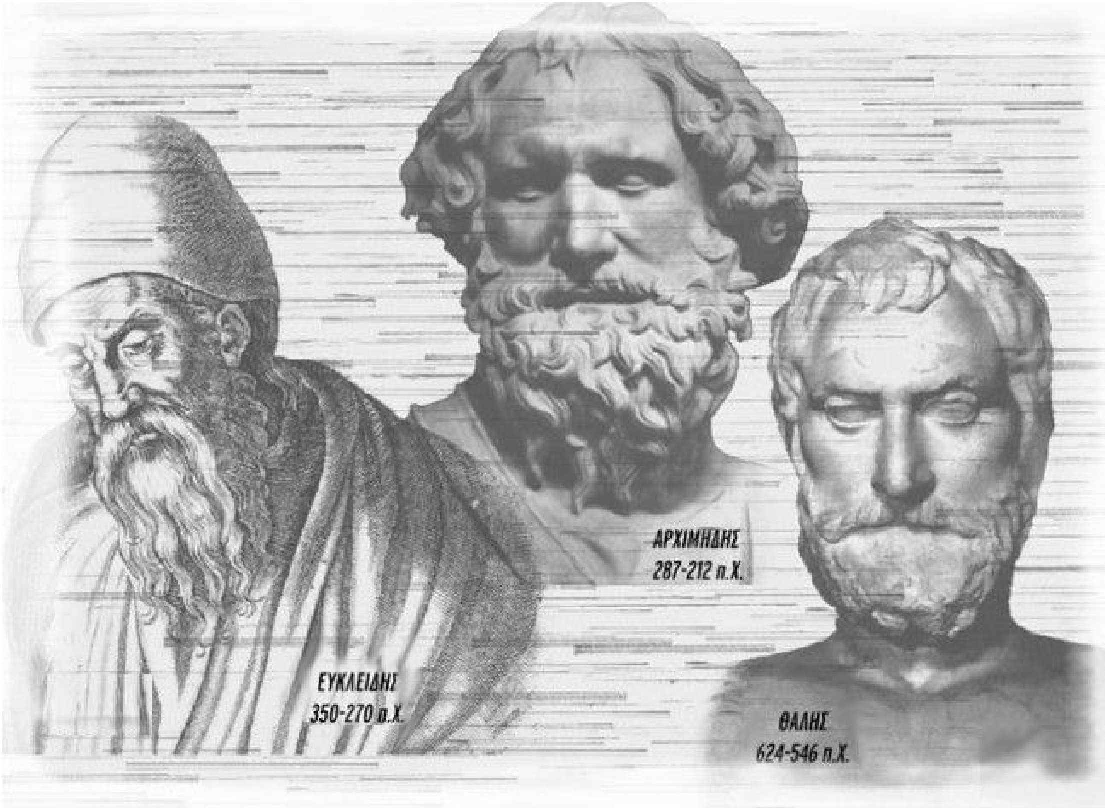
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ Ε.Μ.Ε.



ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

“ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

The Art of Mathematics

ΘΕΜΑΤΑ 2007

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $xyzxyz$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x\neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^{4} \cdot 7^{2}$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha|\delta-\gamma|+\alpha|\delta-\varepsilon|+\varepsilon|\beta-\alpha|+\varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\gamma|+|\delta-\gamma|+|\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta<\mathrm{K}<\delta$.

(ii) Αν είναι

$$x=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x,y,z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}}=\widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}}=\widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\leq 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^3<512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 α-κριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = \mathrm{x},\ \log_{150} 3 = \mathrm{y}$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 50^{\frac{1-\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2(1-\mathrm{y})}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ .

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=2$ και $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{IA} + \mathrm{IB} + \mathrm{I\Gamma} \leq 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΘΕΜΑΤΑ 2008

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2008 - 4(4x+5y) - 48x - 60y.$$

Πρόβλημα 2.

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του a ;

Πρόβλημα 3

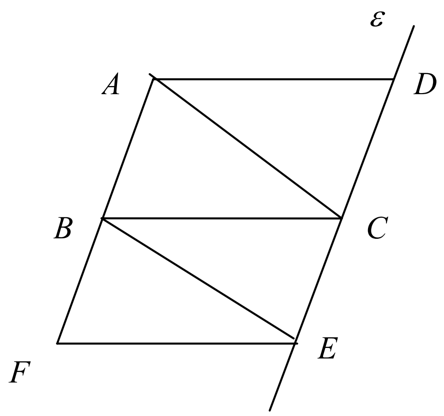
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ABC και ευθεία ε που περνάει από το C παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον, δίνεται ότι

$$CD = CE = AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF = AB$.

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC ;



Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a,b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a,b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b + 26a = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \frac{5}{12} - \left(24b + 52a\right)^{-2} - \left(72b + 156a\right)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

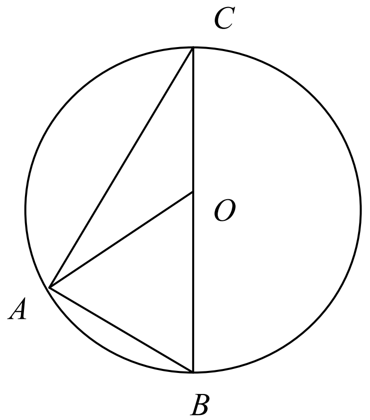
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a > 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x + y + z = 3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}\,.$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0\,,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\le 0\,.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A\Gamma}<\Delta\mathrm{B}+\mathrm{B\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^ος^ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν ο z είναι μιγαδικός με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: $|z| = 1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} x^3 + 3xy + y^3 = 1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{matrix}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Πρόβλημα 4

. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Α′, Β′ και Γ′ αντίστοιχα, ώστε $\Sigma A' \leq A\Sigma$, $\Sigma B' \leq B\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x = (\Sigma AB)$, $y = (\Sigma B\Gamma)$ και $z = (\Sigma A\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, όπου $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ > ΑΒ) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A}\Gamma\Gamma'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^{4}\right]^{3}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β , αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\mathrm{ΕΓ}=\mathrm{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{ΑΛ}\perp\mathrm{ΕΖ}$. ***Μονάδες 3***

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α . ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$
$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right) + y^2\left(z+x\right) + z^2\left(x+y\right) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P\left(x\right)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\left(x-k\right)P\left(3x\right) = k\left(x-1\right)P\left(x\right),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x+6$, $g(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$, και τον άξονα των x ισούται με 3. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}, \text{ με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \Gamma_1$ και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού n, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\big(f(f(x)) - f(y)\big) = f(x) - f(f(y)),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$

Μονάδες 2

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \text{ και } \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right).$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

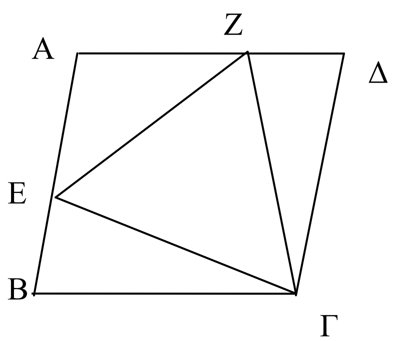
Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $AB = x$ μέτρα και μήκος $B\Gamma = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 5



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu,\ \text{όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

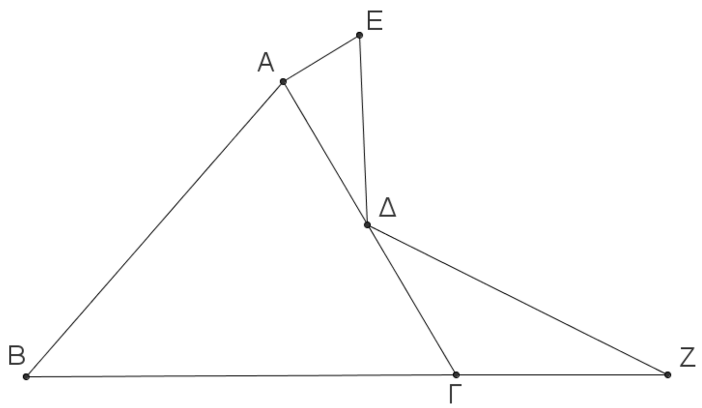
$$S=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+997^2-998^2-999^2+1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=90^\circ$, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta=30^0$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ. *Μονάδες 1*

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β. *Μονάδες 4*



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2, αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3-y^3=26z^3$$
$$x^2y-xy^2=6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z. *Μονάδες 3*

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x+2y+3z=8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$x^3 + y^3 = 65z^3$$
$$x^2 y + xy^2 = 20z^3$$
$$x - y + 2z = 10.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC , K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά , δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο, όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n + kn,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1 = 1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας a_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ με $(a,b) \neq (0,0)$ και $(x,y) \neq (0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2 - y^2\right) - 2bxy = x\left(a^2 - b^2\right) - 2aby$$

$$b\left(x^2 - y^2\right) + 2axy = y\left(a^2 - b^2\right) + 2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x = a$ και $y = b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r} = 15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο M και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2011

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

Μονάδες 3

(β) Αν ισχύει ότι:
$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$
να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=27$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\alpha\gamma\beta}=100\alpha+10\gamma+\beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων $\beta,\ \gamma$ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x+12<5x-1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$ ***Μονάδες 2***

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Οι ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \beta\ge 12\ \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές. ***Μονάδες 1***
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου. ***Μονάδες 2***
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\dfrac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α,β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

Μονάδες 3

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2 = x^2+4\alpha\,,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή του A και είναι παράλληλη προς τη πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Δ και έστω E το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή A. Από το A τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την EB η οποία τέμνει τη $\mathrm{B\Delta}$ στο σημείο M και τη $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{BK}=\mathrm{K\Delta}=\Delta\mathrm{A}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha+\beta+\gamma=2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 67^2\,.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= \left(yz+1\right)^2. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (M είναι το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K}<\mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN}_1, \mathrm{\Gamma K}_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2+2xy=\ \ 5$$
$$y^2-3xy=-2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n-\frac{k}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ a_1=1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n τέτοιοι ώστε : $a_n=\dfrac{1}{2^{1000}}$.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2012

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) \text{ και } B=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

Μονάδες 2

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma \text{ και } \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

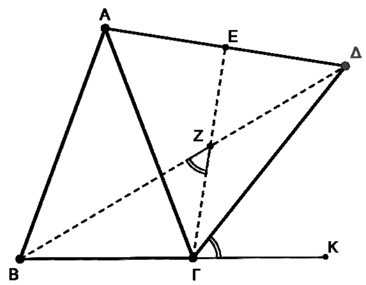
να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.
Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$) και οξυγώνιο, το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισόπλευρο και $Ε$ είναι το μέσο του $ΑΔ$. Αν το $Κ$ βρίσκεται στη προέκταση της $ΒΓ$ και οι $ΒΔ, ΓΕ$ τέμνονται στο σημείο $Ζ$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $Β\hat{Ζ}Γ$ και $Κ\hat{Γ}Δ$, είναι ίσες.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.
Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72$^{\text{ος}}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3+\frac{9\alpha-20\beta^2}{\beta^2},$$

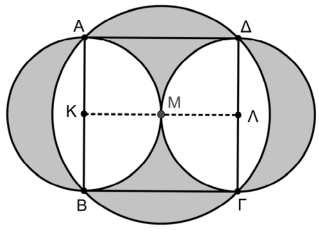
αν δίνεται ότι $\alpha=\beta=2^{-3}$. ***Μονάδες 2***

(β) Αν τα ποσά x,y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\dfrac{x}{y}=\alpha>0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x,y και ισχύει ότι $\mathrm{K}\le 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της. ***Μονάδες 3***

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K,Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι ΑΒ και ΓΔ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους ΚΛ. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο Μ διαφορετικό από το Α στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Αν υπάρχουν ακέραιοι x,y,a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2+(y^2-a^2)x+y(y-a)^2=0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x, y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+\left|x-2\right|<0 \end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, y)$, όπου (x, y) λύση του συστήματος (Σ).

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο M. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M}, \mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu = 1,2,3,...$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4},\ y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4},\ z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του $\mathrm{A\Delta, BE, \Gamma Z}$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A_1, B_1, \Gamma_1}$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A_2, B_2, \Gamma_2}$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{O\Delta, OE, OZ}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2}$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2013

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \text{ και } \mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

(β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\omega$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right) \text{ και } Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\ \text{ και }\ \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2$ και Γ_1,Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_2,\Gamma_1,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_1,\Gamma_2,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}=0,$$

όπου $x\in\mathbb{R}$ άγνωστος και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών, με $x<0$, για τα οποία ισχύει ή ισότητα:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5 .$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}$) και $\mathrm{A\Gamma E}$ ($\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AE}$) με $\mathrm{B\hat{A}\Delta}=\mathrm{\Gamma\hat{A}E}=\hat{\theta}<90^\circ$. Οι BE και $\mathrm{\Gamma\Delta}$ τέμνονται στο σημείο K. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και ABE τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{A}K}=\mathrm{\Gamma\hat{A}M}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{13-2x}+\sqrt{13+2x}$$

είναι ακέραιος.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$73^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right) - y^2 = f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x},$$

όπου $a > 1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑΤΑ 2014

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Πρόβλημα 2
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση ΑΔ, μεγάλη βάση ΒΓ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:
(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.
(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ, συναρτήσει του μήκους $\alpha=\mathrm{A\Delta}$.

Πρόβλημα 4
Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\ \ \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3},\ y=3^{-4}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Πρόβλημα 3
Δύο θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{A\Delta}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.
(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x = \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y = \sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1 - \frac{|x-1|}{3} \geq 0 \quad \text{και} \quad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right) \leq 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ$. Ο κύκλος $c_1(Γ, ΒΓ)$ (με κέντρο $Γ$ και ακτίνα $ΒΓ$) τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΔ)$ (με κέντρο $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$) τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$ και τον κύκλο $c_1(Γ, ΒΓ)$ στο σημείο $Ζ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $ΑΔΖ$ τέμνει την ευθεία $ΒΕ$ στο σημείο $Μ$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $ΒΓ$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$
$$x + y = 3a,$$
$$y + z \geq 3a,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{I\hat{B}C}$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014
Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3-4x^2=5ax^2-26ax+24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2\le 8\right\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y,$ όταν $(x,y)\in D$, και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $C:(x-1)^2+(y-2)^2=8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Πρόβλημα 3

Έστω $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο, ώστε

$$f(a)\ge k+2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O},R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K, M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στα σημεία E,Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ,N, αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K},\Lambda,\mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΘΕΜΑΤΑ 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}$ *και* $14\frac{2}{7}$ *είναι μεικτοί.*

Πρόβλημα 3.

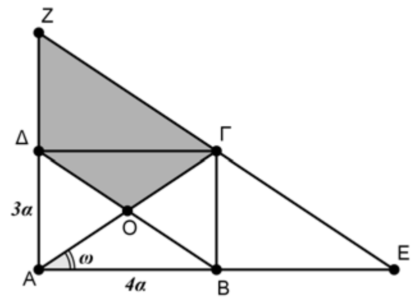
Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ ισούται με το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB=4\alpha\ cm\ ,\ A\Delta=3\alpha\ cm\ .$$

1.Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2.Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.
3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.



Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.
1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.
Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2014
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\frac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Delta}=\Gamma\Delta$. Φέρουμε το ύψος του $\Delta\mathrm{E}$, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw}=1000x+100y+10z+w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx}=1000w+100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=4x^2+kx+m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k,m δεν είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 2
Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a=b$.

Πρόβλημα 3
Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K,KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB, η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑΤΑ 2016

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$76^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

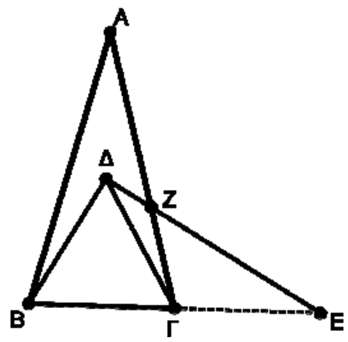
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$..
(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.
(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(3\alpha - 5\beta\right)^{2015} + \left(18\alpha^2 + \beta^2\right)^{2016}$$

Πρόβλημα 2.
Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$) και $\hat{A} = 30^0$. Το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο και το σημείο $Ε$ βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ και είναι τέτοιο ώστε $ΒΓ = ΓΕ$. Αν η πλευρά $ΑΓ$ τέμνεται από τη $ΔΕ$ στο σημείο $Ζ$, τότε:
(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Α\hat{Γ}Δ$.
(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ορθογώνιο.



Πρόβλημα 4
Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.
(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

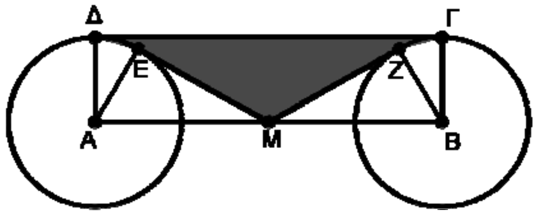
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .



Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
.Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}},\ \text{όπου}\ x>0\ \text{και}\ \ x\neq 27.$$

Πρόβλημα 2
Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ=ΑΓ$ και $\hat{A}=40^\circ$. Έστω $Δ$ το μέσο της πλευράς $ΑΓ$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΔΓΖ$ των οποίων οι κορυφές $Ε$, $Ζ$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $ΑΓ$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή $Β$. Αν η $ΕΔ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Κ$, να αποδείξετε ότι η $ΚΖ$ είναι κάθετη στη $ΒΓ$.

Πρόβλημα 4
Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1=(2-x)^2$, $\alpha_2=2^2+x^2,\dots$, όπου x πραγματικός αριθμός.
Να προσδιορίσετε:
(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.
(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση
$$10x^3-6x^2-12x-8=0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$) και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις ΑΓ, ΜΝ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1=(x-4)^2$, $b_2=x^2+16,\ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4-8x^3-24x^2-32x-16=0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathrm{A}\to R$, όπου $\mathrm{A}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $f(x)\cdot g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. Αν για κάθε $x,y\in\mathrm{A}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right)=\frac{f\big(g(x)\big)}{y}\quad(1),\qquad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=\frac{g\big(f(x)\big)}{y},\quad(2)$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f,g είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β) $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)=1$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(C,AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B,BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑΤΑ 2017

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Elftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha+\beta=4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης:

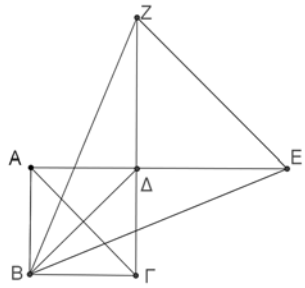
$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right).$$

Πρόβλημα 2.

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$, (δείτε το διπλανό σχήμα).



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

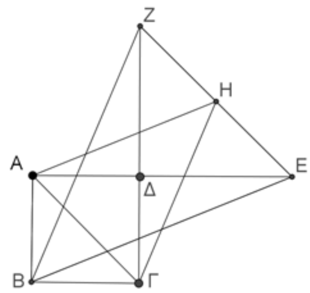
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3},\ \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Πρόβλημα 2



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.
(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ
(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.
Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Πρόβλημα 3
(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.
(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Πρόβλημα 4
Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:
$$x^2 + 4x - 9 = 4|x|.$$

Πρόβλημα 2
Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:
$$\overline{abc} = (a+b+c)^2 + a + b + c$$

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ ώστε $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 240^\circ$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά $\mathrm{A\Delta}$.

Πρόβλημα 4
Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\dfrac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από τους δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}, ab\neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2+ax+b=a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις.
Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_{2017}+2017=0 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=(-x_1)^3+(-x_2)^3+\ldots+(-x_{2017})^3 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(Ο,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$ και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

28 Ιανουαρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4-32x^2+257-\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8}=0.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\sqrt{n(n+182)}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(Ο,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, την ΑΓ στο Ζ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c(Ο,R) (για δεύτερη φορά) στο Η. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΒΖ στο Κ και την ΒΓ στο Λ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου ΓΖΗ τέμνει την ΕΓ στο Μ και την ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ΝΖ.

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f\big(2xf(y)+y\big)+f\big(2x(y+1)\big)=f(2x+y)+4xy, \qquad (1)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

- **(i)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a)=1$.
- **(ii)** Να βρείτε τον τύπο της f.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑΤΑ 2018

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Πρόβλημα 3
Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\cdot\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ και $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}=2\cdot\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρείτε πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$, $\gamma = -\frac{18}{2^3}$, $\delta = \frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A} = \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακεραίων.

(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Πρόβλημα 3

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ το άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, το ύψος του είναι ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R.

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{x^2+x+1}.$$

Πρόβλημα 2
Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β έτσι ώστε $\beta = 2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N} \geq 4$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ = 2ΑΒ$. Αν $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$ και $Κ$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΕ$ εφάπτεται στην $ΓΔ$ στο σημείο $Γ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΚ$ εφάπτεται στην $ΓΕ$ στο σημείο $Γ$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^4+4\right),$$
για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Πρόβλημα 2
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε
$$f(x+T)=f(x),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \mathbin{/\!/} ΓΔ \text{ και } ΑΒ < ΓΔ)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $OΔΓ$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $MΔ$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $MΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Πρόβλημα 4
Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p,q,r με $p>q>r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑΤΑ 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

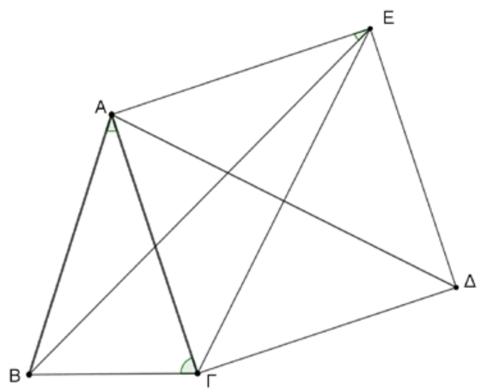
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας.

Σημείωση: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

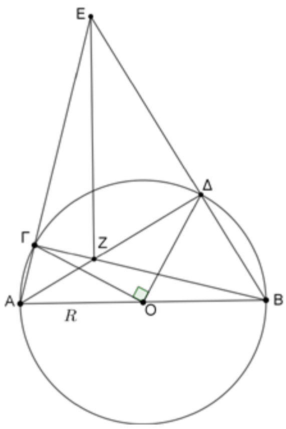
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $\mathrm{AB} = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = 2R$.



Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Πρόβλημα 4

Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Πρόβλημα 2
Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.
(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A=2(n+1)-3(m+2)+7\,.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $B=\dfrac{162}{n^2}-\dfrac{m^2}{3721}$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy}=\frac{3z+5y}{yz}=\frac{5x+z}{zx}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C(\mathrm{O},R)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta}=2\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$.
(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{\Gamma}=30^\circ$
(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$\left||x+8|-3x\right|=\frac{x+7}{6}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y=y+3z=z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\dfrac{x}{y}$ και $\dfrac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot \sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y):-\pi\le x\le\pi,-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A},\mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}=\mathrm{B}\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A}=\overline{xxxabc}=x\cdot 10^5+x\cdot 10^4+x\cdot 10^3+a\cdot 10^2+b\cdot 10+c,$$

όπου x,a,b,c ψηφία με $x\neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=|mx+4|+|mx-4|, m>0$ και $y=12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m>0$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}$.
Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}<90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta}+\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑΤΑ 2020

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

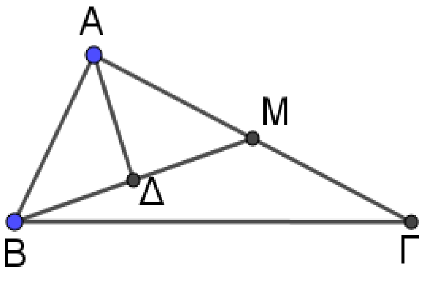
Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Πρόβλημα 2
Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB} = \alpha\ cm$ και $\mathrm{A\Gamma} = 2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.
(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.
(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Πρόβλημα 4
Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

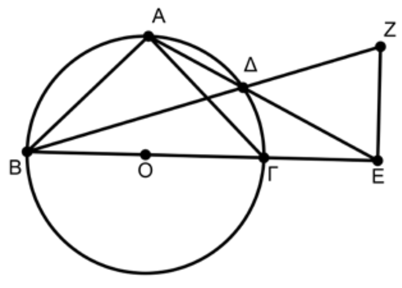
$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Πρόβλημα 2
Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Πρόβλημα 3.
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β,
(ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ,
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$.
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύουν:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

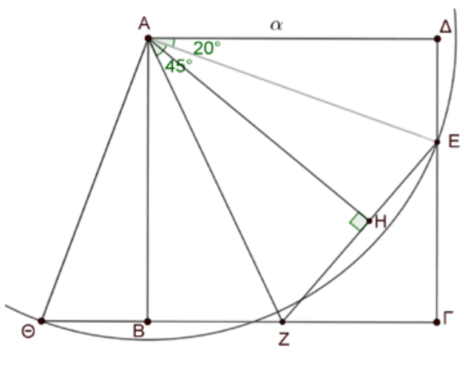
να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1.$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α. ***Σημείωση:*** *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy = 1,\ x, y > 0,$ να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

Πρόβλημα 3
Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσον όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\Delta, \Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην ΔE.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, $n=1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, $n=1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1}=\frac{M_n+M_{n+2}}{2},\ \text{για κάθε } n=1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n, $n=1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 2
Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P\left(x^2\right)=\left(P(x)\right)^2-2P(x)+2,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB<AΓ<BΓ$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του $Δ$ βρίσκεται επάνω στην $BΓ$ και περνά από τα σημεία B,O. Ο κύκλος c_1 τέμνει την AB στο σημείο E και τον κύκλο c στο σημείο Z . Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος $c_2(O,Δ,E)$ του τριγώνου $OΔE$, τέμνει την AB στο σημείο K , να αποδείξετε ότι τα σημεία $Γ,Δ,Z,O$ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOK.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!