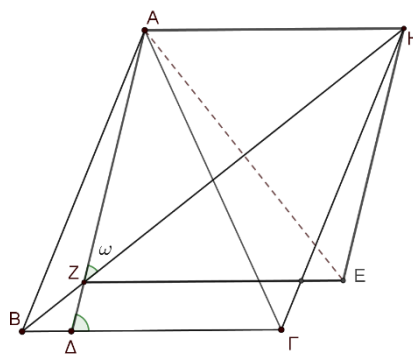
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες AB και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει:

$$AZ = B\Gamma.$$

Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες.

Αν  $\hat{AZH} = \omega$ , τότε:

- (α) Να βρείτε τη γωνία  $\hat{\Gamma Z}$  συναρτήσει του  $\omega$ .  
 (β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.



Σχήμα 1

### Λύση

(α) Επειδή οι ευθείες AB και ΓΗ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή έχουμε  $B\Gamma = AH$ . Όμως από υπόθεση  $AZ = B\Gamma$ , οπότε θα είναι και  $AZ = AH$ . Επομένως το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει τις δύο γωνίες της βάσης του ίσες, δηλαδή

$$\hat{AHZ} = \hat{AZH} = \omega. \quad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΗ έχουμε ότι:

$$\hat{ZAH} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{AZH} = 180^\circ - 2\omega. \quad (2)$$

Τέλος, επειδή  $AH \parallel B\Gamma$  που τέμνονται από την ΑΔ, έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\hat{\Gamma Z} + \hat{ZAH} = 180^\circ. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι:

$$180^\circ - 2\omega + \hat{ZAH} = 180^\circ \Rightarrow \hat{ZAH} = 2\omega.$$

(β) Επειδή οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $AH = ZE$  και  $AZ = HE$ . Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α) είναι  $AZ = AH$ , οπότε το τετράπλευρο ΑΖΕΗ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιες του ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0 \right) \cdot \left( \frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021 \right).$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0 \right) \cdot \left( \frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021 \right) \\ &= \left( \frac{(-6)^6}{(-3)^7} + \frac{(+12)^7}{(-6)^8} + 1 \right) \cdot \left( \frac{(+5)^{35}}{(-10)^{35}} + \frac{(-11)^{35}}{(-22)^{35}} + 2021 \right) \\ &= \left( \frac{(-6)^6}{(-3)^6(-3)} + \frac{12^7}{(-6)^7 \cdot (-6)} + 1 \right) \cdot \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^{35} + \left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + 2021 \right) \\ &= \left( -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-6}{-3}\right)^6 - \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{12}{6}\right)^7 + 1 \right) \cdot \left( -\left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + \left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + 2021 \right) \\ &= \left( -\frac{1}{3} \cdot 2^6 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^7 + 1 \right) \cdot (0 + 2021) = \left( -\frac{1}{3} \cdot 2^6 - \frac{(-2)}{6} \cdot (-2)^6 + 1 \right) \cdot 2021 \\ &= \left( -\frac{1}{3} \cdot 2^6 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^6 + 1 \right) \cdot 2021 = (0 + 1) \cdot 2021 = 1 \cdot 2021 = 2021. \end{aligned}$$

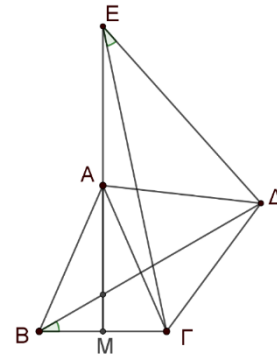
### Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma > B\Gamma$ . Εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  προς το μέρος του  $A$  κατά τμήμα  $AE = AB$ .

Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{DB\Gamma} = \widehat{E\Delta} = 30^\circ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



**Λύση**

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Έστω  $\hat{A} = \hat{x}$  και  $\widehat{AB\Delta} = \hat{B}_2 = \hat{y}$ . Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Delta$  ( $AB = A\Delta$ ) έχουμε  $\widehat{A\Delta B} = \hat{A}_1 = \hat{y}$  και

$$2\hat{y} + \hat{x} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{y} + \hat{x} = 120^\circ \quad (1).$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(\hat{y} + \hat{B}_1) + \hat{x} &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\hat{y} + 2\hat{B}_1 + \hat{x} &= 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ. \end{aligned}$$

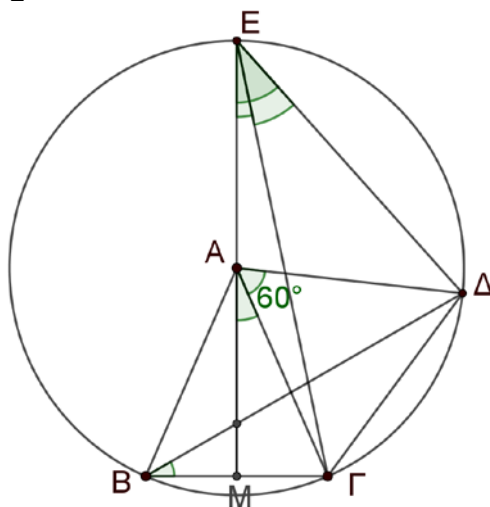
Για τη γωνία  $\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$  παρατηρούμε ότι:

$$\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta} = \widehat{A\hat{E}\Delta} - \widehat{A\hat{E}\Gamma} \quad (2)$$

Έχουμε ότι  $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 60^\circ$ . Επιπλέον τα τρίγωνα  $EA\Delta$  και  $EAG$  είναι ισοσκελή, αφού  $EA = AB = AG = AD$ . Για τις εξωτερικές γωνίες τους  $\widehat{M\hat{A}\Delta}$  και  $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$  έχουμε:

$$\widehat{M\hat{A}\Delta} = \frac{\hat{x}}{2} + \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \frac{\hat{x}}{2} + 60^\circ, \text{ αφού } A\Gamma\Delta \text{ ισόπλευρο τρίγωνο}$$

$$\text{και } \widehat{M\hat{A}\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}, \text{ αφού η διάμεσος } AM \text{ είναι και διχοτόμος.}$$



Σχήμα 2

Επομένως, έχουμε

$$\widehat{M\hat{A}\Delta} = \frac{\hat{x}}{2} + 60^\circ = 2 \cdot \widehat{A\hat{E}\Delta} \Rightarrow \widehat{A\hat{E}\Delta} = \frac{\hat{x}}{4} + 30^\circ$$

$$\text{και } \widehat{M\hat{A}\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{x}}{2} = 2 \cdot \widehat{A\hat{E}\Gamma} \Rightarrow \widehat{A\hat{E}\Gamma} = \frac{\hat{x}}{4}.$$

$$\text{Επομένως, έχουμε } \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta} = \widehat{A\hat{E}\Delta} - \widehat{A\hat{E}\Gamma} = \frac{\hat{x}}{4} + 30^\circ - \frac{\hat{x}}{4} = 30^\circ.$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Επειδή  $EA = AB = AG = AD$  ο κύκλος κέντρου  $A$  και ακτίνας  $AB$  περνάει από τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  και  $E$ . Οι γωνίες  $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$  είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο χορδής  $\Gamma\Delta$ , οπότε θα είναι

$$\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta} = \frac{\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

### Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα  $M$  που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα  $\Phi$  που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας  $\Phi$  δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα  $M$ . Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας  $M$  έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας  $\Phi$  έγινε 37.

Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

### Λύση

Έστω ότι η ομάδα Μ έχει  $\mu$  μέλη και η ομάδα Φ έχει  $\varphi$  μέλη. Τότε το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι  $25\mu$ , το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι  $35\varphi$  και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι  $25\mu + 35\varphi$ .

Με την αλλαγή προτίμησης των 2 μελών της ομάδας Φ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι  $27(\mu + 2)$ , το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι  $37(\varphi - 2)$  και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι

$$27(\mu + 2) + 37(\varphi - 2).$$

Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 25\mu + 35\varphi &= 27(\mu + 2) + 37(\varphi - 2) \\ \Leftrightarrow 25\mu + 35\varphi - 27\mu - 37\varphi &= 54 - 74 \\ \Leftrightarrow -2\mu - 2\varphi &= -20 \Leftrightarrow \mu + \varphi = 10, \end{aligned}$$

οπότε η παρέα είχε συνολικά 10 μέλη.

**Ένα παράδειγμα τέτοιας παρέας είναι το εξής:**

Ομάδα Μ: 4 μέλη με ηλικίες 25 έτη και μέσο όρο ηλικιών τα 25 έτη.

Ομάδα Φ: 6 μέλη από τα οποία 4 έχουν ηλικία 37 έτη και τα δύο έχουν ηλικία με

ηλικίες 31 έτη. Μέσος όρος ηλικιών:  $\frac{2 \cdot 31 + 4 \cdot 37}{6} = \frac{62 + 148}{6} = \frac{210}{6} = 35$  έτη.

Αν αλλάξουν προτίμηση τα μέλη με την ηλικία των 31 ετών, τότε στην ομάδα Μ

έχουμε μέσο όρο ηλικιών  $\frac{4 \cdot 25 + 2 \cdot 31}{6} = \frac{162}{6} = 27$  έτη, ενώ στην ομάδα Φ έχουμε

μέσο όρο ηλικιών  $\frac{4 \cdot 37}{4} = 37$  έτη.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός  $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$  είναι σύνθετος για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο  $n$ .

#### Λύση

Ο αριθμός  $A$  γράφεται:  $A = (3^4)^{3^n} + (2^2)^{2n+1} = (3^{3^n})^4 + (2^n)^4 2^2 =$   
 $= (3^{3^n})^4 + 4(2^n)^4.$

Θέτουμε  $x = 3^{3^n}$  και  $y = 2^n$  οπότε:

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = \\ &= ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2). \end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί  $(x + y)^2 + y^2$  και  $(x - y)^2 + y^2$  είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο  $A$  είναι σύνθετος.

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $A$  είναι 5, άρα ο αριθμός διαιρείται με το 5 και επειδή  $A > 5$ , έπεται ο  $A$  είναι σύνθετος.

Πράγματι, γράφοντας  $A = (3^4)^{3^n} + (4)^{2n+1}$ , αρκεί να δούμε το τελευταίο ψηφίο του πρώτου προσθετέου και του δεύτερου.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3:

$$3^1 \text{ λήγει σε } 3, 3^2 \text{ λήγει σε } 9, 3^3 \text{ λήγει σε } 7, 3^4 \text{ λήγει σε } 1, \text{ κ.ο.κ}$$

Ο εκθέτης που έχουμε είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα ο  $(3^4)^{3^n}$  λήγει σε 1.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 4:

$$4^1 \text{ λήγει σε } 4, 4^2 \text{ λήγει σε } 6, 4^3 \text{ λήγει σε } 4, 4^4 \text{ λήγει σε } 6, \text{ κ.ο.κ}$$

Ο εκθέτης που έχουμε είναι περιττός, άρα ο  $(4)^{2n+1}$  λήγει σε 4.

Προσθέτοντας έχουμε ότι ο  $A$  λήγει σε 5, που είναι το ζητούμενο.

### Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να βρείτε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

#### Λύση

Ο Ανδρέας θα βρει τον αριθμό  $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019$ , ενώ ο Βασίλης θα βρει τον αριθμό  $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2019^2$ . Η Γεωργία πρέπει να υπολογίσει τον αριθμό:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 3A + 3B + 2020 = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 2019) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2019^2) + 2020 \\ &= (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) + (3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1) + \dots + (3 \cdot 2019^2 + 3 \cdot 2019 + 1) + 1 \\ &= (1+1)^3 - 1^3 + (2+1)^3 - 2^3 + (3+1)^3 - 3^3 + \dots + (2019+1)^3 - 2019^3 + 1 \\ &= 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + 2020^3 - 2019^3 + 1 = -1 + 2020^3 + 1 = 2020^3. \end{aligned}$$

**Σημείωση:** Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει για με  $n = 2019$  τους τύπους

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} = 30^\circ$  και έστω  $M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $A\Gamma M$  ( $C_{A\Gamma M}$ ) τέμνει τη πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο  $N$  προς την πλευρά  $AB$  και η κάθετη από σημείο  $\Gamma$  προς την  $\Delta N$  τέμνονται σε σημείο του κύκλου  $C_{A\Gamma M}$  που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $A\Delta N$ . (Σημείωση: Για ένα τρίγωνο  $XYZ$ , ο περιγεγραμμένος κύκλος είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του  $X, Y, Z$ . Αν  $O$  είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε  $OX=OY=OZ$ )

#### Λύση

Το  $M$  είναι μέσο της βάσης  $B\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , άρα η γωνία  $\angle AM\Gamma$  είναι ορθή (διότι η  $AM$  είναι διάμεσος, μεσοκάθετος και διχοτόμος), οπότε κέντρο του κύκλου  $C_{A\Gamma M}$  είναι το μέσο  $N$  της πλευράς  $A\Gamma$ . Άρα θα ισχύουν οι ισότητες:

$$NA = N\Gamma = N\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \rho \quad (1)$$

Έστω ότι η κάθετη από το  $N$  προς την  $AB$  (που είναι μεσοκάθετος της  $A\Delta$ ) τέμνει τον κύκλο  $C_{A\Gamma M}$  στο σημείο  $E$  και θα ισχύει ότι

$$NA = NE = N\Delta = \rho. \quad (2)$$

Επειδή

$$\hat{N}_2 = E\hat{N}A = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

και  $NA = NE = \rho$  συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο  $ANE$  είναι ισόπλευρο, οπότε:

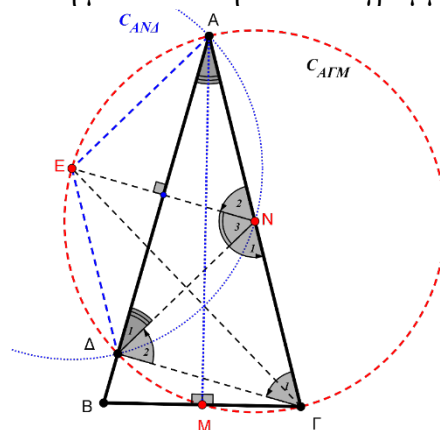
$$NA = NE = EA = \rho \quad (3).$$

Επιπλέον, το σημείο  $E$  είναι το μέσο του τόξου  $A\Delta$  και θα ισχύει ότι:

$$EA = ED = \rho. \quad (4)$$

Επειδή από τις προηγούμενες ισότητες  $ED = NE = EA = \rho$ , το σημείο  $E$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $A\Delta N$ .

Επίσης, επειδή  $NA = NE = EA = \rho$ , το τρίγωνο  $\Delta EN$  είναι ισόπλευρο και επίσης το τρίγωνο  $\Delta\Gamma N$  είναι ισόπλευρο, αφού  $N\Delta = N\Gamma = \rho$  και  $\Delta\hat{N}\Gamma = 2\hat{A} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ . Επομένως, η ευθεία  $\Gamma E$  είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος  $N\Delta$ .



Σχήμα 1

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Έστω  $\Sigma(\nu)$  το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου  $\nu$ . Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους  $\nu$  που ικανοποιούν την ισότητα:  $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu$ .

#### Λύση

##### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Επειδή  $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu > 0 \Rightarrow \nu < 2025$ , το άθροισμα των ψηφίων του  $\nu$  μπορεί να πάρει τιμές από το 1, για τους αριθμούς 1, 10, 100, 1000, μέχρι 28, για τον αριθμό 1999. Επομένως, έχουμε

$$1 \leq \Sigma(\nu) = 2025 - \nu \leq 28 \Leftrightarrow -2024 \leq -\nu \leq -1997 \Leftrightarrow 1997 \leq \nu \leq 2024,$$

οπότε πρέπει να βρούμε ποιοι από τους ακέραιους από το 1997 μέχρι και το 2024 ικανοποιούν την ισότητα  $\Sigma(\nu) = 2025 - \nu$ . Με έλεγχο βρίσκουμε ότι την ισότητα αυτή ικανοποιούν μόνο οι αριθμοί 1998 και 2016.

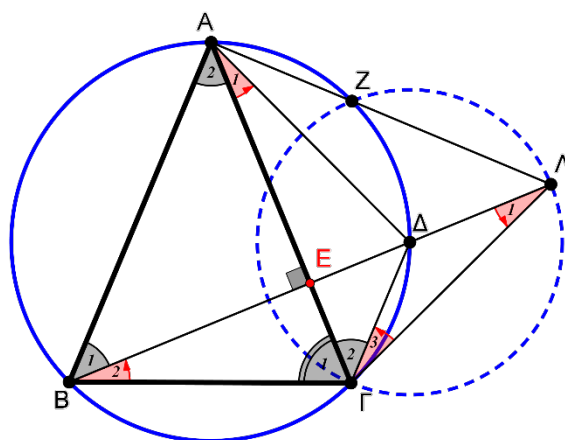
##### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Από το κριτήριο διαιρετότητας με το 9, ξέρουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $\nu$  ισχύει  $9 \mid \nu - \Sigma(\nu)$ . Από τη συνθήκη του προβλήματος έχουμε  $9 \mid 2025 = \nu + \Sigma(\nu)$ . Επομένως  $9 \mid (\nu - \Sigma(\nu)) + (\nu + \Sigma(\nu)) = 2\nu$ , οπότε  $9 \mid \nu$ . Επομένως από τους αριθμούς  $1997 \leq \nu \leq 2024$ , μένει να ελέγξουμε μόνο τα πολλαπλάσια του 9, που είναι οι αριθμοί 1998, 2007 και 2016, από τους οποίους μόνο οι 1998, 2016 ικανοποιούν τη συνθήκη.

### Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $\hat{A} = 45^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω  $C_{AB\Gamma}$ , στο σημείο  $\Delta$ . Η προέκταση του ύψους  $BE$  τέμνει επίσης στο σημείο  $\Lambda$  την εφαπτόμενη του κύκλου  $C_{AB\Gamma}$  στο σημείο του  $\Gamma$ . Η  $A\Lambda$  τέμνει τον κύκλο  $C_{AB\Gamma}$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Delta$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $A\Gamma\Lambda$  και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $Z\Gamma\Lambda$ .

#### Λύση



Σχήμα 2

Εφόσον  $\hat{A} = \hat{A}_2 = 45^\circ$  και το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} = 67,5^\circ \quad (1).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AEB$ , έχουμε:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 = 45^\circ \quad (2)$$

και κατά συνέπεια

$$\hat{B}_2 = 22,5^\circ \quad (3).$$

Οι γωνίες  $\hat{A}_1$  και  $\hat{B}_2$  είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο  $C_{AB\Gamma}$  και βαίνουν στο τόξο  $\Gamma\Delta$ . Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2 \stackrel{(3)}{=} 22,5^\circ \quad (4).$$

Οι γωνίες  $\hat{\Gamma}_2$  και  $\hat{B}_1$  είναι (επίσης) εγγεγραμμένες στο κύκλο  $C_{AB\Gamma}$  και βαίνουν στο τόξο  $A\Delta$ .

Άρα

$$\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 \stackrel{(2)}{=} 45^\circ \quad (5).$$

Η γωνία  $\hat{\Gamma}_3$  σχηματίζεται (στο κύκλο  $C_{AB\Gamma}$ ) από τη χορδή  $\Gamma\Delta$  και την εφαπτομένη  $\Gamma\Lambda$ . Άρα

$$\hat{\Gamma}_3 = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \stackrel{(4)}{=} 22,5^\circ \quad (6).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες γωνιών, έχουμε:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \stackrel{(1)}{=} 67,5^\circ = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 \stackrel{(5),(6)}{=} 45^\circ + 22,5^\circ.$$

Δηλαδή (στο τρίγωνο  $B\Gamma\Lambda$ ) η  $\Gamma E$  είναι ύψος και διχοτόμος οπότε το τρίγωνο  $B\Gamma\Lambda$  είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια  $\hat{\Gamma}_3 = \hat{A}_1 \stackrel{(6)}{=} 22,5^\circ$  (7) και  $\Gamma B = \Gamma\Lambda$ .

Από την ισότητα (7) καθώς και το γεγονός ότι η  $A\Gamma$  είναι μεσοκάθετος της  $B\Lambda$ .

Άρα τα τρίγωνα  $A\Gamma\Lambda$  και  $\Delta\Gamma\Lambda$  είναι ισοσκελή. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι  $A\Delta \perp \Gamma\Lambda$ , το οποίο σε συνδυασμό με τη καθετότητα  $\Lambda E \perp A\Gamma$ , μας δίνει ότι το σημείο  $\Delta$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $A\Delta\Lambda$ .

Προηγουμένως αποδείξαμε ότι η  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος της  $\Gamma\Lambda$ . Άρα η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\Gamma\hat{A}\Lambda$ . Οπότε  $\Delta\Gamma = \Delta Z$  και επειδή  $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$ , το σημείο  $\Delta$  είναι περίκεντρο του τριγώνου  $Z\Gamma$ .

### Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Θεωρούμε το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , όπου οι  $a, b, c$  είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $b > 2a$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{a+b+c}{b-2a}.$$

#### Λύση

Έχουμε ότι  $a+b+c = f(1)$  και

$$f(1) - f(-3) = (a+b+c) - (9a-3b+c) = 4b-8a = 4(b-2a)$$

Οπότε  $A = \frac{a+b+c}{b-2a} = \frac{f(1)}{\frac{f(1)-f(-3)}{4}} = \frac{4f(1)}{f(1)-f(-3)}$ . Όμως από την εκφώνηση έχουμε

ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , οπότε



$$f(1) - f(-3) \leq f(1) \Rightarrow 4 \leq \frac{4f(1)}{f(1) - f(-3)} \Rightarrow A \geq 4.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν,  $f(-3) = 0$ , και το τριώνυμο  $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$  είναι ένα τέτοιο παράδειγμα για το οποίο επιπλέον ισχύει  $b > 2a$ .

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Αφού  $f(x) \geq 0$ , η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι μη θετική και  $a > 0$ , οπότε έπεται ότι  $b^2 \leq 4ac$ , δηλαδή  $c \geq \frac{b^2}{4a}$ . Επομένως, έχουμε:

$$A = \frac{a+b+c}{b-2a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-2a} = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{4(\lambda - 2)},$$

όπου  $\lambda = \frac{b}{a} > 2$ . Όμως

$$\frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{4(\lambda - 2)} = \frac{(\lambda - 2)^2 + 8(\lambda - 2) + 16}{4(\lambda - 2)} = \frac{\lambda - 2}{4} + \frac{4}{\lambda - 2} + 2 \geq 2 + 2 = 4,$$

με ισότητα για  $\lambda = 6$ .

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί  $p$  για τους οποίους ο ακέραιος  $3p - 8$  ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου αριθμού.

#### Λύση

Έστω  $a$  θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει:  $3p - 8 = a^3$ .

Τότε θα ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} 3p - 8 = a^3 &\Leftrightarrow 3p = a^3 + 8 \Leftrightarrow 3p = a^3 + 2^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3p = (a + 2)(a^2 - 2a + 4) \quad (1). \end{aligned}$$

Από την εξίσωση (1) (επειδή ο αριθμός  $p$  είναι πρώτος) μπορεί να ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$a + 2 = 3 \text{ και } a^2 - 2a + 4 = p \quad (\alpha)$$

$$a + 2 = p \text{ και } a^2 - 2a + 4 = 3 \quad (\beta)$$

$$a + 2 = 1 \text{ και } a^2 - 2a + 4 = 3p \quad (\gamma)$$

$$a + 2 = 3p \text{ και } a^2 - 2a + 4 = 1 \quad (\delta)$$

Από τη περίπτωση  $(\alpha)$  έχουμε:  $a = 1$  και  $p = 3$

Από τη περίπτωση  $(\beta)$  έχουμε:  $a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$  και  $p = 3$ .

Από τη περίπτωση  $(\gamma)$  έχουμε:  $a = -1$  και  $3p = 7$  (αδύνατο).

Από τη περίπτωση  $(\delta)$  έχουμε:  $a^2 - 2a + 3 = 0$  με  $\Delta = -8 < 0$  (αδύνατο).

Από όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε:  $p = 3$ .

### Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Αν οι  $x, y, z$  είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες  $(x, y, z)$ , που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x^3 + 8y - 4z = -3 \\ 3x^2 + y^2 - 2z = 1 \\ 3x - 4y + z^2 = 68 \end{cases}$$

#### Λύση

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 66$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 80.$$

Στην τελευταία εξίσωση ο αριθμός 80 είναι το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων και ενός τέλειου κύβου θετικού ακέραιου. Οι κύβοι θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι του 80 δίνουν επιτρεπτές τιμές για το  $x+1$  τις 1, 2, 3 και 4.

Για  $x+1=1 \Rightarrow x=0$ , που απορρίπτεται γιατί πρέπει  $x > 0$ .

Για  $x+1=2 \Leftrightarrow x=1$ , έπεται ότι  $(y+2)^2 + (z-3)^2 = 72$ , οπότε η μοναδική περίπτωση που το 72 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι

$$(y+2)^2 = (z-3)^2 = 36 \Leftrightarrow y+2 = \pm 6 \text{ και } z-3 = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow y=4 \text{ και } z=9, \text{ αφού } y, z > 0,$$

οπότε έχουμε την τριάδα  $(x, y, z) = (1, 4, 9)$ , η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι είναι λύση του συστήματος.

Για  $x+1=3 \Leftrightarrow x=2$ , έπεται ότι  $(y+2)^2 + (z-3)^2 = 53$ , οπότε οι περιπτώσεις που το 53 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι:

$$\begin{aligned} & (y+2)^2 = 4, (z-3)^2 = 49 \text{ ή } (y+2)^2 = 49, (z-3)^2 = 4 \\ & \Leftrightarrow (y+2 = \pm 2 \text{ και } z-3 = \pm 7) \text{ ή } (y+2 = \pm 7 \text{ και } z-3 = \pm 2) \\ & \Leftrightarrow \{y=0 \text{ και } z=10\} \text{ ή } \{y=5 \text{ και } z=5 \text{ ή } z=1\}, \text{ αφού } y, z > 0 \\ & \Leftrightarrow (y, z) \in \{(0,10), (5,5), (5,1)\}. \end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα έχει λύσεις  $(x, y, z)$  τα στοιχεία του συνόλου

$$\{(2, 0, 10), (2, 5, 5), (2, 5, 1)\},$$

από τις οποίες καμία δεν είναι λύση του συστήματος.

Για  $x+1=4 \Leftrightarrow x=3$ , έπεται ότι  $(y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ , οπότε οι περιπτώσεις που το 16 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι:

$$\begin{aligned} & \{(y+2)^2 = 0 \text{ και } (z-3)^2 = 16\} \text{ ή } \{(y+2)^2 = 16 \text{ και } (z-3)^2 = 0\} \\ & \Leftrightarrow \{y+2 = 0 \text{ και } z-3 = \pm 4\} \text{ ή } \{y+2 = \pm 4 \text{ και } z-3 = 0\} \\ & \Leftrightarrow \{y = 2 \text{ και } z = 3\}, \text{ αφού } y, z > 0. \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει η τριάδα  $(x, y, z) = (3, 2, 3)$ , που δεν είναι λύση του συστήματος.

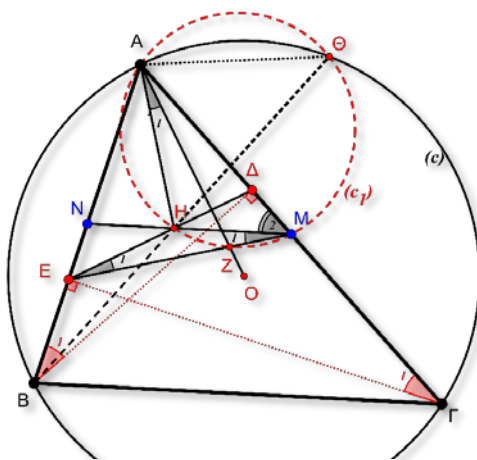
### Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  με  $\hat{A} = 60^\circ$ . Δίνονται επίσης τα ύψη του  $B\Delta, \Gamma E$  καθώς και τα μέσα  $M, N$  των πλευρών του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ακόμη  $Z$  το σημείο τομής των  $OA, EM$  και  $H$  το σημείο τομής των  $MN, \Delta E$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, H, Z, M$  ανήκουν σε κύκλο, έστω  $c_1$ .

(β) Αν οι κύκλοι  $c$  και  $c_1$  τέμνονται στο σημείο  $\theta$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $B, H, \theta$  είναι συνευθειακά.

### Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AG\epsilon$  είναι ορθογώνια με  $\hat{A} = 60^\circ$ , θα ισχύει:  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ$  και κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$A\Delta = \frac{AB}{2} = AN \text{ και } A\epsilon = \frac{AG}{2} = AM.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι τα τρίγωνα  $A\Delta N$  και  $A\epsilon M$  είναι ισοσκελή. Άρα

$$AH \perp \epsilon M \quad (1).$$

Από το τρίγωνο  $AO\Gamma$  έχουμε:  $A\hat{O}\Gamma = 2\hat{B}$  και κατά συνέπεια  $\hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{B}$  (α). Το τετράπλευρο  $BE\Delta\Gamma$  είναι εγγράψιμο, οπότε  $A\hat{\Delta}\epsilon = \hat{B}$  (β).

Από τις ισότητες (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι:

$$AO \perp \epsilon\Delta \quad (2) (**).$$

Από τις καθετότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες  $\hat{A}_1$  και  $\hat{\epsilon}_1$  είναι ίσες:  $\hat{A}_1 = \hat{\epsilon}_1$  (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες).

Από τα ισόπλευρα τρίγωνα  $A\Delta N$  και  $A\epsilon M$ , συμπεραίνουμε ότι και το τρίγωνο  $H\epsilon M$  είναι ισοσκελές. Άρα  $\hat{\epsilon}_1 = \hat{M}_1$  και σε συνδυασμό με την προηγούμενη ισότητα γωνιών ( $\hat{A}_1 = \hat{\epsilon}_1$ ) καταλήγουμε  $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ , δηλαδή το τετράπλευρο  $AHZM$  είναι εγγράψιμο.

(β) Επειδή τα σημεία  $M, N$  είναι μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  συμπεραίνουμε ότι  $MN \parallel B\Gamma$ , οπότε  $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$ . Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $AHM\theta$  συμπεραίνουμε ότι  $\hat{M}_2 = A\hat{\theta}H$ . Άρα

$$A\hat{\theta}H = \hat{\Gamma} \quad (3).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Gamma\theta$  έχουμε:  $A\hat{\theta}B = \hat{\Gamma}$  (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία  $B, H, \theta$  είναι συνευθειακά.

