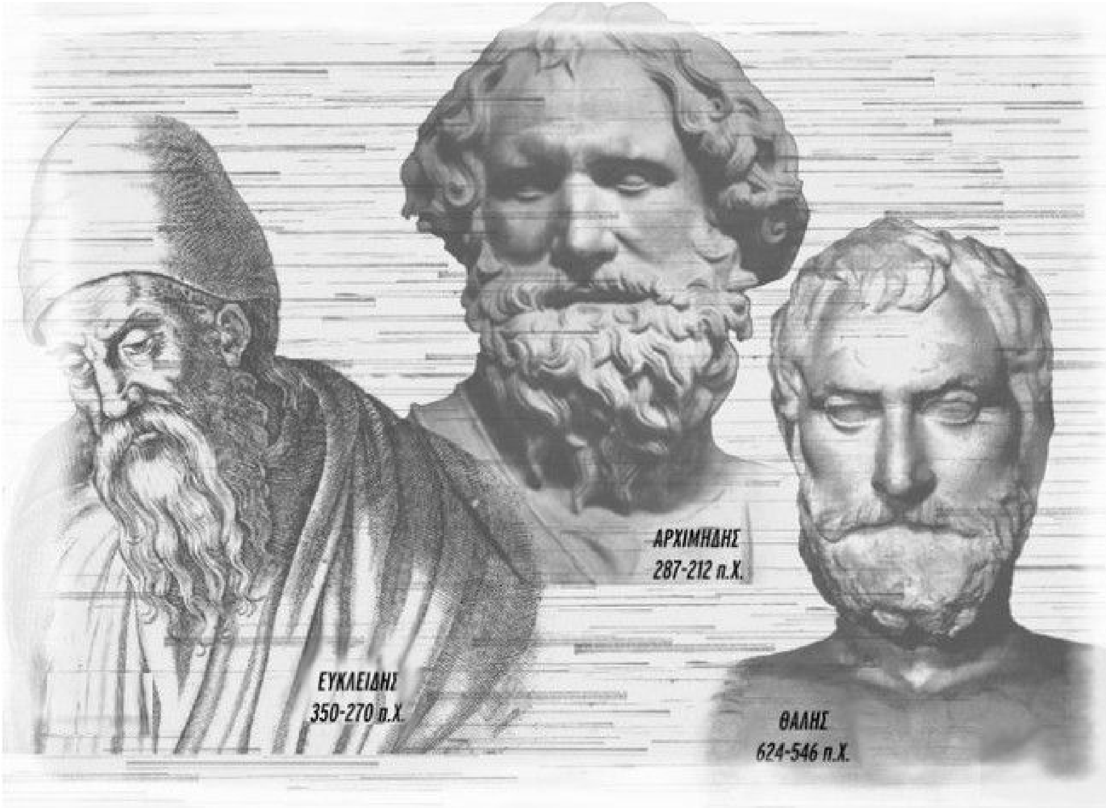
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ Ε.Μ.Ε.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

"ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΘΕΜΑΤΑ 2007

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $xyzxyz$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^{4} \cdot 7^{2}$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha|\delta-\gamma| + \alpha|\delta-\varepsilon| + \varepsilon|\beta-\alpha| + \varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha| + |\beta-\gamma| + |\delta-\gamma| + |\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Αν είναι

$$x = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta), y = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta), z = (\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \leq 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^3 < 512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 α-κριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = x,\ \log_{150} 3 = y$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=2$ και $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{IA} + \mathrm{IB} + \mathrm{I\Gamma} \leq 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

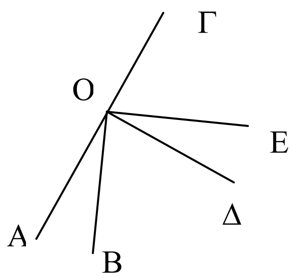
1. $\dfrac{42}{2\nu+1}\in\mathbb{Z}$ με $\nu\in\mathbb{N}\Rightarrow 2\nu+1\in\Delta_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{AOB}=\omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega+90^\circ+\omega=180^\circ \Leftrightarrow 5\omega=90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega=18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow\frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta}\Rightarrow 2\beta(\gamma-\delta-\gamma-\delta)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0\Rightarrow\beta\delta=0\Rightarrow\beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}=\overline{xyzxyz}&=100000x+10000y+1000z+100x+10y+z\\
&=100100x+10010y+1001z\\
&=1001\cdot(100x+10y+z)\\
&=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{xyz}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό Ν.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$\mathrm{A}=(2\cdot 5)^{90}\cdot 2^2\cdot 3^4\cdot 7^2=10^{90}\cdot 4\cdot 81\cdot 49=15876\cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{6}{z}\Leftrightarrow 4x=3y \text{ και } xz=18\Leftrightarrow y=\frac{4x}{3} \text{ και } xz=18.$$

Επειδή οι αριθμοί x,z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz=18\Leftrightarrow(x,z)=(1,18) \text{ ή } (2,9) \text{ ή } (3,6) \text{ ή } (6,3) \text{ ή } (9,2) \text{ ή } (18,1),$$

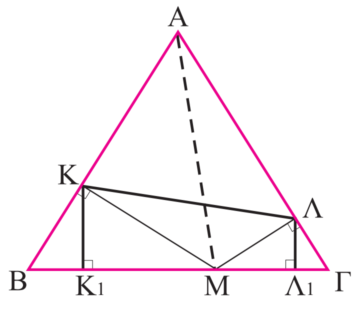
οπότε, από την ισότητα $y=\frac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$(x,y,z)=(3,4,6) \text{ ή } (6,8,3) \text{ ή } (9,12,2) \text{ ή } (18,24,1).$$

3. Έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma})=(\mathrm{ABM})+(\mathrm{A\Gamma M})\Leftrightarrow\frac{36\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\mathrm{MK}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\mathrm{MK}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MK}+\mathrm{M\Lambda}=3\sqrt{3}\quad(1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{KK_1M}$ και $\mathrm{\Lambda\Lambda_1M}$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$\mathrm{KK_1}=\frac{1}{2}\mathrm{MK},\ \ \mathrm{\Lambda\Lambda_1}=\frac{1}{2}\mathrm{M\Lambda} \text{ και}$$

$$\mathrm{MK_1}=\mathrm{MK}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{M\Lambda_1}=\mathrm{M\Lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \mathrm{K_1\Lambda_1}=\mathrm{MK_1}+\mathrm{M\Lambda_1}=(\mathrm{MK}+\mathrm{M\Lambda})\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}.$$

και $\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left(MK + M\Lambda\right) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Άρα είναι $\left(\mathrm{KK}_1\Lambda\Lambda_1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1\right)\mathrm{K}_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115 .$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma - \beta) + \delta(\beta - \gamma) = (\gamma - \beta)(\alpha - \delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta - \gamma)(\alpha - \beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$, το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$.

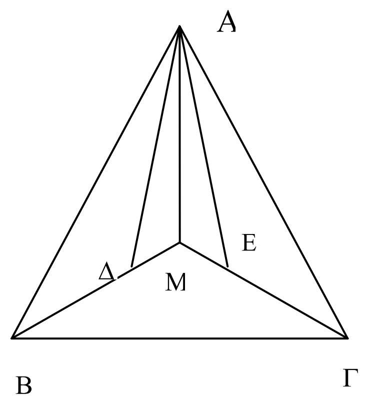
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \widehat{\mathrm{AME}} . \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma},$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2 ,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8\left(x^3 + y^2\right) \le 8 \cdot 64 = 512 .$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000 , \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot(y+11z)=49000 \Rightarrow 9 \mid 49000,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

B΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

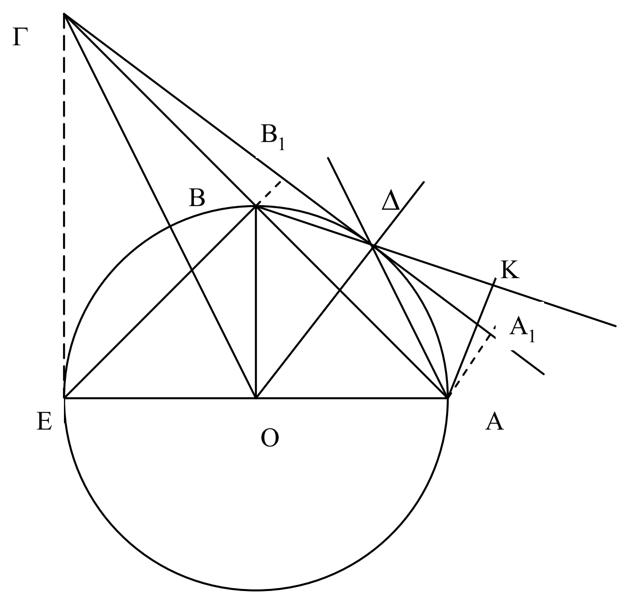
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3)&=(1-x_1)(1+x_1)(1-x_2)(1+x_2)(1-x_3)(1+x_3)\\&=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\\&=\mathrm{P}(1)\left[-(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)\right]\\&=-\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1)=-(1+\kappa+\lambda)(-1-\kappa+\lambda)=(1+\kappa)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1ος Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta$.

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\mathrm{OB}\parallel\mathrm{E}\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE} \Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E} \text{ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} \Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

2ος Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\mathrm{K\Delta A}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\mathrm{KA} = \mathrm{K\Delta} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\mathrm{AA_1} \perp \Gamma\Delta$, $\mathrm{BB_1} \perp \Gamma\Delta$ και $\mathrm{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta \mathrm{A}}{\Delta \mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\Delta\mathrm{A}^2/2R}{\Delta\mathrm{B}^2/2R} = \frac{\mathrm{AA_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{B}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι ΔΒ = ΚΔ = ΚΑ και

$$\mathrm{KB} = \mathrm{K\Delta} + \Delta\mathrm{B} = 2\cdot \mathrm{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

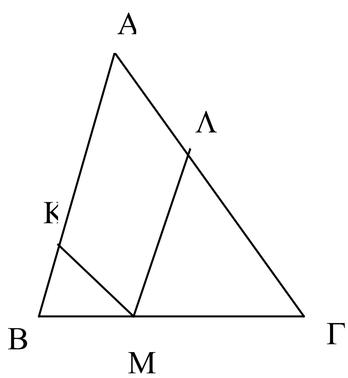
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} + \overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^\alpha \left(\beta^3\right)^\beta} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^\alpha \beta^\beta\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\mathrm{MB} = \kappa$ και $\mathrm{M\Gamma} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{-2\gamma^2/\alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right)/\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2^{ος} τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $\mathrm{S}\min=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\dfrac{\kappa}{\lambda}=\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^x=2,\ 150^y=3$

$$\mathrm{A}=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^x\cdot150^y}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2^{ος} τρόπος

$$\log_{150}\mathrm{A}=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\qquad(1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{2x^2+1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται και

$$h^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{3x-1}{2}}, & x\geq\dfrac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\dfrac{1-3x}{2}}, & x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow h^{-1}(x)=h(x)$ με $x\geq\dfrac{1}{3}$.

Αφού f γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των $G_{h^{-1}}$, G_h θα βρίσκονται στη πρώτη διχοτόμο y=x.

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\dfrac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\dfrac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}2x^3-3x+1=0\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}$ αφού $x\geq\dfrac{1}{3}$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow x\in\left\{1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$.

$2^{ος}$ τρόπος

$\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=h^{-1}(x)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ x=h(y)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\dfrac{2x^3+1}{3}\\ x=\dfrac{2y^3+1}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\dfrac{2x^3+1}{3}\\ x-y=\dfrac{2}{3}\left(y^3-x^3\right)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}(2)\\ (3)\end{matrix}$

$(3)\Leftrightarrow x=y$ ή $2x^2+2yx+2y^2+3=0$ $\qquad(4)\Leftrightarrow x=y$ αφού η (4) έχει $\Delta=-\left(12y^2+24\right)<0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ κ.λπ.

4. Θεωρούμε τον περιγεγραμένο κύκλο $C_1(K,R)$ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τον συμμετρικό του $C_2(\Lambda,R)$ ως προς τη ΒΓ. Τότε το Λ θα είναι μέσο του μικρού τόξου ΒΓ.

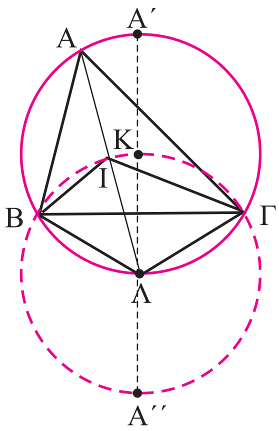
Έστω A' το αντιδιαμετρικό του Α στον C_1 και A'' το αντιδιαμετρικό του Κ στον C_2.

Το τρίγωνο $BA''\Gamma$ είναι ισόπλευρο οπότε $IA''=IB+I\Gamma$. Επίσης $B\hat{I}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=120^o$.

Επομένως $IA+IB+I\Gamma=IA+IA''$.

Αλλά $IA''\leq KA''=2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου) και $IA=A\Lambda-R<A'\Lambda-R=KA'=R$.

Άρα $IA+IB+I\Gamma\leq 3R=3\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$, αφού ΒΓ=2 $\Rightarrow R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



$2^{ος}$ τρόπος

Έστω ΙΑ=x, ΙΒ=y, ΙΓ=ω

Τότε $\dfrac{\hat{A}}{2}=30^{o}\Rightarrow x=2\rho$

$B\hat{I}\Gamma=120^{o}\Rightarrow y^{2}+\omega^{2}+y\omega=4\Rightarrow (y+\omega)^{2}-y\omega=4\Rightarrow (y+\omega)^{2}=4+y\omega\Rightarrow$

$y+\omega=\sqrt{4+y\omega}=\sqrt{4+\lambda}$ με λ=yω.

Εξάλλου $(I B\Gamma)=\dfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot 2=\rho$

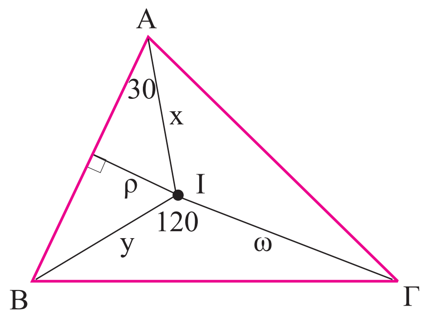
$(I B\Gamma)=\dfrac{1}{2}y\omega\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{4}$, οπότε $\rho=\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί λοιπόν $\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4+\lambda}\leq 2\sqrt{3}$, ή $\lambda\sqrt{3}+2\sqrt{4+\lambda}\leq 4\sqrt{3}$.

Όμως $R\sqrt{3}=2\Rightarrow R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ και $R>\rho\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{3}}>\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow 8>3\lambda\Rightarrow\dfrac{8}{3}>\lambda\Rightarrow 4>\dfrac{8}{3}>\lambda$.

Οπότε αρκεί $2\sqrt{4+\lambda}\leq\sqrt{3}(4-\lambda)$, ή $4(4+\lambda)\leq 2(4-\lambda)^{2}$, ή $3\lambda^{2}-28\lambda+32\geq 0$

που ισχύει αφού Δ=–188.



ΘΕΜΑΤΑ 2008

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

Πρόβλημα 2.

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του a;

Πρόβλημα 3

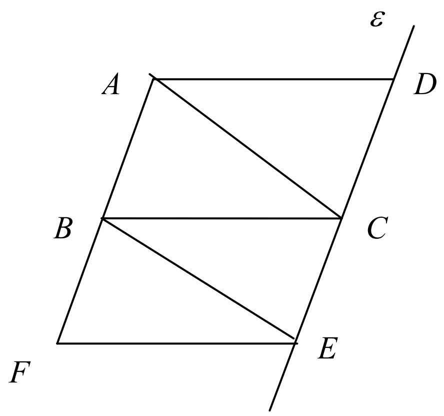
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ABC και ευθεία ε που περνάει από το C παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον, δίνεται ότι

$$CD=CE=AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;



Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A}=\overline{ababab}$, όπου a,b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A}=\overline{ababab}$, όπου a,b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

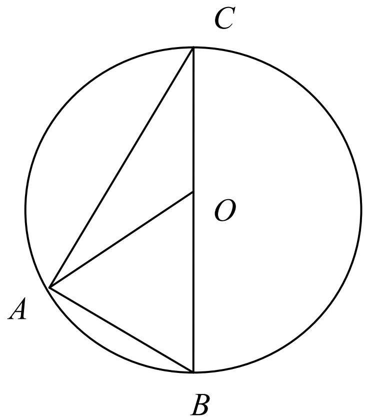
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB=2\sqrt{7}$ και $AC=6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A}=abc$, όπου a,b,c ψηφία με $a>0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24\cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

.
Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:
το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Αν οι αριθμοί x,y,z είναι τέτοιοι ώστε $x>0, y+1>0, z+2>0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \le 3.$$

Για ποιες τιμές των x,y,z ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}\,.$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0\,,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\le 0\,.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A\Gamma}<\Delta\mathrm{B}+\mathrm{B\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: $|z|=1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} x^3+3xy+y^3=1 \\ x^3-x^2=y^3-y^2 \end{Bmatrix} \qquad (\Sigma)$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu+1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Πρόβλημα 4

. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Α′, Β′ και Γ′ αντίστοιχα, ώστε $\Sigma A' \leq A\Sigma$, $\Sigma B' \leq B\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x=(\Sigma AB)$, $y=(\Sigma B\Gamma)$ και $z=(\Sigma A\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^4+z^4 \leq 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A}=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

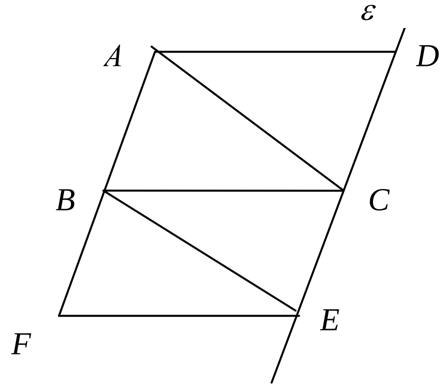
Λύση (1ος τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-2\cdot2\cdot(4x+5y)-6\cdot(8x+10y)\\&=2008-2\cdot(8x+10y)-6\cdot(8x+10y)=2008-2\cdot1-6\cdot1=2000.\end{aligned}$$
(2ος τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-16x-20y-48x-60y\\&=2008-64x-80y=2008-8(8x+10y)=2008-8\cdot1=2000.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού a;

Λύση
Αν π είναι το πηλίκο και υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε $\pi=6\upsilon+5$ και
$$a=5(6\upsilon+5)+\upsilon,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow a=31\upsilon+25,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}.$$
Η τιμή $\upsilon=0$ αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.
- Για $\upsilon=1$, λαμβάνουμε $a=31\cdot1+25=56$.
- Για $\upsilon=2$, λαμβάνουμε $a=31\cdot2+25=87$.
- Για $\upsilon=3$, λαμβάνουμε $a=31\cdot3+25=118$
- Για $\upsilon=4$, λαμβάνουμε $a=31\cdot4+25=149$.

Άρα οι δυνατές τιμές του τριψήφιου αριθμού a είναι : $a=118$ ή $a=149$.

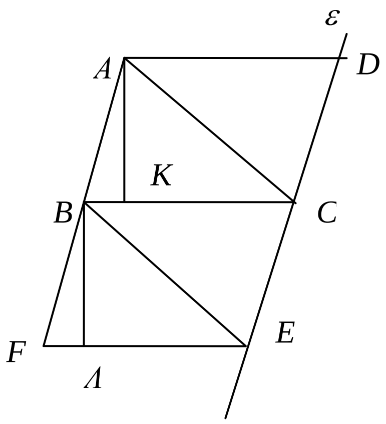
Πρόβλημα 3
Δίνεται το τρίγωνο ABC και η ευθεία ε που περνάει από το C και είναι παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον δίνεται ότι
$$CD=CE=AB.$$
Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.
α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;

Λύση

α) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $BFEC$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι $AD = BC = FE$. Έτσι τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα ABC και ACD έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου $ABCD$ ως προς τη βάση BC. Ομοίως τα ύψη των τριγώνων $BFE,\ BEC$ προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν $AK \perp BC$ και $B\Lambda \perp FE$, τότε τα τρίγωνα ABK και $BF\Lambda$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και $A\hat{B}K = B\hat{F}\Lambda$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες BC, EF με τέμνουσα τη BF). Άρα θα έχουν και $AK = B\Lambda$ Επομένως τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή $\mathrm{E}_{AFED} = \mathrm{E}_{ABC} + \mathrm{E}_{ACD} + \mathrm{E}_{BFE} + \mathrm{E}_{BEC} = 4\mathrm{E}_{ABC}$ έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{E}_{ABC}}{\mathrm{E}_{AFED}} = \frac{\mathrm{E}_{ABC}}{4\mathrm{E}_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού Α είναι ο αριθμός

$$\Sigma(\mathrm{A}) = a+b+a+b+a+b = 3\cdot a + 3\cdot b = 3\cdot(a+b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του b να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b=0$, τότε $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Επομένως ο αριθμός Α διαιρείται με το 9, όταν ο $3\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a\in\{3,6,9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $\mathrm{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αν $b=5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a+5\in\{3,6,9,12\}$, οπότε αφού $1\le a\le 9$ έπεται ότι $a\in\{1,4,7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot(12b+26a)\right]^{-2}-\left[6(12b+26a)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-(2\cdot1)^{-2}-(6\cdot1)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα. Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2}\cdot 12+2=8$ ημέρες.

Αν x,y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ και έχουμε

$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow\lambda=100.$$

Άρα έχουμε:

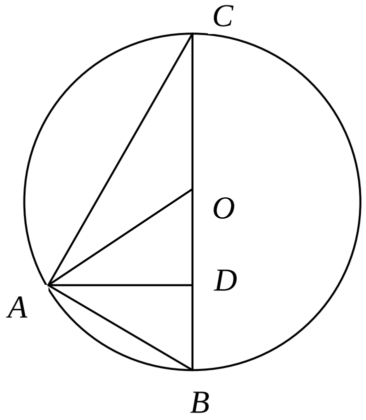
$\frac{x}{12}=100 \Rightarrow x=12\cdot 100=1200$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

$\frac{y}{10}=100 \Rightarrow y=12\cdot 100=1000$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

$\frac{z}{8}=100 \Rightarrow z=8\cdot 100=800$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα $AB=2\sqrt{7}$ και $AC=6$.



α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}.$$

Λύση

α) Επειδή είναι $\hat{A}=90^\circ$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2=AB^2+AC^2=6^2+\left(2\sqrt{7}\right)^2=36+4\cdot 7=64.$$

Άρα είναι $BC=8$.

β) Η διάμεσος AO ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι $AO=\frac{8}{2}=4$.

Για την εύρεση του ύψους AD χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ABC και έχουμε:

$$\left(ABC\right)=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{BC\cdot AD}{2}\Rightarrow 8\cdot AD=6\cdot 2\sqrt{7}\Rightarrow AD=\frac{12\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε $E=\pi R^2=\pi\cdot 4^2=16\pi.$

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC έχει εμβαδόν $E_x=E-\left(ABC\right)=16\pi-\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}=16\pi-6\sqrt{7}$, οπότε

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{16\pi-6\sqrt{7}}{16\pi}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow 48\pi-18\sqrt{7}>32\pi\Leftrightarrow 16\pi>18\sqrt{7}.$$

$$\Leftrightarrow 8\pi>9\sqrt{7}\Leftrightarrow 64\pi^2>81\cdot 7\Leftrightarrow \pi^2>\frac{567}{64},$$

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3{,}14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9.$

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0.$ Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α.

Λύση

Είναι $\mathrm{A} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $\mathrm{B} = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} - \mathrm{B} = 396 \Leftrightarrow 99(a-c) = 396 &\Leftrightarrow a - c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = a - 4. \end{aligned} \qquad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{A} - 41 = 50(a+b+c) &\Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c \\ &\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41, \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a-4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \qquad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο Α=541.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - \left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right) - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= y^3. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$
$$= (200000+4)^3 - (200000-4)^3 - 6 \cdot 200000^2 \cdot 4 - 4^3,$$

οπότε, αν θέσουμε $x = 200000$ και $y = 4$ στην προηγούμενη παράσταση, αυτή γίνεται $\mathrm{A} = y^3 = 4^3$.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2^2 - ab - 2a - 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-2)^2 + (2-a)^2\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = b - 2 = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = b = 2. \end{aligned}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} (2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0 &\Leftrightarrow (2x-2)^3 - (x-2)^3 - x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-2)^3 + (2-x)^3 + (-x)^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(2x-2)(2-x)(-x) = 0, \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι $(2x-2)+(2-x)+(-x)=0,$ όπως προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα των κύβων. Η τελευταία παραγοντοποίηση μπορεί επίσης να προκύψει εύκολα , μετά από πράξεις.

Άρα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

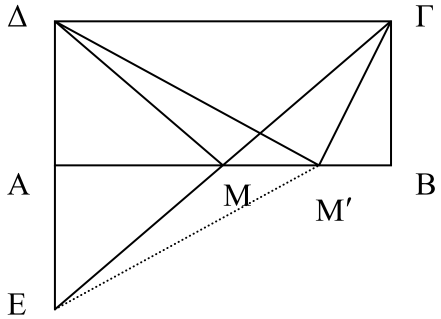
$$(2x-2)(2-x)(-x) = 0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \text{ ή } 2-x=0 \text{ ή } -x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα :

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Λύση



Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές (ΜΒ = ΒΓ = α), οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 45^\circ$.
Επειδή είναι

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 90^\circ + 180^\circ - \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 225^\circ > 180^\circ,$$

η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΔΑ προς το Α, έστω στο σημείο Ε.
Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΜΑΕ είναι ίσα , γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ (ως κατά κορυφή). Άρα θα έχουν και

$$\mathrm{AE} = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}\Delta = \alpha.$$

Τότε όμως και τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στο Α και έχουν την πλευρά ΑΜ κοινή και ΑΕ = ΑΔ. Άρα θα έχουν και ΔΜ = ΕΜ, οπότε

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{EM} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma. \qquad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο M' της ευθείας ΑΒ διαφορετικό από το σημείο Μ. Τότε προφανώς τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AM}'\Delta$ και $\mathrm{AM}'\mathrm{E}$ είναι ίσα , οπότε θα έχουν $\mathrm{AM}' = \mathrm{EM}'$ και

$$\Delta\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Gamma = \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma. \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή $\mathrm{EM}'\Gamma$ είναι τεθλασμένη, ενώ η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία που έχει τα ίδια άκρα με την τεθλασμένη $\mathrm{EM}'\Gamma$, από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma < \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma = \Gamma\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Delta.$$

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \le 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή τα κλάσματα του πρώτου μέλους της ζητούμενης ανισότητας παρουσιάζουν στον αριθμητή το άθροισμα δύο θετικών αριθμών και στον παρανομαστή το γινόμενό τους, θεωρούμε τη γνωστή ανισότητα

$$(a+b)^2 \ge 4ab, \text{, για κάθε } a, b \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα $(a-b)^2 \ge 0$. Η ισότητα αληθεύει όταν $a = b.$ Για a, b θετικούς, από την (1) λαμβάνουμε

$$\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}, \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα αληθεύει όταν $a = b.$

Από την (2) για $a = x, b = y+1$ λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \le \frac{x+y+1}{4} \qquad (3)$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \le \frac{y+z+3}{4}, \qquad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \le \frac{x+z+2}{4} \quad . \qquad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2(x+y+z)+6}{4}$$
$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2\cdot 3+6}{4}=3.$$
Η ισότητα αληθεύει όταν $x=y+1=z+2$, οπότε από την σχέση $x+y+z=3$ προκύπτει ότι $x+x-1+x-2=3\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$ και $y=1, z=0.$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση
$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση
$$3x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$
Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την
$$\left(x^2+2\right)^2=9(3x-2)\Leftrightarrow x^4+4x^2-27x+22=0. \qquad (1)$$
Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση
$$(x-1)\left(x^3+x^2+5x-22\right)=0.$$
Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για $x=2$, για το πολυώνυμο $x^3+x^2+5x-22$ καταλήγουμε στην εξίσωση
$$(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2+3x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$
αφού το τριώνυμο $x^2+3x+11=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-35<0$.

2^{ος} τρόπος
Ομοίως πρέπει $x\ge\frac{2}{3}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό
$$y=\sqrt{3x-2}, \text{ για } x\ge\frac{2}{3}.$$
Τότε λαμβάνουμε
$$y\ge 0 \text{ και } y^2=3x-2 ,$$
ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται
$$x^2+2=3y.$$
Έτσι έχουμε το σύστημα
$$\left.\begin{cases}x^2=3y-2\\ y^2=3x-2\end{cases}\right\} \text{ με } x\ge\frac{2}{3} \text{ και } y\ge 0.$$

Με αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2-y^2=3(y-x)\Leftrightarrow(x-y)(x+y+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ ή } x+y+3=0\Leftrightarrow x=y \text{ ή } x+y=-3.$$

Η εξίσωση $x+y=-3$ είναι αδύνατη λόγω των περιορισμών $x\geq\frac{2}{3}$ και $y\geq 0$.

Για $x=y$ έχουμε την εξίσωση

$$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμός. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν n ομάδες.

Η $1^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-1 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-1 αγώνες.

Η $2^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-2 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-2 αγώνες.

Η $3^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-3 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-3 αγώνες.

....

Η $(n\text{-}1)^η$ ομάδα παίζει με την τελευταία 1 ομάδα , οπότε διεξάγεται 1 αγώνας .

Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\Sigma=1+2+3+\cdots+(n-1). \qquad (1)$$

Αν γράψουμε τις ισότητες

$$\Sigma=\ 1\ +\ 2\ +...+(n-2)+(n-1)$$

$$\Sigma=(n-1)+(n-2)+...\ \ 2\ +\ 1$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη, τότε λαμβάνουμε

$$2\Sigma=(n-1)\left[(n-1)+1\right]=(n-1)n\Rightarrow\Sigma=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Σε κάθε αγώνα ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δίνονται στις δύο ομάδες που συμμετέχουν (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα) είναι 4. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\frac{364}{4}=91\quad . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(n\text{-}1)n}{2}=91\Leftrightarrow\frac{(n\text{-}1)n}{2}=7\cdot 13\Leftrightarrow\frac{(n\text{-}1)n}{2}=\frac{13\cdot 14}{2}\Leftrightarrow n=14.$$

Άρα συμμετείχαν 14 ομάδες.

Πρόβλημα 3.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0,$$

να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+6z+9=1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$$

και θέτοντας $a=x+1$, $\beta=y+2$ και $\gamma=z+3$, έχουμε τελικά

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

που είναι ισοδύναμη με τη γνωστή ανισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Επομένως έχουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3\cdot 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+y+z+6|\leq\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x+y+z+6\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-\sqrt{3}\leq x+y+z+6-\sqrt{3}\leq 0.$$

Επειδή η ισότητα ισχύει για $x+1=y+2=z+3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, έπεται ότι ο ζητούμενος μέγιστος θετικός αριθμός είναι ο $m=6-\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

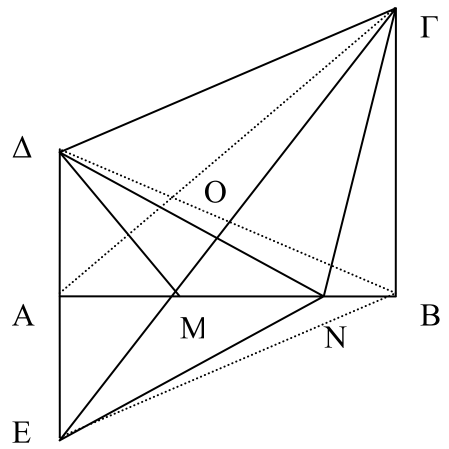
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $A\Delta=\alpha$ και $AB=B\Gamma=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta M+M\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

Λύση



(i) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε
$\Delta A+A\Gamma=\alpha+2\alpha\sqrt{2}=\alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\Delta B+B\Gamma=\alpha\sqrt{5}+2\alpha=\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)$, οπότε

$$\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma \Leftrightarrow \alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)<\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 8<6+2\sqrt{5}\Leftrightarrow 1<\sqrt{5}, \text{ που ισχύει.}$$

(ii) Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΑΒ και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ, τότε $\Delta\mathrm{M} = \mathrm{ME}$ και

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma} = \mathrm{EM} + \mathrm{M\Gamma} = \mathrm{E\Gamma}. \quad (1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχόν σημείο Ν πάνω στην ευθεία ΑΒ, διαφορετικό από το Μ, οπότε θα ισχύει ΔΝ = ΝΕ και

$$\Delta\mathrm{N} + \mathrm{N\Gamma} = \mathrm{EN} + \mathrm{N\Gamma}\ . \quad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία, ενώ η γραμμή ΕΝΓ έχει τα ίδια άκρα με την ΕΜΓ και είναι τεθλασμένη, έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma} = \mathrm{E\Gamma} < \mathrm{EN} + \mathrm{N\Gamma} = \Delta\mathrm{N} + \mathrm{N\Gamma}.$$

Άρα το σημείο Μ είναι τέτοιο ώστε το άθροισμα ΔΜ + ΜΓ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} = 2\alpha = \mathrm{B\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{AB},\ \mathrm{B\Gamma} \perp \mathrm{AB} \Rightarrow \Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{B\Gamma}$, το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιοι του ΔΕΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε το Ο είναι το μέσον της ΔΒ και η ΕΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ. Επίσης η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ, αφού ισχύει ΑΔ =ΑΕ $=\alpha$. Άρα το σημείο τομής Μ των δύο διαμέσων του τριγώνου ΔΕΒ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AB}}{3} = \frac{2\alpha}{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta\mathrm{M\Gamma}) = (\Delta\mathrm{E\Gamma}) - (\Delta\mathrm{EM}) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot 2\alpha - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.$$

Διαφορετικά έχουμε

$$\mathrm{MB} = 2\alpha - \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha}{3} \text{ και}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\mathrm{M\Gamma}) &= (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\Delta\mathrm{AM}) - (\mathrm{MB\Gamma}) \\ &= \frac{(\alpha + 2\alpha)\cdot 2\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{4\alpha}{3} \\ &= 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{4\alpha^2}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.\end{aligned}$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 Εάν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Αν θέσουμε

$$w = \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3},$$

τότε έχουμε

$$w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} = \frac{6\overline{z}^4 + 5\overline{z}^2 + 6}{3\overline{z}^4 + \overline{z}^2 + 3},$$

η οποία μετά από τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι $z\overline{z}=|z|^2$ καταλήγει στην ισότητα $$\left(|z|^4-1\right)\left(z^2-\overline{z}^2\right)=0 \Rightarrow |z|=1,$$
αφού λόγω της υπόθεσης $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$.

(2$^{\text{ος}}$ τρόπος)
Εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε,
$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=2+\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}$$
δηλαδή ισοδύναμα
$$\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3z^4+z^2+3}{3z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}.$$
Άρα έχουμε
$$z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2-\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(1-\frac{1}{|z|^4}\right)=0.$$
Όμως, λόγω της υπόθεσης $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$, οπότε τελικά λαμβάνουμε $|z|^4=1\Rightarrow|z|=1$.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε το σύστημα
$$\left\{\begin{array}{c} x^3+3xy+y^3=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}\qquad(\Sigma)$$

Λύση
Η εξίσωση $x^3+3xy+y^3=1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1),$$
η οποία από την ταυτότητα του Euler είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις
$$x+y-1=0 \text{ ή } x=y=-1.$$
Άρα έχουμε
$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_1)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x=y=-1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_2).$$
Το σύστημα (Σ_2) έχει τη λύση $(x,y)=(-1,-1)$, ενώ
$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x-y=0\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^2+xy+y^2-x-y=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή}\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ (x+y)^2-xy-(x+y)=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ xy=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }(x,y)=(1,0)\text{ ή }(x,y)=(0,1).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Λύση

Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1$, για $\nu = 1, 2, \dots, (\nu-1)$ έχουμε:

$$\text{Για } \nu = 1 \text{ έχουμε } \alpha_2 - \alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$\text{Για } \nu = 2 \text{ έχουμε } \alpha_3 - \alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{Για } \nu - 1 \text{ έχουμε: } \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = 2(\nu-1) + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες λαμβάνουμε:

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = 2\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (\nu-1)\big) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = 2\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \nu - 1 \Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = \nu(\nu-1) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - 1 + \alpha_1. \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - \ell, \text{ όπου } \ell = 1 - a_1 . \qquad (2)$$

Για το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας έχουμε:

$$\alpha_m \cdot \alpha_{m+1} = \left(m^2 - \ell\right)\left((m+1)^2 - \ell\right) = \left(m^2 - \ell\right)\left((m^2 + 2m + 1 - \ell\right) =$$
$$= m^4 + 2m^3 + m^2 - \ell m^2 - \ell m^2 - 2\ell m - \ell + \ell^2 =$$
$$= \underbrace{m^4 + m^2 + \ell^2 + 2m^3 - 2\ell m^2 - 2\ell m} - \ell = \left(m^2 + m - \ell\right)^2 - \ell = \alpha_{m^2 + m - \ell} .$$

Πρόβλημα 4

Έστω $\boldsymbol{\Sigma}$ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου $\boldsymbol{AB\Gamma}$. Οι ευθείες $\boldsymbol{A\Sigma}$, $\boldsymbol{B\Sigma}$ και $\boldsymbol{\Gamma\Sigma}$ τέμνουν τις πλευρές $\boldsymbol{B\Gamma}$, $\boldsymbol{A\Gamma}$ και $\boldsymbol{AB}$ στα σημεία $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$ και $\boldsymbol{\Gamma'}$ αντίστοιχα, ώστε $\boldsymbol{\Sigma A' \le A\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma B' \le B\Sigma}$ και $\boldsymbol{\Sigma\Gamma' \le \Gamma\Sigma}$.

Αν θέσουμε $\boldsymbol{x = (\Sigma AB)}$, $\boldsymbol{y = (\Sigma B\Gamma)}$ και $\boldsymbol{z = (\Sigma A\Gamma)}$, να αποδείξετε ότι:

$$\boldsymbol{x^4 + y^4 + z^4 \le 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2} .$$

Λύση

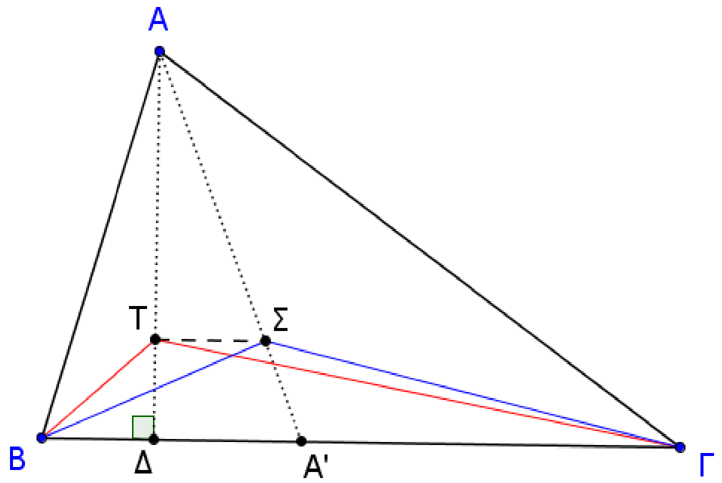
Από το δεδομένο σημείο $\boldsymbol{\Sigma}$ θεωρούμε παράλληλη προς τη $\boldsymbol{B\Gamma}$ που τέμνει το ύψος $\boldsymbol{A\Delta}$ στο σημείο $\boldsymbol{T}$. Τότε προφανώς $\boldsymbol{(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)}$.

Από τη σχέση $\boldsymbol{\Sigma A' \le A\Sigma}$ προκύπτει προφανώς

$$\mathrm{T\Delta} \le \mathrm{TA}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\boldsymbol{T\Delta \cdot \Delta B \le TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow \frac{1}{2}T\Delta \cdot \Delta B \le \frac{1}{2}TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow}$$
$$\Longleftrightarrow (T\Delta B) \le (TAB). \qquad (2)$$



Από τη σχέση (1) έχουμε επίσης:

$$T\Delta\cdot \Delta\Gamma \le TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}T\Delta\cdot \Delta\Gamma \le \frac{1}{2}TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{T}\Delta\Gamma) \le (\mathrm{TA}\Gamma) \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(T\Delta B)+(T\Delta\Gamma)\le(TAB)+(TA\Gamma)\Leftrightarrow(TB\Gamma)\le(TAB)+(TA\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow(TB\Gamma)\le(AB\Gamma)-(TB\Gamma)$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση $(\Sigma B\Gamma)=(TB\Gamma)$, παίρνουμε τελικά :

$$(\Sigma B\Gamma)\le(AB\Gamma)-(\Sigma B\Gamma)\Leftrightarrow(\Sigma B\Gamma)\le(\Sigma AB)+(\Sigma A\Gamma).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι;

$(\Sigma AB)\le(\Sigma B\Gamma)+(\Sigma A\Gamma)$ και $(\Sigma A\Gamma)\le(\Sigma AB)+(\Sigma B\Gamma)$.

Επειδή έχουμε θέσει $x=(\Sigma AB)$, $y=(\Sigma B\Gamma)$ και $z=(\Sigma A\Gamma)$, από τις τρεις τελευταίες ανισώσεις, έχουμε:

$$0<x\le y+z,\ 0<y\le x+z \text{ και } 0<z\le x+y. \qquad (4)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$x^4+y^4+z^4\le 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2+2x^2z^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+z^2-y^2\right)^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+z^2+2xz-y^2\right)\cdot\left(x^2+z^2-2xz-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((x+z)^2-y^2\right)\cdot\left((x-z)^2-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(x-y-z)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(y+z-x)\ge 0,$$

που ισχύει, λόγω των σχέσεων (4).

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2\\&=4x+5y-36x+35y+\left(2-2\right)^2\\&=-32x+40y+0^2=-8\left(4x-5y\right)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2,\ \mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8,\ x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:
$$\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}\text{ ή }\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\text{ ή }\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow 3x-2=x+12\text{ ή }3x-2=2x+8\text{ ή }2x+8=x+12$$
$$\Leftrightarrow 2x=14\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4\Leftrightarrow x=7\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4.$$
Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B\Gamma}$ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

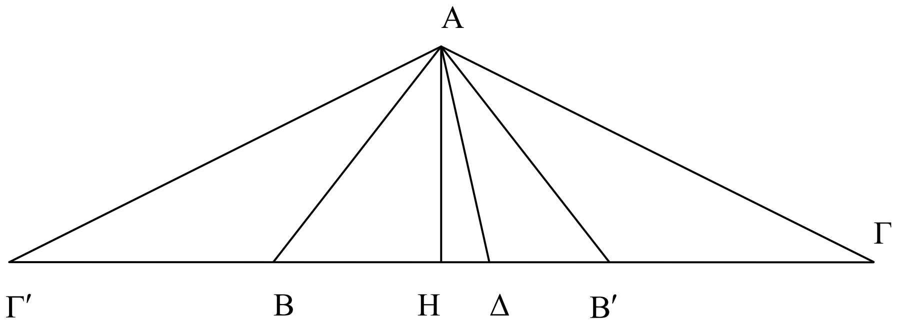
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{\mathrm{B}} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = 100^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}'\Gamma'$ είναι ίσα ($\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}}' = \mathrm{B} = 50^0 \;,\; \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^0,$$

$$\mathrm{B\hat{A}B}' = 180^0 - 2\cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } \Gamma'\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 2\cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - \mathrm{A\hat{\Delta}H} \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\mathrm{A\hat{\Delta}H} = \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3\\
&=\frac{1}{16^2\left(a+2b\right)^2}-\frac{1}{32^3\left(a+2b\right)^3}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\
&=\frac{1}{\left(2^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(2^5\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\
&=\frac{1}{2^{8-2}}-\frac{1}{2^{15-3}}+\frac{1}{2^{4\cdot 3}}=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2+4y^2+2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy+4xy\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=\frac{32}{3}xy,$$

$$x^2+4y^2-2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy-4xy\Rightarrow\left(x-2y\right)^2=\frac{8}{3}xy>0,$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}^2=\frac{\left(x+2y\right)^2}{\left(x-2y\right)^2}=\frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy}=4\Leftrightarrow\mathrm{A}=2 \text{ ή } \mathrm{A}=-2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση $u=\frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4-\frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{20}{3}u+4=0 \Leftrightarrow \left(u-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=0$$

$$u-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \text{ ή } u-\frac{10}{3}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow u=6 \text{ ή } u=\frac{2}{3}.$$

Για $u=\frac{x}{y}=6$ λαμβάνουμε $x=6y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{6y+2y}{6y-2y}=2.$

Για $u=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x=2y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{x+3x}{x-3x}=-2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$,που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab+4(a+b)=10a+b,$$

όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab+4a+4b=10a+b \Leftrightarrow ab-6a+3b=0$$

$$\Leftrightarrow a(b-6)+3(b-6)=-18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6)=-18$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b)=18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4\leq a+3\leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3,6-b)=(6,3) \text{ ή } (9,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(3,3) \text{ ή } (6,4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $\Gamma\mathrm{E}\perp \mathrm{A}\Delta$ ή $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.

Όμως είναι

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}, \tag{1}$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.

Επίσης έχουμε

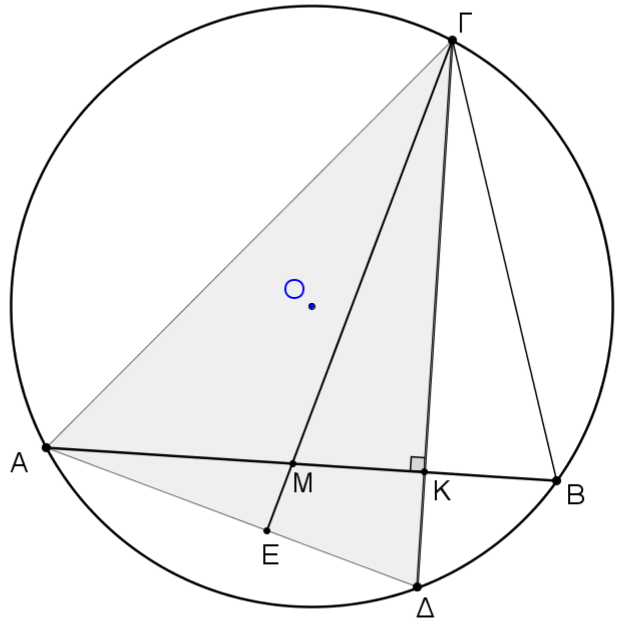
$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K},$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}, \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}, \tag{2}$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}+\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}=180^0-\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}=180^0-90^\circ=90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK}\perp\Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0$, $xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n\left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n}\cdot x^{2n}}{y^{2m}}\cdot\frac{\left(xy+1\right)^{n-m}\cdot y^{m-n}}{\left(xy-1\right)^{m-n}\cdot x^{n-m}}\cdot\frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$=\frac{\left(xy+1\right)^{m-n}\left(xy-1\right)^{m-n}\cdot\left(xy+1\right)^{n-m}}{\left(xy-1\right)^{m-n}}\cdot x^{2n-2n}\cdot y^{2m-2m}=1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$
$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow (\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0) \text{ ή } (\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta+2)=35$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+2)(\alpha^2\beta^2-1)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$
$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΕΓ}=\text{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}=\text{Ε}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

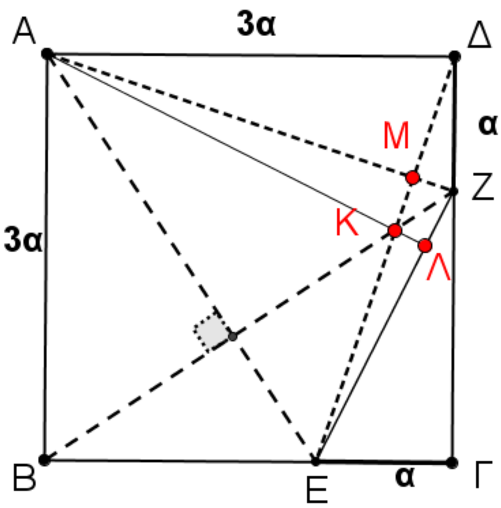
$$\text{Μ}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Μ}=\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$$
$$=180^0-\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΖ}$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $\text{ΖΒ}\perp\text{ΑΕ}$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$\text{ΑΚ}\perp\text{ΕΖ} \text{ ή } \text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}.$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{ABE}) - (\mathrm{E\Gamma Z}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = 9\alpha^2 - 3\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{2} = \frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda} = \dfrac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, όπου a,b,c ψηφία, $a > 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100 \le \overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 < 1000$ προκύπτει ότι:

$$10 \le a + b^2 + c^3 \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a \in \{1,2,...,9\}$ και $b,c \in \{0,1,2,...,9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c \in \{0,1,2,3\} \text{ και } b \in \{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = \left(a + b^2 + c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c = 0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$100a + 10b = \left(a + b^2\right)^2, \qquad (4)$$

από την οποία για $b \in \{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a,b που την επαληθεύουν. Πράγματι, τα ψηφία a,b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a + b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

$$(a,b) = (9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$(a,b)=(8,0) \text{ ή } (7,1) \text{ ή } (9,1) \text{ ή } (4,2) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3)$$
$$\text{ή } (9,3) \text{ ή } (2,4) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (3,5) \text{ ή } (5,5),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\left\{\begin{array}{c} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ x^2+4(ax-2a)^2=4a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{array}\right\}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6 &\Leftrightarrow x\left(xy+xz\right)+y\left(yz+yx\right)+z\left(zx+zy\right)=6 \\ &\Leftrightarrow x\left(S_2-yz\right)+y\left(S_2-zx\right)+z\left(S_2-xy\right)=6 \\ &\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6. \end{aligned}$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{matrix}\right\},$$

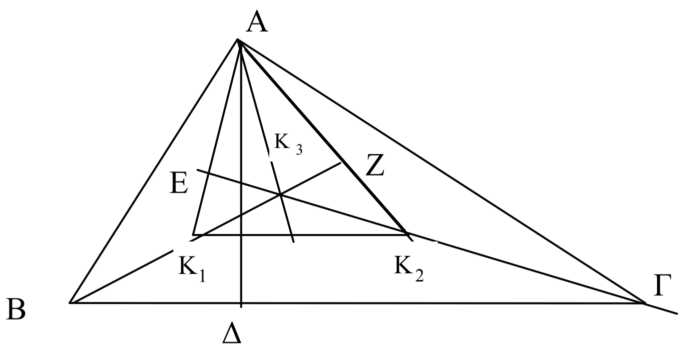
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$\left(x,y,z\right)=\left(2,1,0\right) \text{ ή } \left(1,2,0\right) \text{ ή } \left(2,0,1\right) \text{ ή } \left(1,0,2\right) \text{ ή } \left(0,2,1\right) \text{ ή } \left(0,1,2\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K_1\hat{K}_3E = K_3\hat{K}_1E = K_3\hat{K}_2Z = Z\hat{K}_3K_2} = 45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AEK_3}$, $\mathrm{K_3EK_1}$ και $\mathrm{K_3ZK_2}$ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο $\mathrm{K_3}$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AK_1K_2}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK_3E}$ και $\mathrm{K_2EK_1}$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\mathrm{EK_3 = EK_1}$ και $\mathrm{K_1\hat{K}_2E = E\hat{A}K_3}$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $\mathrm{AK_3 = K_1K_2}$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Επειδή είναι $1 < k < 30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n=1$ ή $n=2$ ή $n=3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x-3^n\right)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Για $n=1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x) = 3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για $x=1$ προκύπτει $P(3)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_1(x-3)$.

Για $n=2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x) = 3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$ και $P(9)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_2(x-3)(x-9)$.

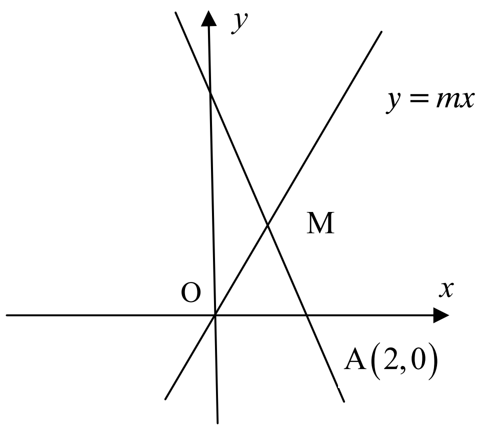
Για $n=3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x) = 3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$, $P(9)=0$ και $P(27)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = mx,\ m \in \mathbb{R}$ και τον άξονα των x ισούται με 3.

Λύση



Από το σύστημα $y = mx, y = -3x + 6$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $\left(\frac{6}{m+3}, \frac{6m}{m+3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAM}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left|\frac{6m}{3+m}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{6m}{3+m} = 3 \text{ ή } \frac{6m}{3+m} = -3 \Leftrightarrow m = 3 \text{ ή } m = -1.$$

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνουΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$, με $\lambda > 1$.. Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

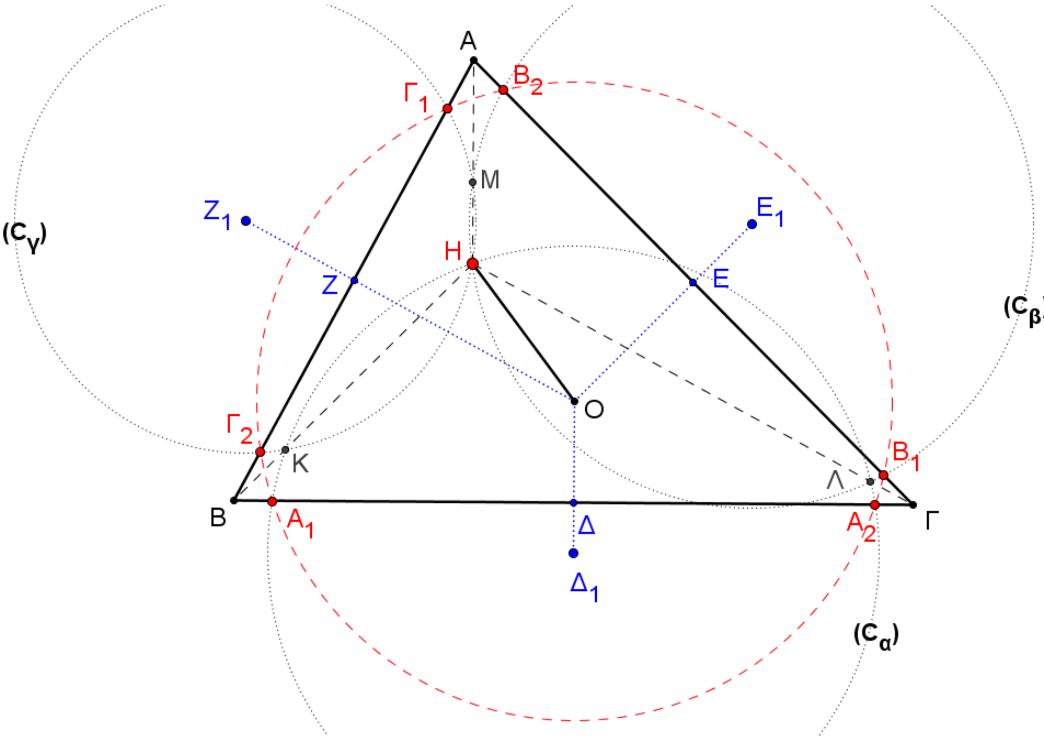
Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και $\Delta_1\mathrm{E}_1\mathrm{Z}_1$ έχουν επίσης τις πλευρές τους παράλληλες, γιατί

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}.$$

Η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΚΗ των κύκλων C_α και C_γ. Επειδή η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι παράλληλη με την ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{KH} \perp \mathrm{A}\Gamma$.

Επειδή όμως ισχύει και ότι $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A}\Gamma$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία Β, Κ, Η είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο, αν ΜΗ, ΛΗ είναι η κοινή χορδή των κύκλων C_β, C_γ και C_α, C_β, αντίστοιχα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{H}$ και τα σημεία $\Gamma, \Lambda, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Από τη δύναμη του σημείου B ως προς τους κύκλους C_α και C_γ, έχουμε:

$$\mathrm{BK} \cdot \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{BA}_1 \cdot \mathrm{BA}_2 = \mathrm{B}\Gamma_1 \cdot \mathrm{B}\Gamma_2,$$

οπότε τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά στο κύκλο με κέντρο το O, που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$.

Όμοια εργαζόμαστε και με τα άλλα ζευγάρια σημείων, οπότε τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, n βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$, το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$(x-3^n)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), n \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει ότι $P(3)=0$, οπότε στη συνέχεια για $x=3$ προκύπτει $P(3^2)=0$. Συνεχίζοντας έτσι λαμβάνουμε τις σχέσεις $P(3^k)=0$, για $k=3,\ldots n-1$.

Επίσης από την (1) για $x=3^n$ λαμβάνουμε:

$$0=3^n\left(3^n-1\right)P\left(3^n\right)=0\Leftrightarrow P\left(3^n\right)=0.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο n βαθμού έχει τις n ρίζες 3^k, $k=1,2,...,n$, οπότε

$$P(x)=a_n\left(x-3\right)\left(x-3^2\right)\cdots\left(x-3^n\right),\ a_n\in\mathbb{R}.$$

. **Πρόβλημα 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right)-f(y)\right)=f(x)-f\left(f(y)\right), \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, είναι περιττή.

Λύση

Θέτουμε στη δεδομένη σχέση όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(x)\right)-f\left(f(x)\right)\right)&=f(x)-f\left(f\left(f(x)\right)\right)\\ \Leftrightarrow f(0)&=f(x)-f\left(f\left(f(x)\right)\right)\\ \Leftrightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)&=f(x)-f(0)\\ \Leftrightarrow \left(f\circ f\circ f\right)(x)&=f(x)-f(0) \qquad (2). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε τις ισότητες

$$\left.\begin{aligned} \left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)&=f\left(f(x)-f(0)\right)\\ \left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)&=f\left(f(x)\right)-f(0) \end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$f\left(f(x)-f(0)\right)=f\left(f(x)\right)-f(0). \qquad (3)$$

Από την (3) για $x=0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f(0)-f(0)\right)&=f\left(f(0)\right)-f(0)\\ \Leftrightarrow f(0)&=f\left(f(0)\right)-f(0)\\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right)&=2f(0) \qquad (4). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (4), έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(0)\right)-f(0)\right)&=f(0)-f\left(f(0)\right)\\ \Leftrightarrow f\left(2f(0)-f(0)\right)&=f(0)-2f(0)\\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right)&=-f(0) \qquad (5). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $f(0)=0$.

Αν τώρα στη σχέση (1) θέσουμε $x=0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(0)\right)-f(y)\right)&=f(0)-f\left(f(y)\right)\\ \Leftrightarrow f\left(-f(y)\right)&=-f\left(f(y)\right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $y\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(y)=x$.

Άρα έχουμε $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009)$$
$$= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018.$$

(β) Έχουμε

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22} .$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$\mathrm{B} - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0 ,$$

έπεται ότι είναι $\mathrm{B} > \Gamma$.

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση

Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:

$$x - y = 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297$$
$$\Leftrightarrow 99(\alpha - \gamma) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$\alpha = 3, \gamma = 0$ ή $\alpha = 4, \gamma = 1$ ή $\alpha = 5, \gamma = 2$ ή $\alpha = 6, \gamma = 3$ ή $\alpha = 7, \gamma = 4$ ή $\alpha = 8, \gamma = 5$ ή $\alpha = 9, \gamma = 6$.

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha + \beta + \gamma = 10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x = \overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\text{AB} = x$ μέτρα και μήκος $\text{Β}\Gamma = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1 = x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100} = \frac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1 = y - \frac{\alpha y}{100} = \frac{(100-\alpha)y}{100} = \frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100},$$

ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy = x_1 y_1 \Leftrightarrow x \cdot 2x = \frac{5x}{4}\cdot\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{100-\alpha}{80}\cdot 2x^2$$

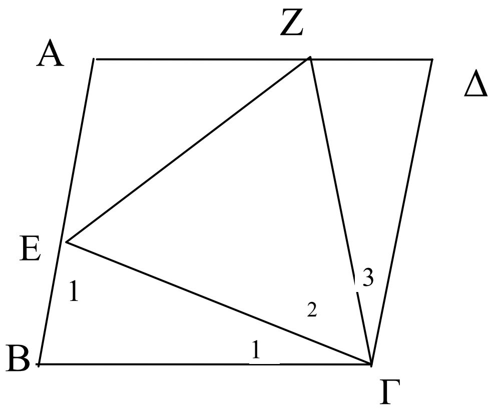
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{100-\alpha}{80}\right)\cdot 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{100-\alpha}{80} = 0 \ \ (\text{αφού } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 80 - 100 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{\text{B}} = \hat{\text{E}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\text{AB} \parallel \Gamma\Delta$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{\text{E}}_1 = \text{E}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 60^\circ + \hat{\Gamma}_3, \qquad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ=α, ΓΕ = ΓΔ = α, προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^0 - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^0 - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \qquad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,
Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{E}}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 \quad \text{(λόγω της (1))}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2\cdot\left(60^\circ + \hat{\Gamma}_1\right) = 180^0 \quad \text{(λόγω της (2))}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\hat{\Gamma}_1 + 120^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^0.$$

Άρα είναι:

$$\hat{\mathrm{B}} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0,\ \hat{\Delta} = \hat{\mathrm{B}} = 80^0 \ \text{ και } \ \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A} = \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A} = \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu = \left[(-1)^\nu + 1 + \left((-1)^3\right)^\nu + 1\right]\cdot\nu$$

$$= \left[2 + 2\cdot(-1)^\nu\right]\cdot\nu = \begin{cases} 4\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $\mathrm{A} \neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $\mathrm{A} = 4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu \in \{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu = 2 \text{ ή } \nu = 6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

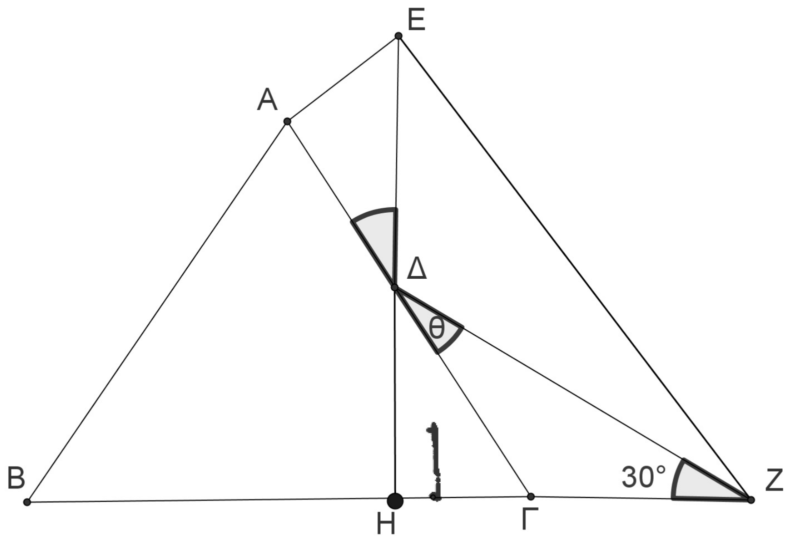
$$10a + b = ab - (a + b) \Leftrightarrow 11a = ab - 2b \Leftrightarrow (11 - b)a = -2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2 .$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής
$$S_k = (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2, \text{ για } k = 0,1,2,3,...,249 .$$
Όμως έχουμε
$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k = 0,1,2,3,...,249. \end{aligned}$$
Άρα έχουμε
$$S = S_0 + S_1 + ... + S_{249} = 4 + 4 + ...4 = 250 \cdot 4 = 1000$$

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\text{ΑΓ} = \beta$ του τριγώνου ΑΒΓ, $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ε} = 90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = \text{Γ}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ} = \theta$ και $\text{Γ}\hat{\text{Ζ}}\text{Δ} = 30^0$.
(i) Να βρείτε τη γωνία θ.
(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση
(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι
$$\text{Η}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} = \theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } \text{Η}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ} = \text{Η}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} + \text{Γ}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ} = 2\theta ,$$
οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:
$$90^\circ + 2\theta + 30^0 = 180^0 \Leftrightarrow \theta = 30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H}\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H}\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή είναι $\mathrm{H}\Gamma = \dfrac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H}\Delta = \dfrac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και

$$\mathrm{HZ} = \mathrm{H}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^0$ και $\mathrm{A}\Delta = \dfrac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{HE} = \mathrm{H}\Delta + \Delta\mathrm{E} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΗΕΖ με $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{EZ} = \sqrt{\mathrm{HE}^2 + \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0,$ ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\dfrac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$**,** θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $x \geq 0$.

Τότε ισχύει $|x|=x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1-2x=\alpha x, x \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x=1, x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1}, \text{ αν } \alpha>-1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x<0$.

Τότε ισχύει $|x|=-x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1+2x=\alpha x, x<0 \Leftrightarrow (\alpha-3)x=1, x<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha-3}, \text{ αν } \alpha<3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1<\alpha<3$.
Πράγματι, για $-1<\alpha<3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1=\dfrac{1}{\alpha-3}<0$ και $x_2=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3

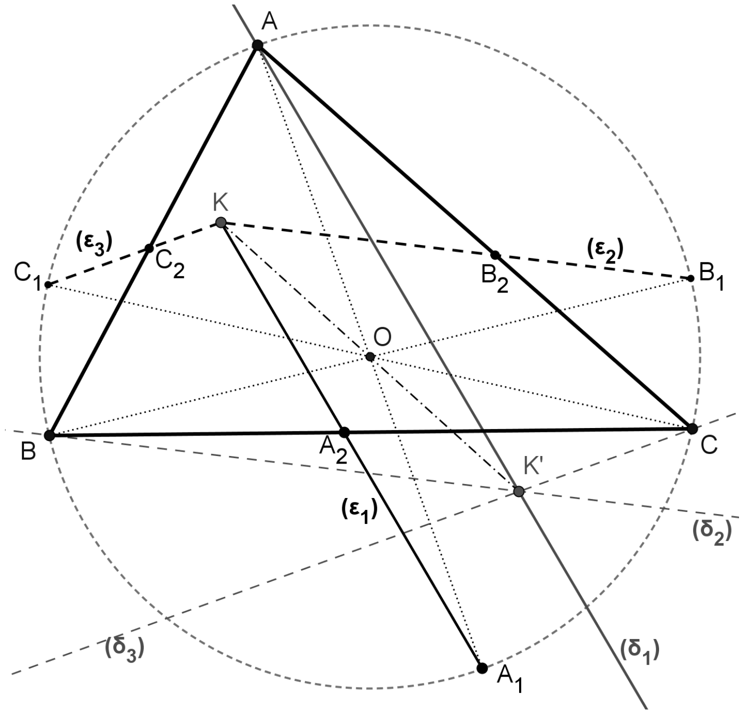
Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1,B_1,C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A,B,C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC,AC,AB θεωρούμε τα σημεία A_2,B_2,C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1,A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1,B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1,C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

Λύση

Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.
Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία , ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση
Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.
Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:
"*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*"

Πρόβλημα 4
Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$
$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.
(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση
Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x - y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2, \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z.$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0\\ xy(x-y) = 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x = y = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z.$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (2,6,-2)$.
Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 65z^3 \\ x^2y + xy^2 &= 20z^3 \\ x - y + 2z &= 10. \end{aligned}$$

Λύση
Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3 = 125z^3 \Leftrightarrow x + y = 5z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy = 20z^3, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy = 4z^2. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z - x) = 4z^2 \Leftrightarrow x^2 - 5zx + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4z \text{ ή } x = z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 4z, y = z \text{ ή } x = z, y = 4z.$$

Για $x = 4z, y = z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z) = (8,2,2)$, ενώ για $x = z,\ y = 4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z = 10 \Leftrightarrow z = -10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z) = (-10,-40,-10)$.

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=0\\ xy(x+y)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x+y=0 \text{ ή } x=y=0 \Leftrightarrow x=-y,$$

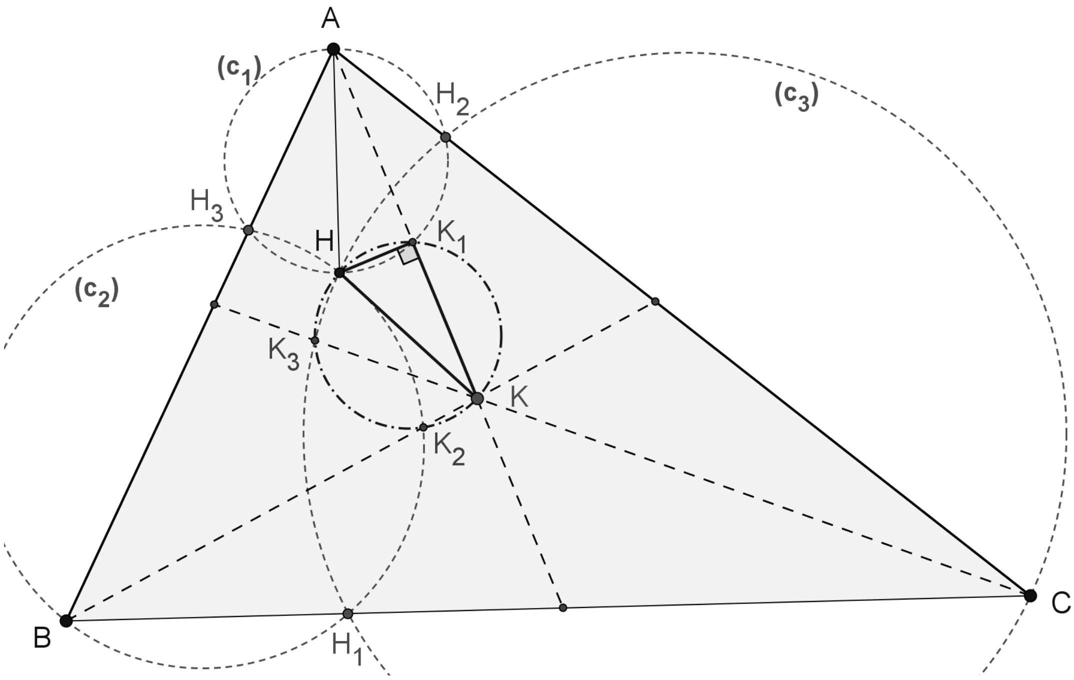
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x,y,z) = (5,-5,0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.

Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$
έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:
$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha+1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$
η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha-1)(\alpha+3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:
$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha-3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$
η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha-3)^2 - 4 = (\alpha-5)(\alpha-1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:
- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:
$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$
οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2-b^2=(a-2b)^2 \Leftrightarrow 4ab-5b^2=0 \Leftrightarrow b(4a-5b)=0 \Leftrightarrow 4a=5b,$$
αφού είναι $b\neq 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση
$$4\sqrt{2x^2+3x+2}=5\sqrt{x^2+x+1}\,,$$
της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$16\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=25\cdot\left(x^2+x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+23x+7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-23\pm 3\sqrt{37}}{14}.$$
Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=\dfrac{-23+3\sqrt{37}}{14}$ δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η μοναδική ρίζα της είναι η $x=\dfrac{-23-3\sqrt{37}}{14}$. Αυτό θα μπορούσε να προκύψει και από τη σχέση $a-2b<0$ η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε πρέπει να είναι $x<-1$.

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις
$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$
όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n, n\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

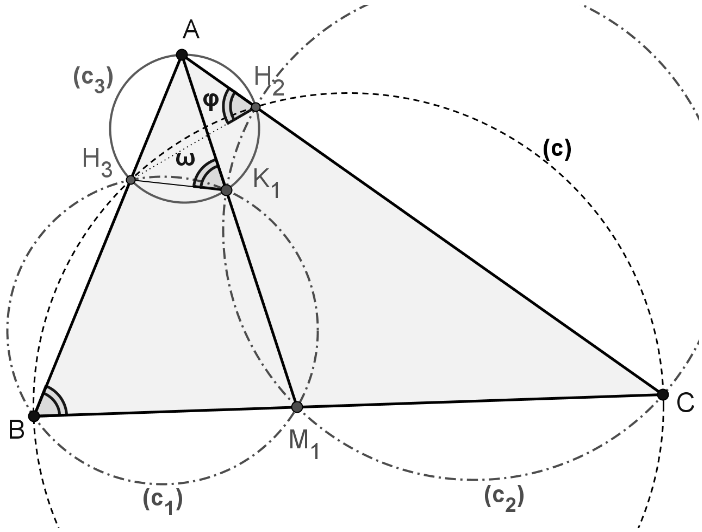
Από τη δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε
$$\begin{aligned}&a_1=1\\&a_2=a_1+k\\&a_3=a_2+2k\\&\dots\dots\dots\dots\\&a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)k\\&a_n=a_{n-1}+(n-1)k\end{aligned}$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε
$$a_n=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+\frac{k(n-1)n}{2}.$$
Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των k και n για τις οποίες ισχύει η ισότητα:
$$a_n=1+\frac{k(n-1)n}{2}=2011 \Leftrightarrow k(n-1)n=4020 \Leftrightarrow k(n-1)n=1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$$
$$\Leftrightarrow (n,k)=(2,2010) \text{ ή } (n,k)=(3,670) \text{ ή } (n,k)=(4,335) \text{ ή } (n,k)=(5,201) \text{ ή } (n,k)=(6,134)$$
Επομένως, για $k=2010$ είναι $a_2=2011$, για $k=670$ είναι $a_3=2011$, για $k=335$ είναι $a_4=2011$, για $k=201$ είναι $a_5=2011$ και για $k=134$ είναι $a_6=2011$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB, αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, δηλαδή περνάνε από το ίδιο σημείο, αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BM_1H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CM_1H_2, (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 και (c) ο περιγεγραμμένος κύκλος του εγγράψιμου τετραπλεύρου BH_3H_2C.



Σχήμα 5

Θεωρώντας τις τέμνουσες AB και AC του κύκλου (c), συμπεραίνουμε:

$$AB \cdot AH_3 = AC \cdot AH_2.$$

Το γινόμενο όμως $AB \cdot AH_3$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_1) ενώ το γινόμενο $AC \cdot AH_2$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_2).

Άρα το σημείο A, ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (c_1) και (c_2).

Έστω τώρα ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνονται στο σημείο K_1 (εκτός βέβαια από το σημείο M_1). Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά (δηλαδή τα K_1 και M_1) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (c_1) και (c_2).

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι τα σημεία A, K_1 και M_1 είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο K_1, δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BH_3H_2C έχουμε: $\hat{\varphi}=\hat{B}$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM_1K_1H_3$ έχουμε: $\hat{\omega}=\hat{B}$. Άρα είναι $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι δύο άλλες τριάδες κύκλων, περνάνε από το ίδιο σημείο.
Προφανώς τώρα οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, αν, και μόνο αν, συντρέχουν οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 (δεδομένου ότι τα σημεία A, K_1, M_1, τα σημεία B, K_2, M_2 και τα σημεία C, K_3, M_3, είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Λύση
Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών, προκύπτει ότι το σύστημα των δύο δεδομένων εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:

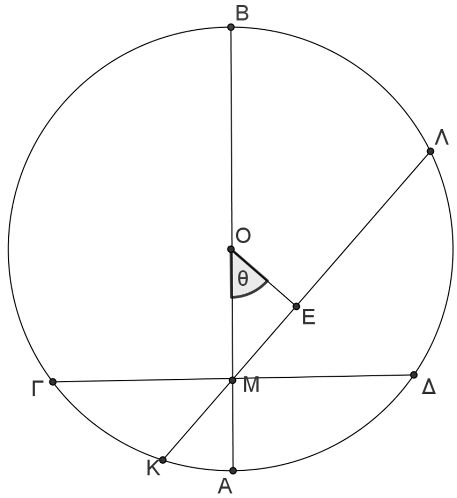
$$\left[a\left(x^2-y^2\right)-2bxy\right]+\left[b\left(x^2-y^2\right)+2axy\right]i=\left[x\left(a^2-b^2\right)-2aby\right]+\left[y\left(a^2-b^2\right)+2abx\right]i$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot\left[\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right]=\left[\left(a^2-b^2\right)+2abi\right]\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot(x+yi)^2=(a+bi)^2\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow x+yi=a+bi \text{ (αφού } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ και } (x,y)\neq(0,0))$$
$$\Leftrightarrow x=a,\ y=b.$$

Πρόβλημα 4
Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση
Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ που περνάει από το σημείο Μ και το κέντρο Ο του κύκλου, καθώς και την κάθετη προς αυτήν χορδή ΓΜΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ. Η χορδή ΑΒ έχει ακέραιο μήκος $30cm$. Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε ότι:

$$\mathrm{ΓΜ}\cdot\mathrm{ΜΔ}=\mathrm{ΑΜ}\cdot\mathrm{ΜΒ}\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=6\cdot(9+15)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=144\Leftrightarrow\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}=12\Leftrightarrow\mathrm{ΓΔ}=24.$$

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει δύο χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και έχουν ακέραιο μήκος. Θεωρούμε τυχούσα χορδή ΚΛ του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάει από το Μ και έστω $\mathrm{ME}=x,\ \mathrm{M\hat{O}E}=\theta,$ όπου Ε είναι το μέσο της ΚΛ, σχήμα 6. Αν υποθέσουμε ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε θεωρήσει όλες τις χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το Μ και τα άκρα τους Κ και Λ βρίσκονται στα ελάσσονα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΔ}}$, αντίστοιχα . Για κάθε μία από αυτές τις χορδές αντιστοιχεί και μία ακόμη που είναι η συμμετρική της ως προς τη διάμετρο ΑΒ.



Σχήμα 6

Για τη χορδή ΚΛ, αν συμβολίσουμε το μήκος της ως $\ell(\theta)$, έχουμε

$$\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Επειδή είναι $\ell'(\theta) = \dfrac{81\eta\mu 2\theta}{\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta}} > 0,\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\theta)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\ell(0), \ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = [24, 30]$. Άρα το μήκος της χορδής ΚΛ μπορεί να πάρει όλες τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $[24, 30]$. Αν λάβουμε υπόψιν και τη συμμετρική χορδή της ΚΛ ως προς τη διάμετρο ΑΒ, τότε τα πέντε μήκη 25, 26, 27, 28, 29 λαμβάνονται δύο φορές το καθένα, ενώ τα μήκη 24 και 30 λαμβάνονται από μία φορά. Έτσι έχουμε συνολικά 12 χορδές που περνάνε από το Μ με ακέραιο μήκος.

Παρατήρηση 1

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το *θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής* για τη συνεχή συνάρτηση $\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή την $\ell(0) = 24$ και μέγιστη τιμή την $\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 30$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα μήκη των χορδών είναι αντιστρόφως ανάλογα από τα αποστήματά τους και ότι το μέγιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = 0$, ενώ το ελάχιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση 2

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι χορδές με ακέραια μήκη 25, 26, 27, 28, 29, μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, αφού αν θέσουμε $\text{ΚΜ} = x$ και $\text{ΜΛ} = y$, τότε έχουμε

$$x + y = m,\ m \in \{25, 26, 27, 28, 29\} \text{ και } xy = 144 = 12^2.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αυτών των χορδών με ακέραιο μήκος, χωρίς τη χρήση του διαφορικού λογισμού.

ΘΕΜΑΤΑ 2011

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση
(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20\cdot\frac{30}{100}=6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60)\cdot\frac{60}{100}=80\cdot\frac{60}{100}=48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48-6=42$ αυτοκίνητα.

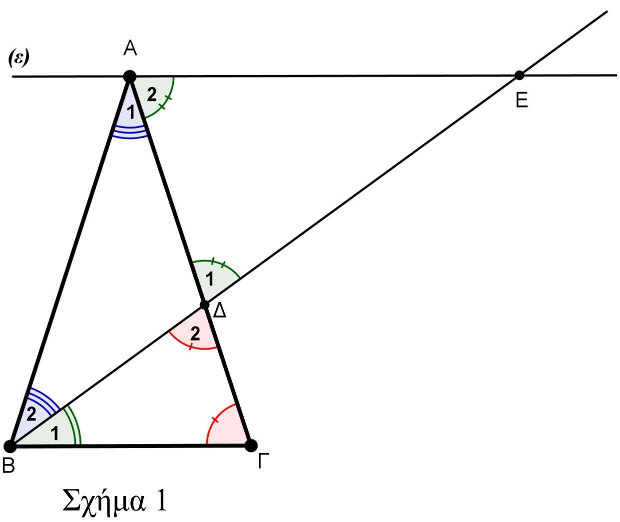
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000\cdot\frac{5}{100}=500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000\cdot\frac{10}{100}=1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6\cdot 500+42\cdot 1200=3000+50400=53400 \text{ ευρώ.}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{A}=36^o$, θα έχουμε: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=72^o$.

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{72^o}{2}=36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9\cdot(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1\Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8\Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$

$$\Leftrightarrow 7x+29=8\Leftrightarrow 7x=8-29\Leftrightarrow 7x=-21\Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$

$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$

$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \beta\ge 12 \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση

Είναι $\alpha\le 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\ge 0\Leftrightarrow 40\ge 2\beta\Leftrightarrow \beta\le 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\le\alpha\le 10 \text{ και } 12\le\beta\le 20\Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30 \text{ και } 24\le 2\beta\le 40$$

$$\Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30 \text{ και } -40\le -2\beta\le -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\le \mathrm{A}=3\alpha-2\beta\le 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

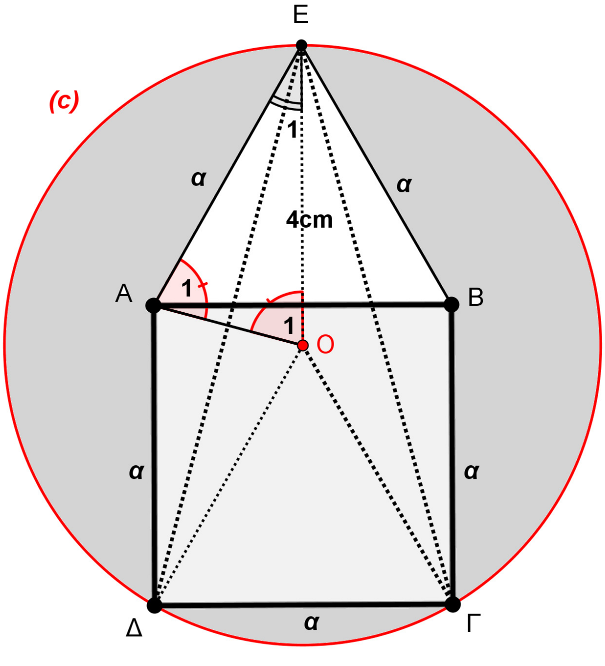
(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{E\hat{A}\Delta}=\mathrm{E\hat{B}\Gamma}=90^o+60^o=150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα και κατά συνέπεια $\mathrm{E\Delta}=\mathrm{E\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $\mathrm{E\Delta}=\mathrm{E\Gamma}$, το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΔΓ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ). Επίσης $\mathrm{EA}=\mathrm{EB}$, οπότε το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Άρα η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{E}B}$ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ. Άρα είναι $\hat{\mathrm{E}}_1=30^o$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}=\alpha\\ \mathrm{OE}=\mathrm{O\Delta}=4\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{OA}\text{ μεσοκάθετη της }\mathrm{E\Delta}\Rightarrow\mathrm{OA}\text{ διχοτόμος της }\mathrm{\Delta\hat{A}E}\Rightarrow\hat{\mathrm{A}}_1=75^o.$$

Στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1=75^o$ και $\hat{\mathrm{E}}_1=30^o$. Άρα $\hat{\mathrm{O}}_1=75^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA}=\mathrm{EO}=\alpha=4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $\mathrm{E}_c=\pi\cdot4^2=16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau}=4^2=16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι: $\mathrm{E}_{\tau\rho}=4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $\mathrm{E}=16\pi-16-4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2. \qquad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4, \qquad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta=0$, ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}=\alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho=\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho-\alpha=\left(\alpha+\beta\sqrt{10}\right)-\alpha=\beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\dfrac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta=0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5+\frac{2}{4}+\sqrt{10}=\frac{11}{2}+\sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2=x^2+4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow x^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow |x|=1-\alpha .$$

Επειδή είναι $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha<1$, οπότε είναι $1-\alpha>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
$$x=1-\alpha \text{ ή } x=\alpha-1.$$
- $\alpha=1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x=0$.
- $\alpha>1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι: ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

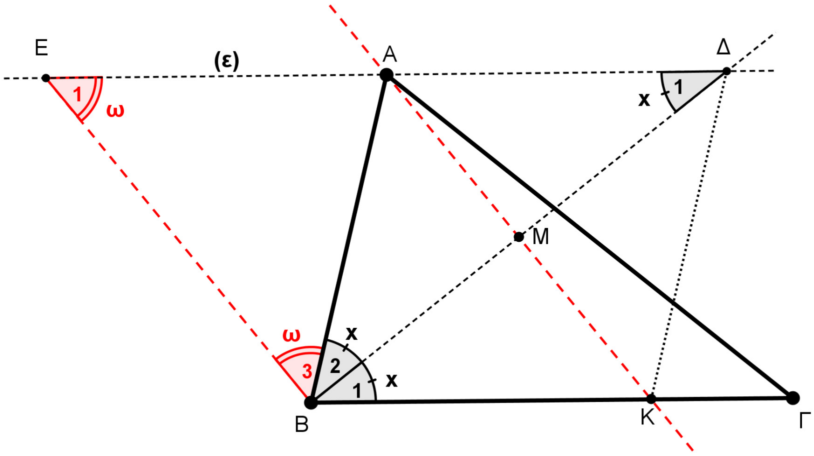
Λύση

Επειδή είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ θα ισχύει: $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1 = \hat{x} = \dfrac{\hat{Β}}{2}$.

Επίσης η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{Β}}{2}$.

Άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{Β}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$ΑΒ = ΑΔ. \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή $Ε$ είναι το συμμετρικό του $Δ$ ως προς το $Α$, θα ισχύει:

$$ΑΔ = ΑΕ. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε $ΑΕ = ΑΒ$ και κατά συνέπεια $\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $ΒΕΔ$ έχουμε:

$$\hat{Δ}_1 + \hat{Β}_2 + \hat{Β}_3 + \hat{Ε}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o,$$

δηλαδή το τρίγωνο $ΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο ($ΒΕ \perp ΒΔ$) και εφόσον $ΑΜ \parallel ΒΕ$ καταλήγουμε:

$$ΑΜ \perp ΒΔ.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΒΑΔ$ η $ΑΜ$ είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $ΒΔ$.

Επειδή τώρα το σημείο $Κ$ ανήκει στη μεσοκάθετη του $ΒΔ$, το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΔ$ (διότι $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2 = \dfrac{\hat{Β}}{2}$ και $ΒΔ$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $ΑΒ = ΑΔ = ΒΚ = ΚΔ$, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΚΔ$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 2010^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 2010^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2)$$
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha \geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z&=8\\ x^2+y^2+z^2&=26\\ xy+xz&=(yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=8\\ x^2+y^2+z^2=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=8\\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=8\\ xy+yz+zx=19\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ 19-yz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ (yz)^2+3(yz)-18=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \text{ ή } yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+16=0 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x=4 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0\,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R}) \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ y+z=4 \\ yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y(4-y)=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow (x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \quad (1)$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \quad (2)$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \quad (3)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \quad (5)$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \qquad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \qquad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}\le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Από το σημείο Α φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (Μ είναι το μέσο της ΒΓ). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Τ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K}<\mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN}_1, \mathrm{\Gamma K}_1$ και ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και ΒΓ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία Τ,Σ και Μ αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και ΒΓ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και ΒΓ του κύκλου (c). Τα αποστήματα ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $\mathrm{AN}_1=\mathrm{AK}_1=\mathrm{B\Gamma}$ (*) και τα σημεία Τ,Σ,Μ είναι τα μέσα των χορδών $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και ΒΓ, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{TA}=\mathrm{TN}_1=\mathrm{\Sigma A}=\mathrm{\Sigma K}_1 \qquad (1)$$

Το σημείο Ν βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και ΝΜ, ΝΤ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

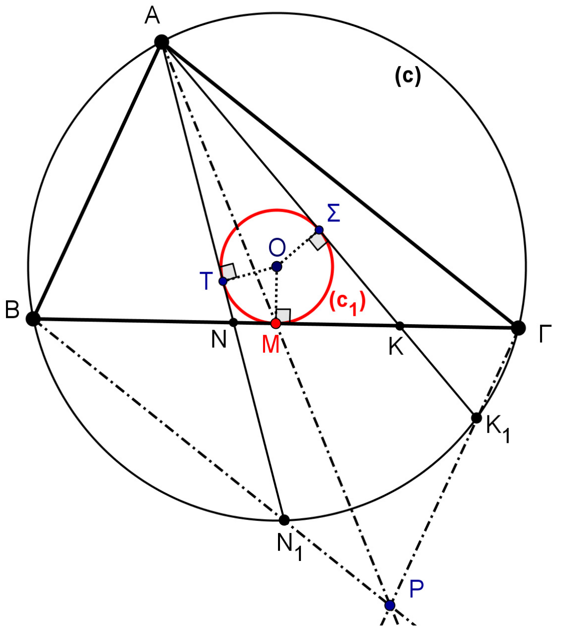
$$\mathrm{NM}=\mathrm{NT} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1): \quad MB = TN_1 \\ (2): \quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow TM\,P\,BN_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1): \quad M\Gamma = TA \\ (2): \quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow TM\,//\,A\Gamma \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1\,P\,A\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1\,P\,AB$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1, τότε το τετράπλευρο $AB P\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P.

(*) “Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.”
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2+4\beta^2\geq 4\alpha\beta,\ \beta^2+4\gamma^2\geq 4\beta\gamma,\ \gamma^2+4\alpha^2\geq 4\gamma\alpha, \tag{1}$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{4\alpha\beta}\geq\frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha=2\beta)\Rightarrow\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}\geq\gamma \tag{2}$$

$$\frac{\beta^2+4\gamma^2}{4\beta\gamma}\geq\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta=2\gamma)\Rightarrow\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}\geq\alpha \tag{3}$$

$$\frac{\gamma^2+4\alpha^2}{4\gamma\alpha}\geq\frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma=2\alpha)\Rightarrow\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\beta \tag{4}$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma=12\,. \tag{5}$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha=2\beta,\ \ \beta=2\gamma,\ \ \gamma=2\alpha\,,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12\,.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{r} x^2+2xy=\ \ 5 \\ y^2-3xy=-2 \end{array}\right\}. \tag{Σ}$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x,y) του συστήματος (Σ), με $x=0$ ή $y=0$, τότε λαμβάνουμε 0 = 5 ή 0 = -2, άτοπο.

Για $xy\neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2+2xy}{y^2-3xy}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1+2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\cdot\frac{y}{x}}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\frac{1+2m}{m^2-3m}=-\frac{5}{2}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}5m^2-11m+2=0\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}m=2 \text{ ή } m=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}m=2\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}m=\frac{1}{5}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}5x^2=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}\frac{7x^2}{5}=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=\pm 1\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{7}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}$$

$$(x,y)=(1,2) \text{ ή } (x,y)=(-1,-2) \text{ ή } (x,y)=\left(\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων (c_1),(c_2) και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1=R_2=R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΟΒ έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΟΝΒ έχουμε: $\hat{A}_2=\hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, έχουμε: $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $N\hat{A}\Gamma=K\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΝΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε $NA=N\Gamma$ και $KB=K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB=O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. ΟΚ (κοινή)

3. $KB=K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3).

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (1ος τρόπος)

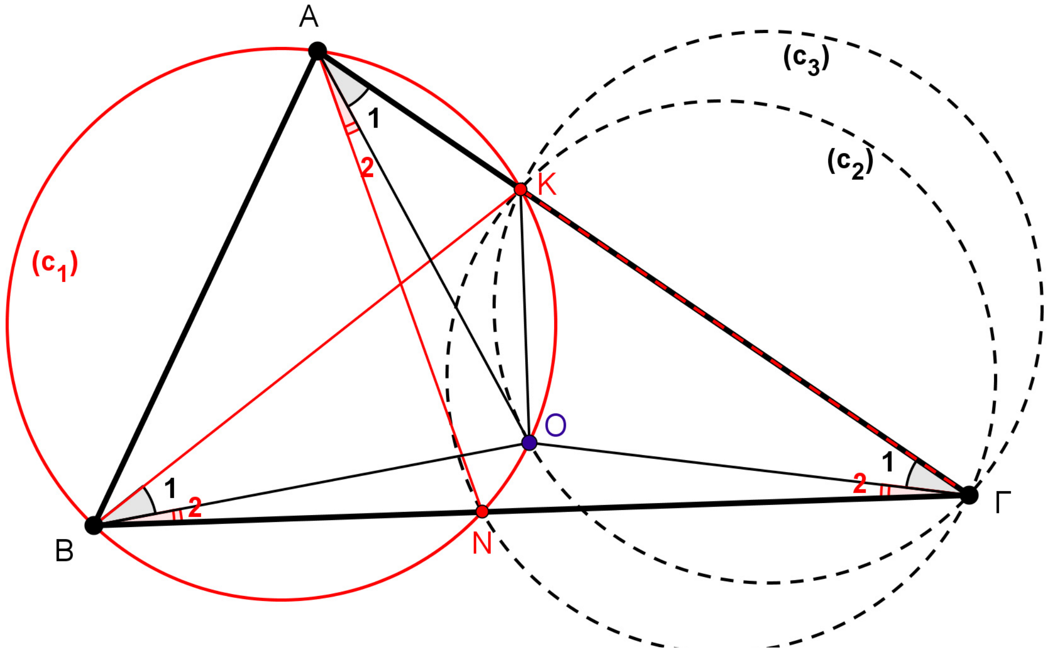
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E=(\text{ΑΒΓ})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1=(\text{ΚΝΒ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΒ και $E_2=(\text{ΚΝΓ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΓ. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E_1&=(\text{ΚΝΒ})=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1}\\ E_2&=(\text{ΚΝΓ})=\frac{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}{4R_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{4R_2\cdot\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1\cdot\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{R_2\cdot\text{ΝΒ}}{R_1\cdot\text{ΝΓ}},\qquad(1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\text{ΚΒ}=\text{ΚΓ}$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουν τις γωνίες τους $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Β}$ και $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Γ}$ παραπληρωματικές. Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}}{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{\text{ΝΒ}}{\text{ΝΓ}}\ .\qquad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1=R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων *(c₁)* και *(c₂)* (2ος τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\text{ημΑ}}=\frac{\beta}{\text{ημΒ}}=\frac{\gamma}{\text{ημΓ}}=2R\,.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουμε:

$$\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν})}=2R_1\ \text{και}\ \frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\hat{\Gamma})}=2R_2\,.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν}=\hat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1=R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in ¥^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_1 = 1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $k,\ n$ τέτοιοι ώστε : $a_n = \dfrac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2 = a_1 - \frac{k}{2},\ a_3 = a_2 - \frac{k}{2^2},\ \dots,\ a_n = a_{n-1} - \frac{k}{2^{n-1}},\ \ n = 1,2,3,\dots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n = a_1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - k\left(-1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 + k - 2k\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}},\ n = 1,2,3,\dots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k)\cdot 2^{n-1+1000} + k\cdot 2^{1000} = 2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000} - 2^{n-1} = k\left(2^{n-1+1000} - 2^{1000}\right).$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} > 0,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 > 1000 \Leftrightarrow n > 1001,$ τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k \in (0,1)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 < 1000 \Leftrightarrow n < 1001,$ τότε έχουμε:

  $$k - 1 = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} - 1 = \frac{2^{1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} = \frac{1 - 2^{n-1001}}{2^{n-1} - 1},$$

  οπότε θα είναι $0 < k - 1 < 1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n - 1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k = 1$.

ΘΕΜΑΤΑ 2012

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(8+1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(9+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot 9=\frac{72}{31},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}=\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{81}-\frac{2}{81}\right)+\frac{3}{16}=\frac{1}{6}\cdot\frac{81}{6}+\frac{3}{16}=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}=\frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{72}{31}-\frac{39}{16}=\frac{72\cdot 16-39\cdot 31}{31\cdot 16}=\frac{1152-1209}{496}<0$, έπεται ότι $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma&=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}=\frac{8}{2\alpha}-\frac{\alpha}{2\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{\beta}{3\beta}+\frac{16}{4\gamma}-\frac{\gamma}{4\gamma}\\&=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma\neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma}=\frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}=4\cdot\frac{11}{6}-\frac{13}{12}=\frac{44}{6}-\frac{13}{12}=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x, τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

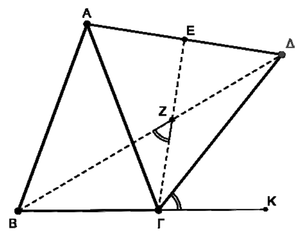
$$\frac{x}{2}+24\cdot 500=x+\frac{10x}{100}\Leftrightarrow \frac{x}{2}+12000=x+\frac{x}{10}\Leftrightarrow 5x+120000=10x+x$$

$$\Leftrightarrow 6x=120000\Leftrightarrow x=\frac{120000}{6}=20000.$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x=20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x+\frac{10x}{100}=\frac{11x}{10}=\frac{11\cdot 20000}{10}=22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

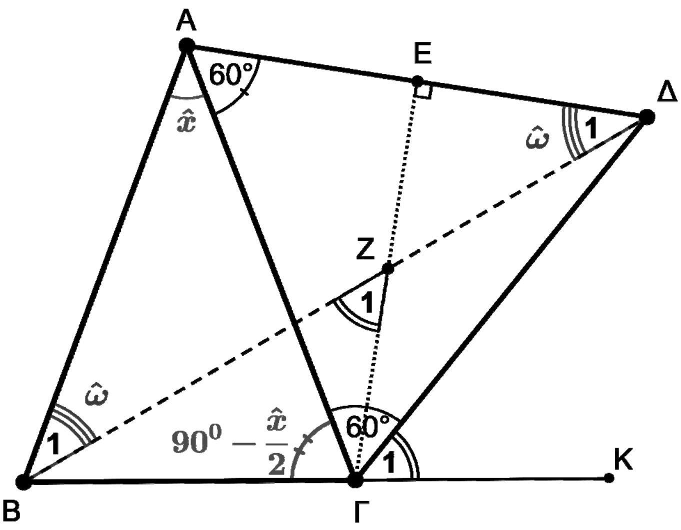
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$), το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο και Ε είναι το μέσο του ΑΔ. Αν το Κ βρίσκεται στη προέκταση της ΒΓ και οι ΒΔ, ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $Β\hat{Ζ}Γ$ και $Κ\hat{Γ}Δ$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $Β\hat{Α}Γ=\hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β}=\hat{Γ}$ έχουμε:

$$\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180^o\Leftrightarrow \hat{x}+2\hat{Γ}=180^o\Leftrightarrow \hat{Β}=\hat{Γ}=90^o-\frac{\hat{x}}{2}. \qquad (1)$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε: $Α\hat{Γ}Δ=60^0$. Οι γωνίες τώρα $\hat{Γ}$, $Α\hat{Γ}Δ$ και $\hat{Γ}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{Γ}+Α\hat{Γ}Δ+\hat{Γ}_1=180^o$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 60^o - \left(90^o - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, θέτουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^0 = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^o - \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $E\Delta Z$, έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = E\hat{Z}\Delta = 90^o - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, ..., 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 5κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 5\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{5, 8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \le 40\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3+\frac{9\alpha-20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\beta=2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y}=\alpha>0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $\mathrm{K}\leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση Κ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha=\beta=2^{-3}$ λαμβάνουμε $\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{2^{-3}}{\left(2^{-3}\right)^2}=\frac{2^{-3}}{2^{-6}}=2^{-3+6}=2^3=8$.

Η παράσταση Α γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^3+9\cdot\frac{\alpha}{\beta^2}-20=\left(8+237\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 8\right)^3+9\cdot 8-20\\&=245\cdot 2^3+72-20=245\cdot 8+52=2012.\end{aligned}$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x=\alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$\mathrm{K}=\frac{2ayy}{\alpha^2y^2+y^2}=\frac{2\alpha y^2}{\left(\alpha^2+1\right)y^2}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1},$$

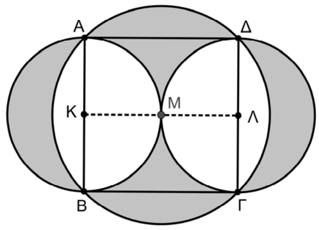
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α. Επιπλέον, ισχύει

$$\mathrm{K}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\leq 1\Leftrightarrow\alpha^2+1\geq 2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1\geq 0\Leftrightarrow\left(\alpha-1\right)^2\geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha-1=0$, δηλαδή όταν $\alpha=1$.

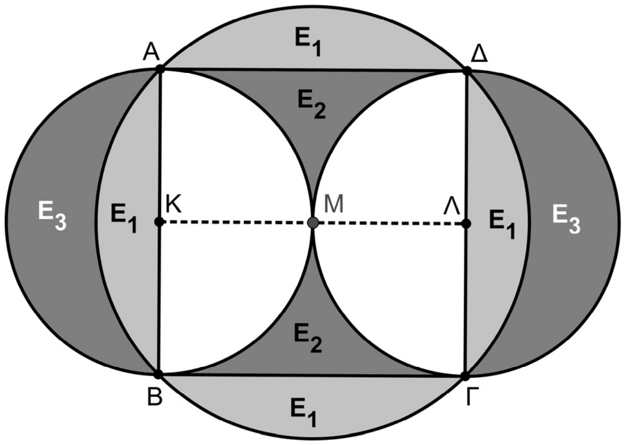
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $\mathrm{K}\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

Επειδή είναι $\mathrm{AK} = \Delta\Lambda$ και $\mathrm{AK} \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $\mathrm{K}\Lambda$, το τετράπλευρο $\mathrm{AK}\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{K}\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο $\mathrm{KB}\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ότι $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{K}\Lambda = 2R$ Επομένως, το τετράπλευρο $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = 4R^2$.



Σχήμα 2

Το τρίγωνο AKM είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\mathrm{KA} = \mathrm{KM} = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $\mathrm{MA} = \mathrm{MB} = \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{M}\Delta = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $\mathrm{E} = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων $\mathrm{MA}\Delta$ και $\mathrm{MB}\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2\mathrm{E}_2 = (\mathrm{AB}\Gamma\Delta) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2\mathrm{E}_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}_2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων E_3 έχουμε: $\mathrm{E}_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} - \mathrm{E}_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2\mathrm{E}_1 + 2\mathrm{E}_2 + 2\mathrm{E}_3 = 2\mathrm{E}_1 + (4-\pi)R^2 + \pi R^2 - 2\mathrm{E}_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{E} - (\mathrm{AB}\Gamma\Delta)}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi-2)R^2}{2}..$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $A = \{101, 102, 103, ..., 2012\}$ έχει 2012 - 100 =1912 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 3κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 3\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \le \kappa \le \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \le \kappa \le 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow \kappa \in \{34, 35, ..., 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{13, 14, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{3,8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \le 24\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \le \kappa \le \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \le \kappa \le 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow \kappa \in \{5, 6, ..., 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$ και

$$Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4 = \alpha\gamma x^4 + \beta\gamma x^3 + \alpha\delta x^2 + \beta\delta x + 4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma = 1,\ \beta\gamma = 0,\ \alpha\delta = -5,\ \beta\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0\}, \{\beta = 0 \text{ ή } \delta = 0\}, \alpha\gamma = 1, \alpha\delta = -5.$$

Οι τιμές $\gamma = 0$ και $\delta = 0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta = 0,\ \gamma = \frac{1}{\alpha},\ \delta = -\frac{5}{\alpha},\ \alpha \ne 0.$ Από την εξίσωση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, με αντικατάσταση των τιμών των β, γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha - \frac{4}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 + 3\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1) + 3(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha+4) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \text{ ή } \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \delta = -5 \text{ ή } \alpha = -4,\ \beta = 0,\ \gamma = -\frac{1}{4},\ \delta = \frac{5}{4}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4(|x|-1)\le 3|x|+3x^2\Leftrightarrow |x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\le x<-2\}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Λύση

Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2\neq 0, 1-a^2\neq 0\,(\text{υπόθεση})\ \text{και}\ a\neq b\,(\text{υπόθεση})\Leftrightarrow x\neq\pm 1.$$

Για $x\neq\pm1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1+a^2x^2-a^2-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow (a-b)^2x^2+(a-b)^2x-ab=0$$

Επειδή είναι $a\neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(a-b)^4+4ab(a-b)^2=(a-b)^2\left[(a-b)^2+4ab\right]=(a-b)^2(a+b)^2=\left(a^2-b^2\right)^2>0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_1 = \frac{-(a-b)^2 + (a^2 - b^2)}{2(a-b)^2} = \frac{2ab - 2b^2}{2(a-b)^2} = \frac{2b(a-b)}{2(a-b)^2} = \frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-(a-b)^2 - (a^2 - b^2)}{2(a-b)^2} = \frac{2ab - 2a^2}{2(a-b)^2} = \frac{-2a(a-b)}{2(a-b)^2} = \frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a} = 1 \Leftrightarrow b = b - a \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \frac{b}{b-a} = -1 \Leftrightarrow b = -b + a \Leftrightarrow a = 2b,$$

$$\frac{-a}{a-b} = 1 \Leftrightarrow -a = a - b \Leftrightarrow 2a = b \text{ και } \frac{-a}{a-b} = -1 \Leftrightarrow -a = b - a \Leftrightarrow b = 0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a,b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ και $a \neq \pm 1$, έχουμε:

- Αν $(a-2b)(2a-b) \neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες
$$x_1 = \frac{b}{a-b} \text{ και } x_2 = \frac{-a}{a-b}.$$
- Αν $a = 2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2 = -2$.
- Αν $a = \frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2 = -2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}} < 45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Λύση

(α) Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ θα είναι ΖΒ = ΖΜ και

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \omega.$$

Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB} \perp \mathrm{B}\Gamma$ έπεται ότι $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma$, δηλαδή η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Αφού $\mathrm{Z} \in \mathrm{B}\Gamma$ θα είναι $\mathrm{ZB} = \mathrm{Z}\Gamma$ και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \varphi.$$

Επειδή $\mathrm{MZ} = \mathrm{BZ} = \Gamma\mathrm{Z}$ θα είναι και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \theta.$$

Από το τρίγωνο ΒΜΓ, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M} + \Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + 2\theta = 180^\circ$$

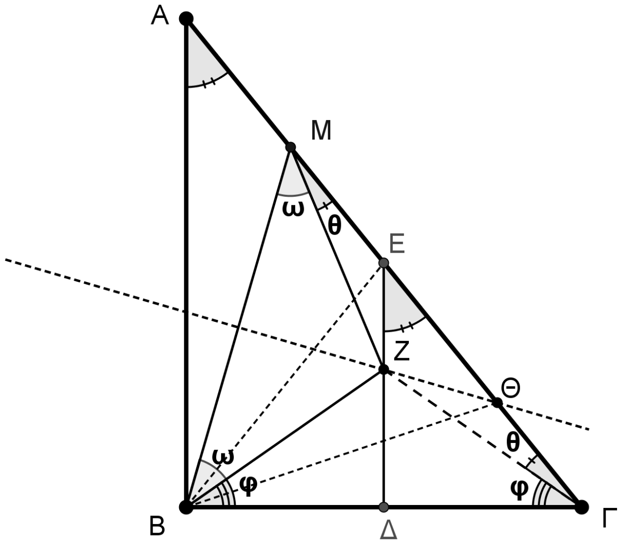
$$\omega + \varphi + \theta = 90^\circ. \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ λαμβάνουμε

$$\varphi + \theta = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \omega = \hat{\mathrm{A}}.$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ η ΘΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{E}$. Επίσης, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ προς την υποτείνουσα, θα είναι $\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\mathrm{E\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BE\Gamma}$ είναι ισοσκελές με την ΕΔ ύψος και διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$, άρα και της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Theta$. Επομένως στο τρίγωνο ΒΘΕ το Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2+\left(y^2-a^2\right)x+y\left(y-a\right)^2=0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2+\left(y^2-a^2\right)x+y\left(y-a\right)^2=0$.
Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a, γράφεται:

$$\left(y-x\right)a^2-2y^2a+y\left(x^2+xy+y^2\right)=0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta=4y^4-4y\left(y-x\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=4y\left[y^3-\left(y^3-x^3\right)\right]=4yx^3=xy\left(2x\right)^2=\kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy=\left(\dfrac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\dfrac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Λύση

Μετά τις παραγοντοποιήσεις των όρων των κλασμάτων η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a(x+2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{2(a+3)}{x(x-2)(x+2)}. \qquad (1)$$

Πρέπει να ισχύουν $x \neq 0, \pm 2$, δηλαδή η εξίσωση θα λυθεί στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$.

Η εξίσωση (1) στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ είναι ισοδύναμη τελικά με την εξίσωση

$$x^2+(a-2)x-(2a^2+4a)=0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=(3a+2)^2$ και ρίζες $x_1=a+2$ και $x_2=-2a$. Επειδή

$$a+2 \in \{-2,0,2\} \Leftrightarrow a \in \{-4,-2,0\} \text{ και } -2a \in \{-2,0,2\} \Leftrightarrow a \in \{1,0,-1\}$$

και αφού από την υπόθεση είναι $a \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες δεκτές, τις $x_1=a-2$ και $x_2=-2a$, όταν είναι $a \neq -1, +1, -2, -4$.

Επειδή είναι

$$|a+2-(-2a)|=4 \Leftrightarrow |3a+2|=4 \Leftrightarrow 3a+2=4 \text{ ή } 3a+2=-4 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3} \text{ ή } a=-2,$$

η τιμή του a που ζητάμε είναι η $a=\frac{2}{3}$.

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x,y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-|x^2-3x+1|>0 \\ y-2+|x-2|<0 \end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$, όπου (x,y) λύση του συστήματος (Σ).

Λύση

Έχουμε

$$\left.\begin{cases} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+\left|x-2\right|<0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 1+y>\left|x^2-3x+1\right|\geq 0 \\ y-2<-\left|x-2\right|\leq 0 \end{cases}\right\},$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$1+y>0 \text{ και } y-2<0 \Leftrightarrow -1<y<2.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του y είναι $y=0$ ή $y=1$.

- Για $y=0$, το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} \left|x^2-3x+1\right|<1 \\ \left|x-2\right|<2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} -1<x^2-3x+1<1 \\ -2<x-2<2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2-3x+2>0 \text{ και } x^2-3x<0 \\ -2<x-2<2 \end{cases}\right\}$$

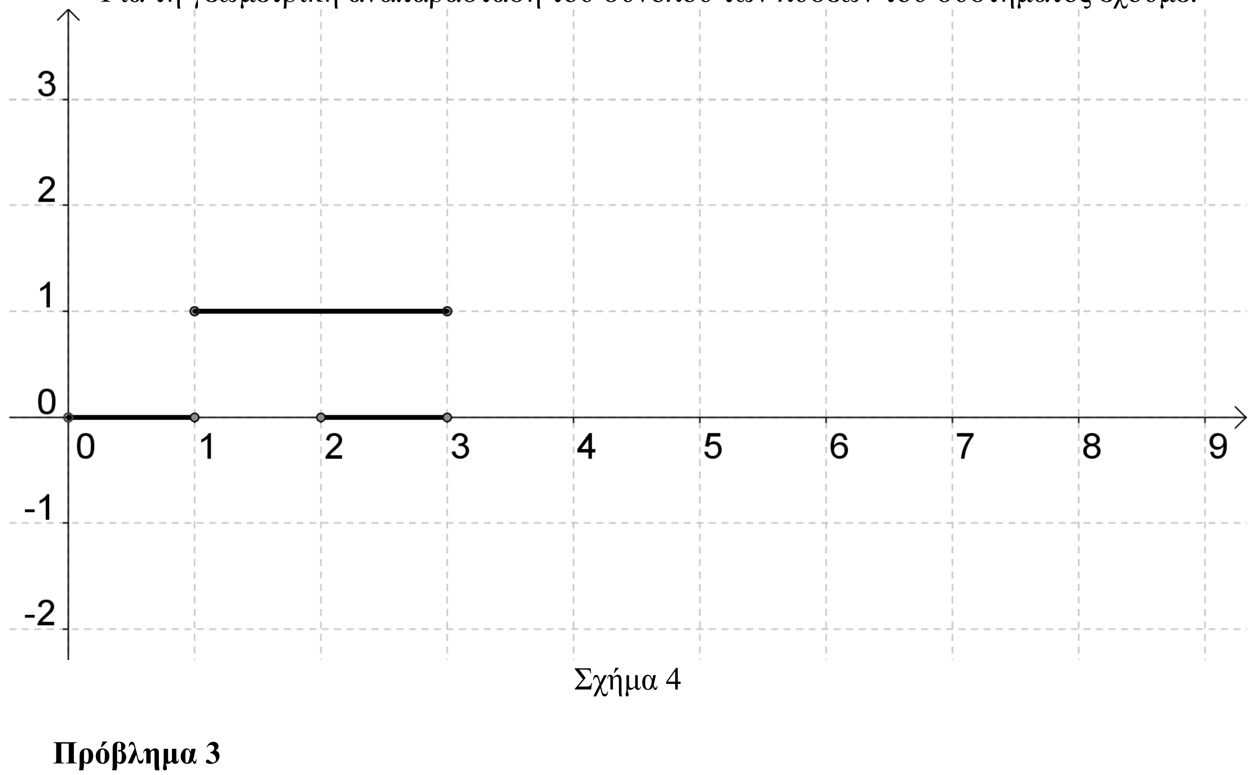
$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \left(x<1 \text{ ή } x>2\right) \text{ και } 0<x<3 \\ 0<x<4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 0<x<1 \text{ ή } 2<x<3.$$

- Για $y=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} \left|x^2-3x+1\right|<2 \\ \left|x-2\right|<1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} -2<x^2-3x+1<2 \\ -1<x-2<1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2-3x+3>0 \text{ και } x^2-3x-1<0 \\ 1<x<3 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ 1<x<3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του συστήματος έχουμε:



Σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M},\mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=\mathrm{AB}$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

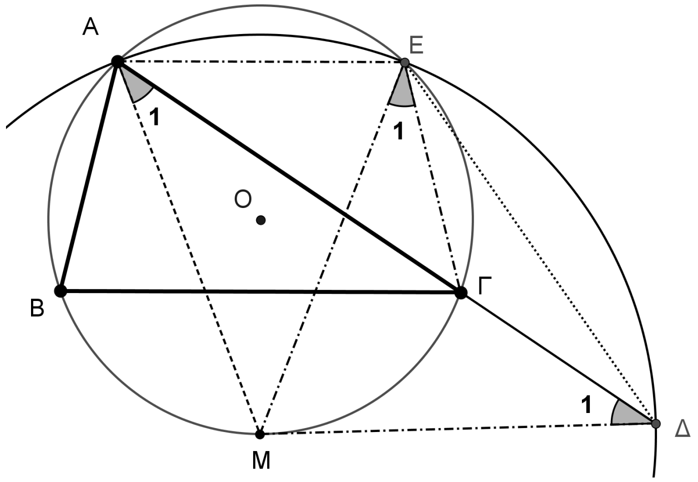
Έστω E το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1). Τότε η AE είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η OM είναι μεσοκάθετη της AE.

Το M είναι το μέσο του τόξου $\mathrm{B\Gamma}$ (διότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$). Άρα η OM είναι μεσοκάθετη και της $\mathrm{B\Gamma}$.

Επειδή οι χορδές $\mathrm{B\Gamma}$ και AE έχουν την OM κοινή μεσοκάθετη, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma E}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{E\Gamma}. \qquad (1)$$

Το τρίγωνο $\mathrm{MA\Delta}$ είναι ισοσκελές, αφού $\mathrm{MA}=\mathrm{M\Delta}$ ως ακτίνες του κύκλου (c_1). Άρα είναι $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$. Ισχύει επίσης $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{E}}_1=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{M\Gamma}}$).



Σχήμα 5

Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1=\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $\mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{M\Delta E}$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$\mathrm{E\Gamma}=\Delta\Gamma. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

2^{ος} Τρόπος

Το τρίγωνο $\mathrm{AM\Delta}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{MA}=\mathrm{M\Delta}$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AM\Delta}$, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{M}}_1+\hat{\omega}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Delta=180^o-\hat{\mathrm{A}}_1-\hat{\Delta}_1=180^o-\hat{\mathrm{A}}$$

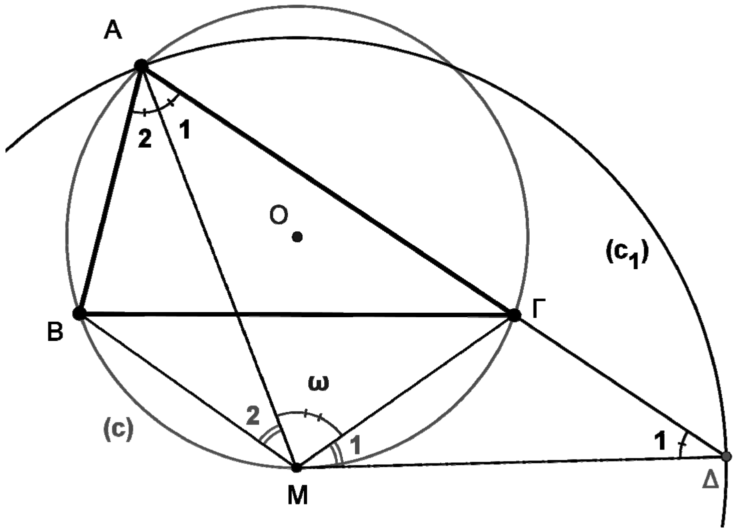
$$\Rightarrow \hat{\mathrm{M}}_1+\hat{\omega}=180^o-\hat{\mathrm{A}} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{M}}_1=180^o-\hat{\mathrm{A}}-\hat{\omega}. \qquad (4)$$

Επίσης, ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{\mathrm{M}}_2=\hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα έχουμε $\hat{\mathrm{M}}_1=180^o-\hat{\mathrm{A}}-\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{\mathrm{M}}_2$. $\qquad (5)$



Σχήμα 6

Από τις ισότητες: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $MB = M\Gamma$ (διότι το M είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$) και $MA = M\Delta$ (διότι $MA, M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = AB$.

(*) *Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.*

Παρατηρήσεις

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της ΔE είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της AB. Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $B\Lambda = A\Gamma$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Lambda$ με $A\Delta = A\Lambda = AB + A\Gamma$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $AM \perp \Delta\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2 + ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, έπεται ότι $x^2 + ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{x^2 + ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά τους $y - x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{x^2 + ax + b} - x = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + ax + b} = x + r \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 2rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{r^2 - b}{a - 2r},$$

εφόσον $r \neq \frac{a}{2}$. Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{r^2 - b}{a - 2r}$, όπου r ρητός με $r \neq \frac{a}{2}$, τότε έχουμε

$$x^2 + ax + b = \left(\frac{r^2 - b}{a - 2r}\right)^2 + a\frac{r^2 - b}{a - 2r} + b = \frac{r^4 - 2ar^3 + a^2r^2 + 2br^2 - 2abr + b^2}{(a - 2r)^2} = \frac{\left(r^2 - ar + b\right)^2}{(a - 2r)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{x^2 + ax + b} = \frac{r^2 - ar + b}{|a - 2r|}, \ r \neq \frac{a}{2},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu = 1,2,3,...$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Λύση

Από την υπόθεση δίνεται ότι:

$$\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_{3\nu} - \Sigma_\nu} = \frac{\alpha_1 + \cdots \alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1} + \cdots \alpha_{3\nu}} = c\,(\text{ανεξάρτητο του } \nu). \qquad (1)$$

Επειδή είναι

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = \frac{\left[2\alpha + (\nu-1)\omega\right]\cdot \nu}{2} \text{ και}$$

$$\Sigma_{3\nu} - \Sigma_\nu = \frac{\left[2\alpha + (3\nu-1)\omega\right]\cdot 3\nu}{2} - \frac{\left[2\alpha + (\nu-1)\omega\right]\cdot \nu}{2} = \frac{\left[4\alpha + (8\nu-2)\omega\right]\cdot \nu}{2},$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{2\alpha + (\nu-1)\omega}{4\alpha + (8\nu-2)\omega} = c \Leftrightarrow (8c\omega - \omega)\nu + 4\alpha c - 2\alpha - 2c\omega + \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow (8c-1)\omega\nu + (2c-1)(2\alpha - \omega) = 0, \text{για κάθε } \nu = 1,2,3,...$$

Στην τελευταία ισότητα θεωρούμε $\nu = 1$ και $\nu = 2$ και αφαιρούμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, οπότε λαμβάνουμε $(8c-1)\omega = 0$ και από αυτή $(2c-1)(2\alpha-\omega) = 0$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} (8c-1)\omega = 0 \\ (2c-1)(2a-\omega) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c = \dfrac{1}{8} \\ \omega = 2\alpha \end{array}\right\}, \text{ αφού } \omega \neq 0.$$

Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, ..., (2\nu-1)\alpha, ...$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, \quad y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, \quad z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4} = z^2 \cdot \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le z^2, \text{αφού ισχύει}: \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le 1,$$

και ομοίως λαμβάνουμε ότι: $z^2 \le y^2$ και $y^2 \le x^2$. Επομένως, έχουμε: $x^2 = y^2 = z^2$.

Τότε από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$x^2 = \frac{8x^4}{16+x^4} \Leftrightarrow x^2\left(x^4 - 8x^2 + 16\right) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 2$ (όλες με πολλαπλότητα 2).

- Για $x = 0$, προκύπτει η λύση $(0,0,0)$.
- Για $x = 2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(2,2,2)$, $(2,-2,2)$, $(2,2,-2)$ και $(2,-2,-2)$.
- Για $x = -2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(-2,2,2)$, $(-2,-2,2)$, $(-2,2,-2)$ και $(-2,-2,-2)$.

Πρόβλημα 3

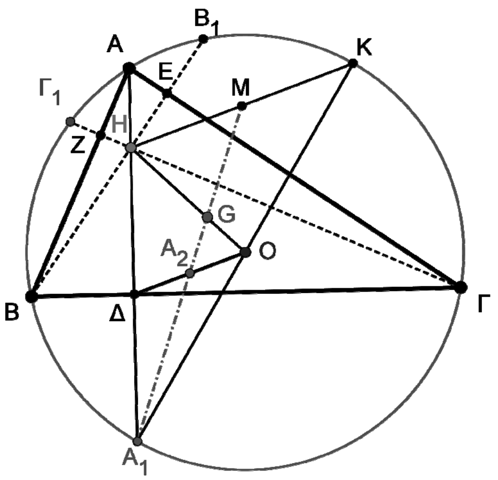
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι το σημείο A_1 είναι συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ως προς την πλευρά ΒΓ. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σημείο H_1 συμμετρικό του Η ως προς την πλευρά ΒΓ, τότε έχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}_1\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \hat{\mathrm{A}}$. Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{ABH}_1\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το σημείο H_1 συμπίπτει με το σημείο A_1.

Έστω Κ το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και Μ το σημείο τομής της $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ με την ΗΚ. Τότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{HK}$ έχουμε ότι το σημείο Ο είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{K}$ και ότι το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{H}$.**(*)** Άρα το τμήμα ΟΔ είναι ίσο και παράλληλο με το τμήμα $\frac{\mathrm{HK}}{2}$.

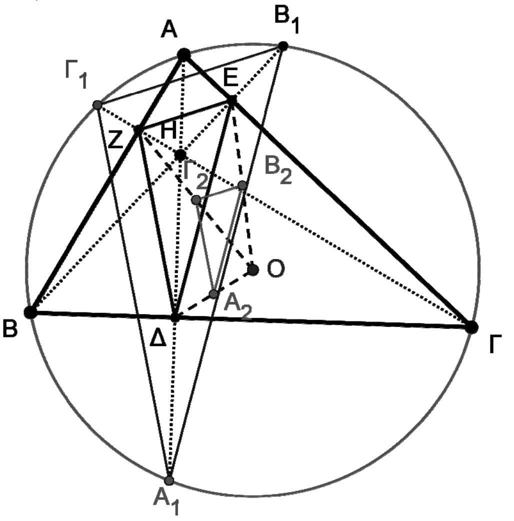


Σχήμα 7

Επειδή τώρα $\mathrm{O\Delta}=\dfrac{\mathrm{HK}}{2}$ και η $\mathrm{A_1A_2}$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $\mathrm{A_1O\Delta}$, συμπεραίνουμε ότι η $\mathrm{A_1M}$ είναι διάμεσος του τριγώνου $\mathrm{A_1HK}$. Έστω ότι οι διάμεσες $\mathrm{A_1M}$ και HO (του τριγώνου $\mathrm{A_1HK}$) τέμνονται στο σημείο G. Τότε θα ισχύει $\mathrm{GH}=2\mathrm{GO}$, δηλαδή το σημείο G χωρίζει το τμήμα HO σε δύο τμήματα με λόγο $2:1$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι $\mathrm{B_1B_2}$, $\Gamma_1\Gamma_2$ διέρχονται από το σημείο G.

2^{ος} τρόπος (με ομοιοθεσία)



Σχήμα 8

Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: "Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του", που αποδείξαμε στην αρχή της προηγούμενης λύσης, συμπεραίνουμε ότι το Δ είναι μέσο του $\mathrm{A_1H}$, το E είναι μέσο του $\mathrm{B_1H}$ και το Δ είναι μέσο του $\Gamma_1\mathrm{H}$.

Άρα το τρίγωνο $\mathrm{A_1B_1}\Gamma_1$ είναι ομοιόθετο του (ορθικού) τριγώνου $\Delta\mathrm{EZ}$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2, ($\mathrm{HA_1}=2\mathrm{H}\Delta$).

Το A_2 είναι μέσο του $O\Delta$, το B_2 είναι μέσο του OE και το Γ_2 είναι μέσο του OZ.

Άρα το ορθικό τρίγωνο $\Delta\mathrm{EZ}$, είναι ομοιόθετο του τριγώνου $\mathrm{A_2B_2}\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2, ($\mathrm{O}\Delta=2\mathrm{OA_2}$)., δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{A_2B_2}\Gamma_2$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $\mathrm{A_1B_1}\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $\mathrm{A_1A_2},\mathrm{B_1B_2},\Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2-ax+b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2<16b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2-16b<0$, έπεται ότι $4x^2-ax+b>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{4x^2-ax+b}=y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά $y-2x=r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{4x^2-ax+b}-2x=r \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-ax+b}=2x+r \Rightarrow 4x^2-ax+b=4x^2+4rx+r^2 \Rightarrow x=\frac{b-r^2}{a+4r},$$

εφόσον $r \neq -\frac{a}{4}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x=\frac{b-r^2}{a+4r}$, όπου r ρητός με $r \neq -\frac{a}{4}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}4x^2-ax+b &= 4\left(\frac{b-r^2}{a+4r}\right)^2-\frac{a\left(b-r^2\right)}{a+4r}+b \\ &= \frac{4r^4+a^2r^2+4b^2+8br^2+4abr+4ar^3}{\left(a+4r\right)^2}=\frac{\left(2r^2+ar+2b\right)^2}{\left(a+4r\right)^2},\end{aligned}$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2-16b<0$, θα είναι

$$y=\sqrt{4x^2-ax+b}=\frac{2r^2+ar+2b}{|a+4r|},\ r \neq -\frac{a}{4},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

ΘΕΜΑΤΑ 2013

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \quad \text{και} \quad B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Λύση
Έχουμε

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(27+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(28+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{112}{31}$$

$$B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81}-\frac{79}{81}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\frac{1}{81}+\frac{67}{41}=\frac{81}{41}+\frac{67}{41}=\frac{148}{41}$$

Επειδή $A-B=\frac{112}{31}-\frac{148}{41}=\frac{112\cdot 41-148\cdot 31}{31\cdot 41}=\frac{4592-4588}{1271}=\frac{4}{1271}>0$, έπεται ότι $A>B$.

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.
Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100}=36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+36=756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756:12=63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100}=100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+100,8=820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8:24=34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

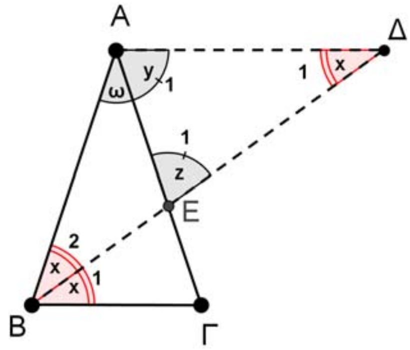
(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$.

Οι $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$. Επομένως η $\mathrm{B\Delta}$ διχοτομεί την γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{AB\Delta}$, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ (με τέμνουσα την $\mathrm{A\Gamma}$), έχουμε:

$$\hat{y} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \quad (\mathrm{A}) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \quad (\mathrm{B}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε: $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{\mathrm{B}} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60 + 45) - 15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24\cdot\frac{100}{10}=240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240\cdot\frac{60}{100}=144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240\cdot\frac{45}{100}=108$.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x=3^{-2}$, $y=3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2}=\frac{\left(3^{-2}\right)^3}{\left(3^{-3}\right)^2}=\frac{3^{-6}}{3^{-6}}=1$, $\frac{x}{y}=\frac{3^{-2}}{3^{-3}}=\frac{3^3}{3^2}=3$ και

$$\frac{81x^2+27y}{y}=\frac{81\cdot\left(3^{-2}\right)^2+27\cdot3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot3^{-4}+27\cdot3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot\frac{1}{81}+27\cdot\frac{1}{27}}{3^{-3}}=2\cdot3^3.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot3^3+2\cdot3^3=\frac{4}{3}\cdot27+2\cdot27=36+54=90.$$

(β) Ο αριθμός Β γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot5^{89}=2^{92}\cdot5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot5^{89}\right)=2^3\cdot\left(2\cdot5\right)^{89}=2^3\cdot10^{89}=8\cdot10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός Β έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65+45)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36\cdot\frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360\cdot\frac{65}{100}=234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360\cdot\frac{45}{100}=162$.

Πρόβλημα 3

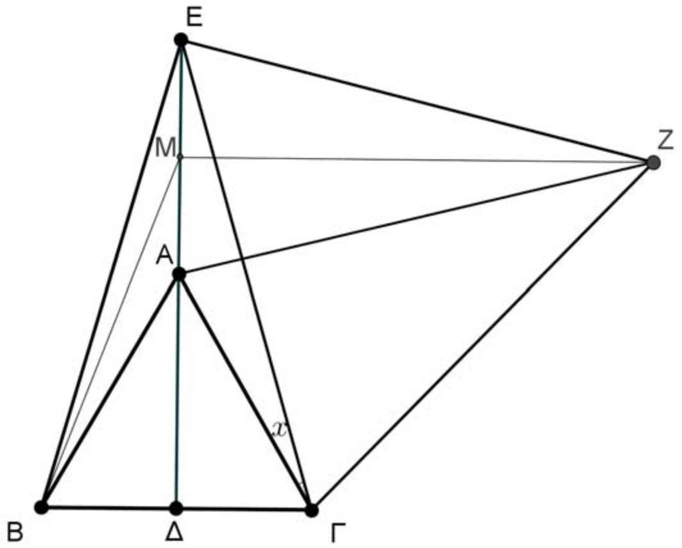
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\text{ΑΕ}=\text{ΑΔ}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΖ}=\text{ΕΓ}$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ έχουν:

1. $\text{ΒΓ}=\text{ΑΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο).

2. $\text{ΕΓ}=\text{ΖΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο).

3. $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β}=\text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Α}=60^o+\hat{x}$, όπου $\hat{x}=\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $\text{ΑΖ}=\text{ΕΓ}$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α, οπότε το ύψος του ΑΔ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $\text{ΑΕ}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ΕΔ}=\alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(\text{ΑΓΖΕ})=(\text{ΑΓΖ})+(\text{ΖΑΕ})=(\text{ΕΒΓ})+(\text{ΖΑΕ})$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΓΖ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο ΕΒΓ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\text{ΒΓ}=\alpha$ με αντίστοιχο ύψος $\text{ΕΔ}=2\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(\text{ΕΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{ZE}$) και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ έπεται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\mathrm{ZM}=\sqrt{\mathrm{ZA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Delta}^2+\mathrm{\Delta\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{3\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{16}}=\frac{7\alpha}{4}.$$

Άρα έχουμε $\left(\mathrm{ZAE}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{7\alpha}{4}=\dfrac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$\left(\mathrm{A\Gamma ZE}\right)=\left(\mathrm{EB\Gamma}\right)+\left(\mathrm{ZAE}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+\frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}=\frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο $\mathrm{B\Gamma ZM}$ είναι τραπέζιο ($\mathrm{ZM}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία $\mathrm{\Delta E}$. Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $\mathrm{B\Gamma}=\alpha,\ \mathrm{ZM}=\dfrac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα $\mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta A}+\mathrm{\Delta M}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\alpha\sqrt{3}}{4}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{B\Gamma ZM}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{ZM}\right)\cdot\mathrm{\Delta M}=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\frac{7\alpha}{4}\right)\cdot\frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)\ \text{και}\ Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1)=21$ έχουμε ότι $P(1)=(a+b+c)(a+b)=21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a,b,c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c>a+b$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{array}{c}a+b+c=7\\ a+b=3\end{array}\right\}\quad(1)\qquad \text{ή}\qquad \left\{\begin{array}{c}a+b+c=21\\ a+b=1\end{array}\right\}.\quad(2)$$

Επειδή οι a,b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)=a^2x^3+2abx^2+\left(b^2+ac\right)x+bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow\left\{a^2=a^2,\ 2ab=4,\ b^2+ac=d,\ bc=e\right\}.$$

Επειδή $c=4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3,\ ab=2,\ c=4,\ b^2+4a=d,\ 4b=e,\ a,b,c,d,e\ \text{θετικοί ακέραιοι},$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=8\ e=8\ \ \text{ή}\ \ a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=9\ e=4.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow(x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\le|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\le|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x^2+4=0\ \text{ ή }\ x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } y-2=0 \text{ (διαφορετικά θα είχαμε} (x-1)^2+(y-2)^2>0)$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ. Οι κύκλοι c_1(Β, ΒΕ) και c_2(Γ, ΓΔ) τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

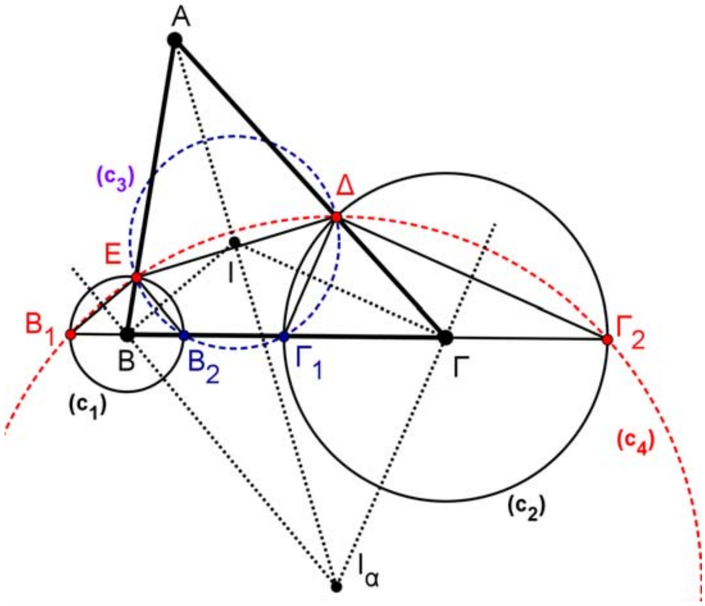
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές ΒΕ και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B}_2\mathrm{E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB}_2 = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, B_2, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2, \text{ (αδύνατη, αφού } 3 - 2\sqrt{2} > 0\text{)}.$$

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει ή ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5 .$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \ (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2 .$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in \{-2,-1\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2,....\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in \{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)(y-2)x-4y(y-1)\left(2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y\left(y^2-3y+2\right)x+4y^2\left(y^2-3y+2\right)<0$$

$$\Rightarrow\left(y^2-3y+2\right)\left(x^2-4xy+4y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow\left(y^2-3y+2\right)(x-2y)^2<0$$

$$\Rightarrow y^2-3y+2<0, \text{ αφού ισχύει} (x-2y)^2 \geq 0,$$

$$\Rightarrow(y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.$$

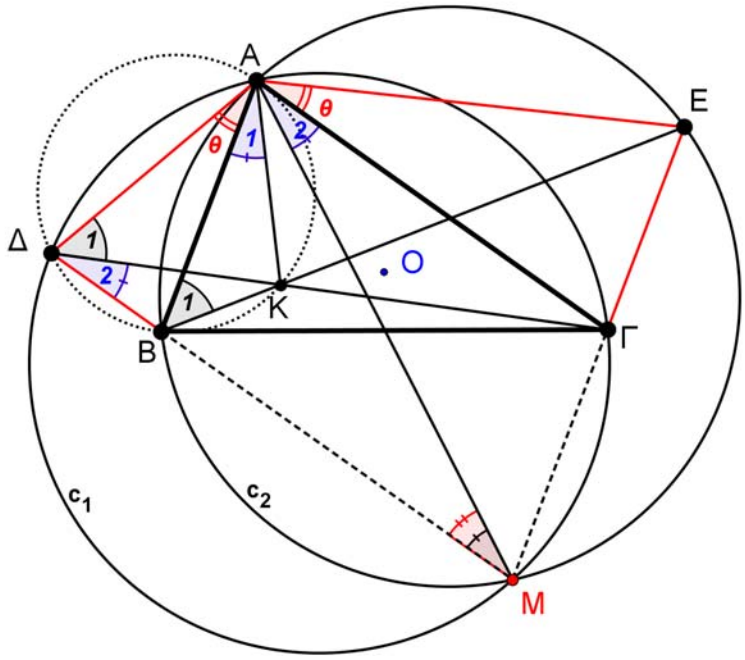
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{2y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow-1<2y-3<1 \Rightarrow|2y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως : (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}\,.$$

Λύση
Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:

$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2-4x^2} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2-4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$

Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2-4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:

$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13+13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6,7\}.$$

- Για $n=6$ η εξίσωση (1) γίνεται

$$\sqrt{13^2-4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169-4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

- Για $n=7$ η εξίσωση (1) γίνεται

$$\sqrt{13^2-4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169-4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2+2, \quad y^3 = x^3+2x^2+1.$$

Λύση
Επειδή είναι $2x^2+1>0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι

$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y-x)\left(y^2+xy+x^2\right) > 0 \Rightarrow y-x>0 \Rightarrow y>x,$$

αφού $y^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x=y=0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).
Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y>x$, έπεται ότι

$$y \geq x+1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3+3x^2+3x+1 \qquad (1)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε

$$x^3+2x^2+1 \geq x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^2+3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3,-2,-1,0\}. \qquad (2)$$

- Για $x=-3$, λαμβάνουμε $y^3=-8 \Leftrightarrow y=-2$.
- Για $x=-2$, λαμβάνουμε $y^3=1 \Leftrightarrow y=1$ (απορρίπτεται, αφού $xy=z^2+2>0$).
- Για $x=-1$, λαμβάνουμε $y^3=2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x=0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy=z^2+2>0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x=-3, y=-2$, οπότε προκύπτει $z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y,z)=(-3,-2,2) \text{ ή } (x,y,z)=(-3,-2,-2).$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right)-y^2=f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη σχέση για ειδικές τιμές των μεταβλητών.

Για $x=y=0$ λαμβάνουμε $f\left(0\right)=f\left(0\right)^2 \Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ ή $f\left(0\right)=1$.

Για $x=y=2$ λαμβάνουμε $f\left(4\right)-4=f\left(4\right)f\left(0\right)$, οπότε, αν $f\left(0\right)=1$, τότε $-4=0$ (άτοπο), ενώ, αν $f\left(0\right)=0$, τότε $f\left(4\right)=4$. Άρα έχουμε $f\left(0\right)=0$ και $f\left(4\right)=4$.

Για $x=y=t\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(t^2\right)-t^2=f\left(2t\right)f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(t^2\right)=t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\geq 0$, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $t^2=x$, έπεται ότι $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$, $y>0$, λαμβάνουμε $f\left(0\right)-y^2=f\left(y\right)f\left(-y\right)\Rightarrow yf\left(-y\right)=-y^2\Rightarrow f\left(-y\right)=-y$, για κάθε $y>0$, δηλαδή $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x<0$.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}, a>1,$ ορίζεται για $x\in\left[-a,a\right]$ και παίρνει τιμές θετικές. Αν υποθέσουμε ότι $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z},$ τότε θα έχουμε

$$f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-x^2}=\frac{n^2}{2}-a \qquad (1)$$

Επειδή $0\leq\sqrt{a^2-x^2}\leq a$, έχουμε $0\leq\frac{n^2}{2}-a\leq a\Leftrightarrow 2a\leq n^2\leq 4a\Leftrightarrow\sqrt{2a}\leq n\leq 2\sqrt{a}$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a},2\sqrt{a}\right]$ η εξίσωση (1) έχει λύση ως προς x. Πράγματι, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$a^2-x^2=\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=a^2-\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2}{2}\left(2a-\frac{n^2}{2}\right),\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2\left(4a-n^2\right)}{4},\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}.$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο διάστημα $\left[-a,\, a\right]$, οπότε είναι αποδεκτές, λόγω της σχέσης $x^2 = a^2 - \left(\frac{n^2}{2} - a\right)^2 \le a^2$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$, για $x = \pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}$.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δυνατές ακέραιες τιμές για το $n=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$, εφόσον επιτύχουμε να κάνουμε το μήκος του διαστήματος$\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, δίνοντας κατάλληλη τιμή στην παράμετρο a. Για παράδειγμα, για να περιέχει το διάστημα $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ K ή περισσότερους ακέραιους, αρκεί να ισχύει ότι

$$\left|2\sqrt{a}-\sqrt{2a}\right| \ge K \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{a} \ge K \Leftrightarrow a \ge \left(\frac{K}{2-\sqrt{2}}\right)^2.$$

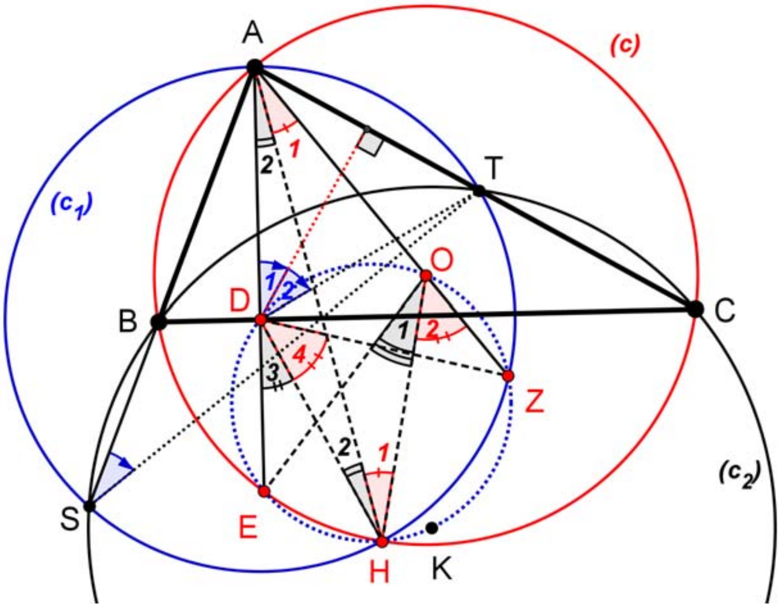
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

(α) Η γωνία $A\hat{S}T = \hat{S}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο AT. Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{S}$, οπότε $A\hat{D}T = 2\hat{S}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}T$ είναι κάθετος στην πλευρά AC, οπότε

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C} = 90^o - D\hat{A}C .$$

Άρα $\hat{S} = \hat{C}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο.

(β) Η γωνία $E\hat{D}H = \hat{D}_3$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου DAH ($DA = DH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε

$$\hat{D}_3 = 2\hat{A}_2 . \tag{1}$$

Η γωνία $E\hat{A}H = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c και η γωνία $E\hat{O}H = \hat{O}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_2 . \tag{2}$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{D}_3$, οπότε τα σημεία O,D,E,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η γωνία $H\hat{O}Z = \hat{O}_2$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAH ($OA = OH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A}_1 . \tag{3}$$

Η γωνία $Z\hat{A}H = \hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c_1 και η γωνία $H\hat{D}Z = \hat{D}_4$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{D}_4 = 2\hat{A}_1 . \tag{4}$$

Από τις ισότητες (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_2 = \hat{D}_4$, οπότε τα σημεία O,D,Z,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η μεσοκάθετη του τμήματος ST περνάει από το κέντρο D του κύκλου c_1. Η μεσοκάθετη του τμήματος BC περνάει από το κέντρο O του κύκλου c. Το σημείο τομής K των δύο μεσοκαθέτων, είναι το κέντρο του κύκλου c_2.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στο κύκλο που ορίζουν τα σημεία O,D,Z,E,H, δηλαδή ότι: $D\hat{K}O = D\hat{H}O$.

Πράγματι, η γωνία $D\hat{K}O$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι ST και BC (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες), δηλαδή είναι:

$$D\hat{K}O = 180^o - \hat{S} - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} - \hat{C} ,$$

ενώ ακόμη ισχύει ότι:

$$D\hat{H}O = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = E\hat{A}O = 90^o - \frac{A\hat{O}E}{2} = 90^o - A\hat{C}E = 90^o - (\hat{C} + 90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

.

ΘΕΜΑΤΑ 2014

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$
$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$
$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$
$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2

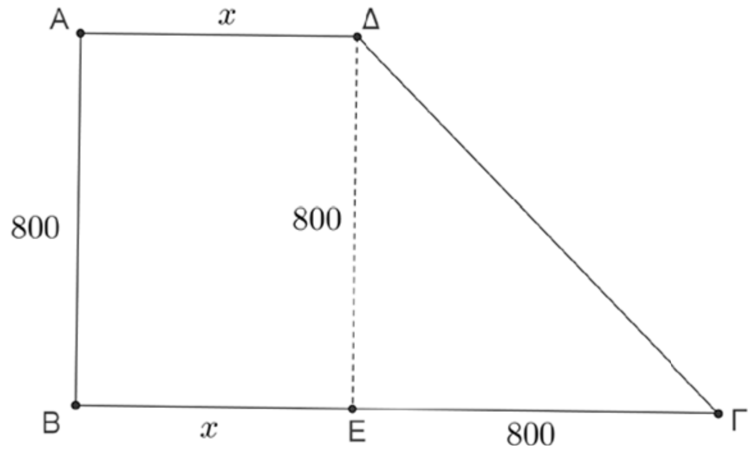
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση $\mathrm{A\Delta}$, μεγάλη βάση $\mathrm{B\Gamma}$ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\Delta\mathrm{E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\Gamma\Delta=800\sqrt{2}$ μέτρα.



Σχήμα 1

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{2x+800}{2} \cdot 800 = (x+400) \cdot 800 = 800x + 320000.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $\mathrm{A\Delta} = 600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800 \cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K\hat{M}B}$ και $\mathrm{M\hat{A}\Lambda}$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha = \mathrm{A\Delta}$.

Λύση

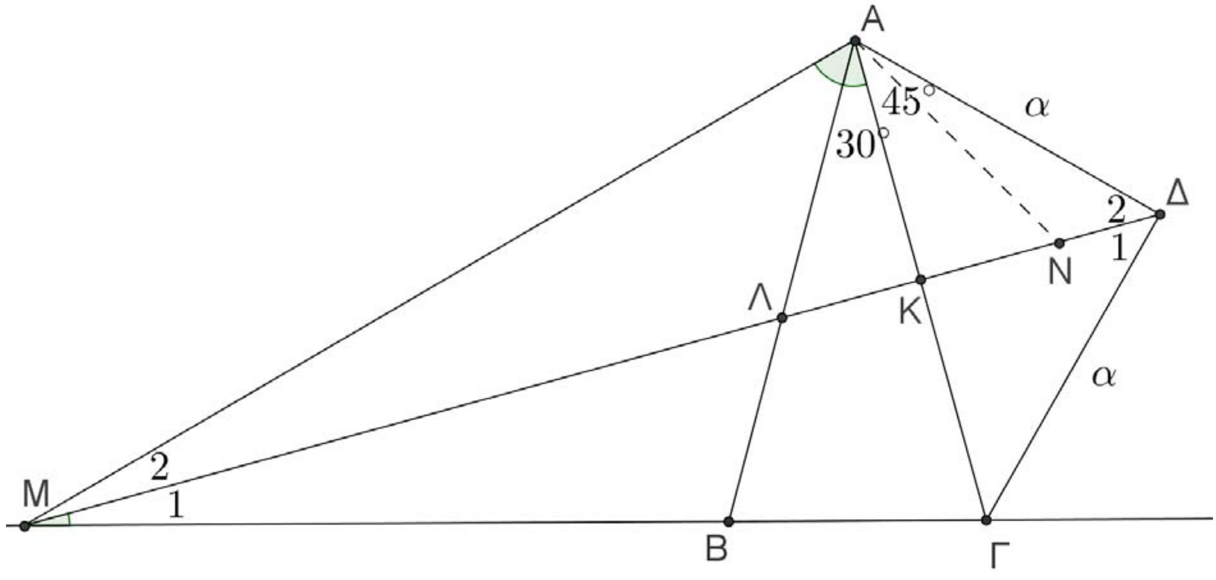
(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\mathrm{K\hat{M}B} = \mathrm{M}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \mathrm{M\hat{\Gamma}A} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}\Lambda} + \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}\Lambda} = \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία Λ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{\Lambda K} = \mathrm{KN}$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΝ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, οπότε $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AN}$ και ομοίως $\mathrm{\Lambda\hat{A}K} = \mathrm{N\hat{A}K} = 30^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{\Lambda\hat{A}N} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΛΑΝ είναι ισόπλευρο και έχουμε $\mathrm{\Lambda N} = \mathrm{A\Lambda}$. Αν είναι $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{\Lambda N} = x$, τότε θα είναι $\mathrm{\Lambda K} = \frac{\mathrm{\Lambda N}}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A\Lambda}^2 - \mathrm{\Lambda K}^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow = x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

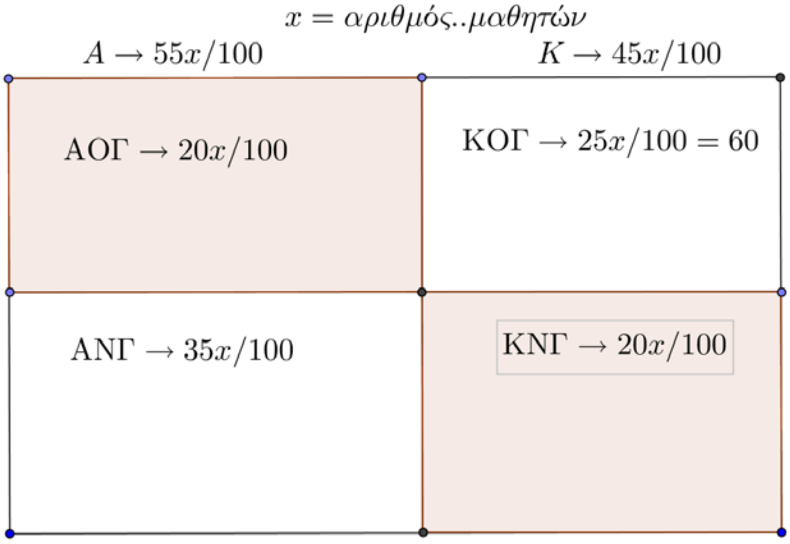
Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11}\cdot\frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55-35) = 20\%$ είναι το ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά είναι $(100-55-20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60 \cdot \dfrac{100}{25} = 240$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:



Σχήμα 3

Συμβολικά έχουμε:

Α = σύνολο αγοριών σχολείου με $|\mathrm{A}| = \dfrac{55x}{100}$.

Κ = σύνολο κοριτσιών σχολείου με $|\mathrm{K}| = \dfrac{45x}{100}$.

ΑΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΑΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

ΚΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΚΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

Από την υπόθεση έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων των συνόλων** ΑΟΓ **και** ΚΝΓ **είναι το ίδιο**, δηλαδή:

$$|\mathrm{ΑΟΓ}| = |\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

οπότε έχουμε τα λογικά βήματα:

$$(\text{αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά})\,|\mathrm{ΚΝΓ}| + |\mathrm{ΑΝΓ}| = |\mathrm{ΑΟΓ}| + |\mathrm{ΑΝΓ}| = \frac{55x}{100}(\text{αριθμός αγοριών}),$$

$$|\mathrm{ΑΝΓ}| = \frac{7}{11} \cdot \frac{55x}{100} = \frac{35x}{100},$$

$$|\mathrm{ΑΟΓ}| = (55-35)\frac{x}{100} = \frac{20x}{100} = |\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

$$|\mathrm{ΚΟΓ}| = (45-20)\frac{x}{100} = \frac{25x}{100} = 60 \Leftrightarrow x = 240$$

2^{ος} τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa \Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι *60*, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1=16x^4\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)=\left(16x^4-1\right)\left(x^2-1\right)=$$
$$=\left(4x^2+1\right)\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=\left(4x^2+1\right)(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$
$$Q(x)=4x^4-5x^2+1=4x^4-4x^2-x^2+1=4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow 4x^2+1=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x)\neq 0\Leftrightarrow x\neq \pm\frac{1}{2}$ και $x\neq \pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x=2014-y$ και

$$2014-y=\omega y+97,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ \omega\geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=1917,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=3^3\cdot 71,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917=3^3\cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y=3\cdot 71=213\ \text{ή}\ \ y=3^2\cdot 71=639\ \text{ή}\ \ y=3^3\cdot 71=1917$$

- Για $y=213$, είναι $x=1801$ και $\omega=8$.
- Για $y=639$, είναι $x=1375$ και $\omega=2$.
- Για $y=1917$, είναι $x=97<y=1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\text{ΑΔ}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ .

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\text{ΑΓ}^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2\Leftrightarrow \text{ΑΓ}=\alpha\sqrt{2},$$

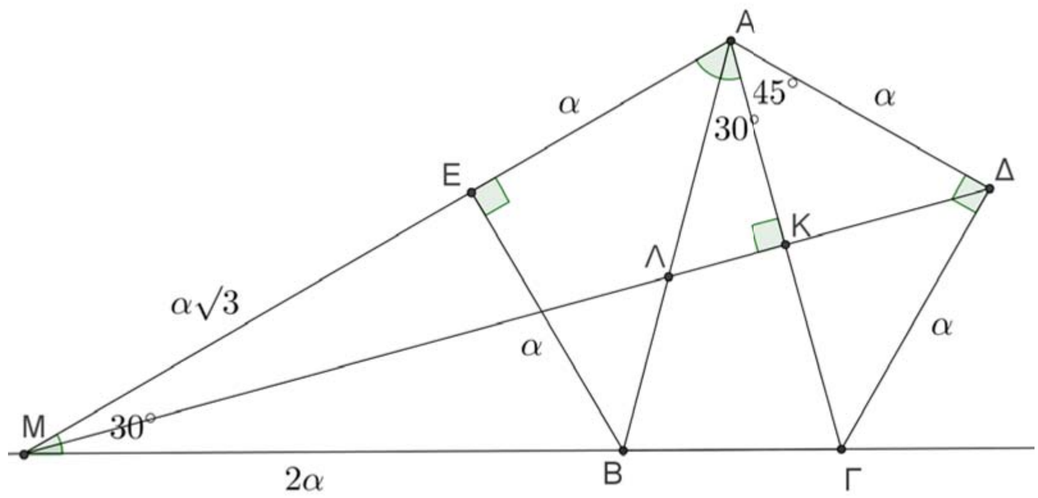
οπότε θα είναι: $\mathrm{AK}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\mathrm{K\hat{A}\Lambda}=30^\circ$, αν $\mathrm{K\Lambda}=x$, έχουμε

$$x=\mathrm{K\Lambda}=\mathrm{A\Lambda}\cdot\eta\mu 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A\Lambda}\Rightarrow\mathrm{A\Lambda}=2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AK}^2+x^2=(2x)^2\Leftrightarrow 3x^2=\mathrm{AK}^2\Leftrightarrow 3x^2=\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{\sqrt{6}}=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σχήμα 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MA}=\mathrm{M\Gamma}\ \text{ και }\ \mathrm{M\hat{A}\Gamma}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ,$$

οπότε $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}=75^\circ\Leftrightarrow\mathrm{M\hat{A}B}+30^\circ=75^\circ\Leftrightarrow\mathrm{M\hat{A}B}=45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΕΜ.

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{AE}=\alpha$ και $\mathrm{BE}=\alpha$.

Το τρίγωνο ΒΜΕ έχει

$$\mathrm{M\hat{B}E}=\mathrm{B\hat{M}A}=180^\circ-2\cdot\hat{\Gamma}=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BM}\cdot\eta\mu 30^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BM}\Rightarrow\mathrm{BM}=2\alpha\ \text{ και}$$

$$\mathrm{ME}=\mathrm{BM}\cdot\sigma\upsilon\nu 30^\circ\Rightarrow\mathrm{ME}=2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AE}+\mathrm{ME}=\alpha\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Τέλος από την ισότητα $\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{MA}$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha+\mathrm{B\Gamma}=\alpha\sqrt{3}+\alpha\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=\alpha\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x = \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y = \sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1 = \sqrt[8]{3} < \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2} = y.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \quad \text{και} \quad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right) \leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2 \geq 0 \text{ και } |x|-5 \leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2 \leq 0 \text{ και } |x|-5 \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq |x \leq 5| \text{ ή } \left(|x| \leq 2 \text{ και } |x| \geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 5.$$

Όμως $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ και $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5 \leq x \leq -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x = -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} > \text{ΒΓ}$). Ο κύκλος $c_1(\Gamma, \text{ΒΓ})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα ΒΓ) τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\text{Α}, \text{Α}\Delta)$ (με κέντρο Α και ακτίνα $\text{Α}\Delta$) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο $c_1(\Gamma, \text{ΒΓ})$ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $\text{Α}\Delta\text{Ζ}$ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Μ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων:

$$\Gamma B = \Gamma\Delta = \Gamma Z \quad (1) \qquad \text{(ακτίνες του κύκλου } c_1(\Gamma, B\Gamma)\text{)}$$
$$A\Delta = AE = AZ \quad (2) \qquad \text{(ακτίνες του κύκλου } c_2(A, A\Delta)\text{)}$$

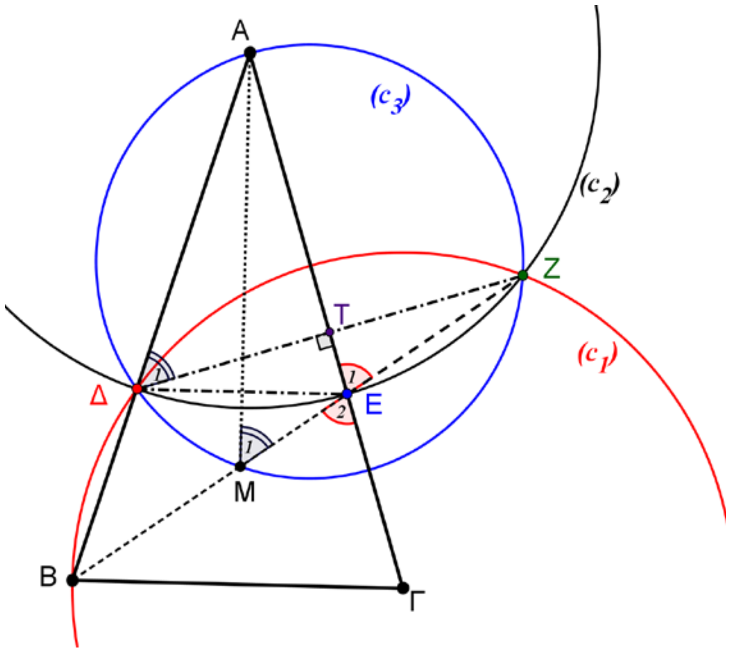
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$ και ομοίως από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε: $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE. Αυτά έχουν:

(α) η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή, (β) $B\Delta = \Gamma E$, (γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα, οπότε $BE = \Delta\Gamma \overset{(1)}{=} B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια

$$\hat{E}_2 = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$



Σχήμα 5

Εφόσον $A\Delta = AZ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma Z$, η $A\Gamma$ (διάκεντρος των δύο κύκλων) είναι μεσοκάθετη της ΔZ (κοινή χορδή των δύο κύκλων). Επομένως τα σημεία Δ και Ζ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ και ισχύει:

$$\hat{E}_1 = A\hat{E}Z = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\hat{E}_2 = B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = \hat{E}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\ , \qquad (5)$$

οπότε, δεδομένου ότι τα σημεία Α, Ε, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΑΓ, έπεται ότι οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ ή είναι αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το Ε ή είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΓ. Το τελευταίο αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε τις ευθείες ΕΔ και ΕΒ να συμπίπτουν, ως συμμετρικές και οι δύο με την ΕΖ ως προς την ευθεία ΑΓ, άτοπο.

Επομένως οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ είναι αντικείμενες, δηλαδή τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε θεωρώντας το άθροισμα

$$\mathrm{B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}A + A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{A}} + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 180^\circ,$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\hat{T}\Delta}$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M\hat{A}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a + b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a + b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s-10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s - 5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s - 5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a + b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

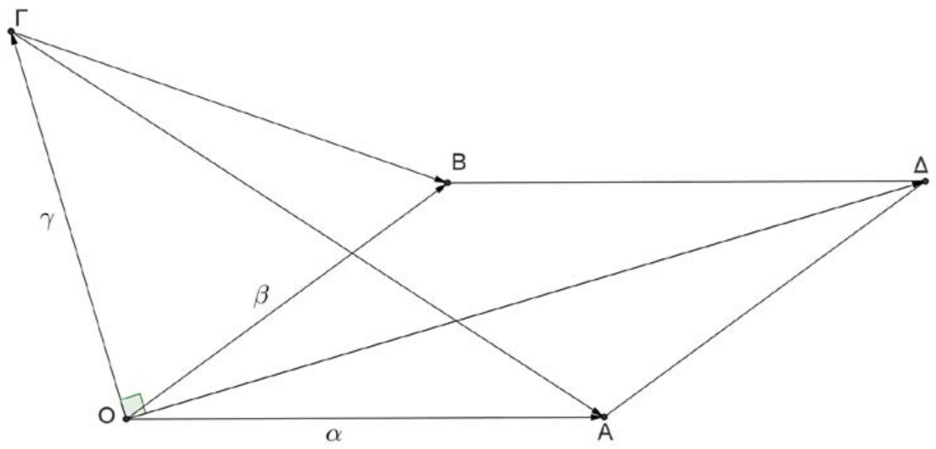
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση



Σχήμα 6

Από τις ισότητες $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\right) \cdot \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 - \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\gamma} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} \,(\text{αδύνατο,αφού O, A, B μη συνευθειακά}) \text{ ή } \vec{\gamma} \perp \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{O\Delta}$$

$\Rightarrow \vec{\gamma}$ κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου ΟΑΔΒ.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 8ax - 3ax + 6a$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right) = 4ax\left(x-2\right) - 3a\left(x-2\right) \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2 - 4ax + 3a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 - 4ax + 3a = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x^2 - 4ax + 3a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 2$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 4ax + 3a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16a^2 - 12a = 4a\left(4a-3\right)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $4a\left(4a-3\right) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \frac{3}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 4a \text{ και } uv = 3a \Rightarrow 3\left(u+v\right) = 4uv \Rightarrow 3u + 3v - 4uv = 0 \Rightarrow u\left(3-4v\right) = -3v,$$

οπότε αφού $4u - 3 \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{3v}{4v-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{12v}{4v-3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{12v-9+9}{4v-3}\right) = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{9}{4v-3}\right) \Rightarrow 4u - 3 = \frac{9}{4v-3} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει $4v - 3 \in \left\{9, -9, 3, -3, 1, -1\right\}$, οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v=3 \text{ ή } v=0 \text{ ή } v=1.$$

- Για $v=3$ ή $v=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=3$ και $a=1$.
- Για $v=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=6a^2,\\ x+y&=3a,\\ y+z&\geq 3a, \end{aligned}$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

Θέτουμε $s=y+z$, οπότε θα είναι $z=s-y$. Επίσης έχουμε $x=3a-y$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε

$$(3a-y)^2+y^2+(s-y)^2=6a^2 \Leftrightarrow 3y^2-2(3a+s)y+s^2+3a^2=0 \qquad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως προς y λύση στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν,

$$\Delta=4\left[(3a+s)^2-3\left(s^2+3a^2\right)\right]\geq 0 \Leftrightarrow -2s^2+6as\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq s\leq 3a.$$

Όμως από την ανίσωση του συστήματος έχουμε: $s\geq 3a$, οπότε λαμβάνουμε ότι: $s=3a$. Τότε προκύπτει $\Delta=0$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $y=\dfrac{3a+s}{3}=2a$, οπότε θα είναι $x=3a-y=a$ και $z=3a-y=a$. Επομένως, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$(x,y,z)=(a,2a,a).$$

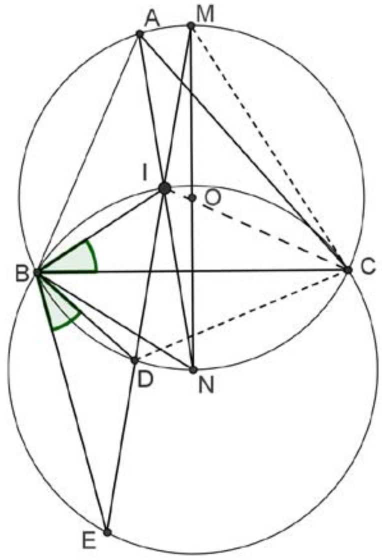
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο D και τον κύκλο (N,NI) για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E\hat{B}D}=\mathrm{I\hat{B}C}$.

Λύση

Ο κύκλος (N,NI) περνάει από τα σημεία B και C. Πράγματι, η γωνία $\mathrm{B\hat{I}N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AIB, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N}=\dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Επίσης $\mathrm{N\hat{B}I}=\mathrm{N\hat{B}C}+\mathrm{C\hat{B}I}=\dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N}=\mathrm{N\hat{B}I}$, οπότε $\mathrm{NB}=\mathrm{NI}$.

Επιπλέον, επειδή η κάθετος από το κέντρο O του κύκλου προς την πλευρά BC περνάει από τα μέσα των αντίστοιχων τόξων, έπεται ότι η NM είναι διάμετρος του κύκλου (O,R), οπότε $\mathrm{N\hat{D}M}=90^\circ$. Επομένως στον κύκλο (N,NI) το σημείο D είναι μέσο της χορδής IE.



Σχήμα 7

Από το τρίγωνο BED έχουμε $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{B\hat{D}M} - \mathrm{B\hat{E}I}$. Όμως $\mathrm{B\hat{D}M} = 90^\circ - \mathrm{B\hat{A}N} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ και $\mathrm{B\hat{E}I} = \frac{\hat{C}}{2}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$). Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E\hat{B}D} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} = \mathrm{I\hat{B}C}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 20ax - 6ax + 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) = 5ax(x-4) - 6a(x-4) \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 5ax + 6a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5ax + 6a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 4$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 5ax + 6a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 25a^2 - 24a = a(25a - 24)$ και πρέπει να εί-ναι μη αρνητική, δηλαδή $a(25a-24) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \frac{24}{25}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 5a \text{ και } uv = 6a \Rightarrow 6(u+v) = 5uv \Rightarrow 6u + 6v - 5uv = 0 \Rightarrow u(6 - 5v) = -6v,$$

οπότε αφού $6 - 5v \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{6v}{5v-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{30v}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{30v - 36 + 36}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{36}{5v-6}\right) \Rightarrow 5u - 6 = \frac{36}{5v-6} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει

$$5\nu-6\in\{36,-36,18,-18,12,-12,9,-9,6,-6,4,-4,3,-3,2,-2,1,-1\},$$

οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$\nu=-6 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=2.$$

- Για $\nu=-6$ ή $\nu=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=-6$, αντίστοιχα, και $a=-1$.
- Για $\nu=3$ ή $\nu=2$ προκύπτει $u=2$ ή $u=3$, αντίστοιχα, και $a=1$
- Για $\nu=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=\pm1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2\le 8\right\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y$, όταν $(x,y)\in D$, και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $(x-1)^2+(y-2)^2=8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Λύση

(α) Έστω $S=x+y$. Τότε η ανίσωση που ορίζει το χωρίο D γράφεται:

$$(x-1)^2+(S-x-2)^2\le 8\Leftrightarrow.$$

$$2x^2+2(1-S)x+S^2-4S-3\le 0. \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=4\left[(1-S)^2-2\left(S^2-4S-3\right)\right]=4\left(1-2S+S^2-2S^2+8S+6\right)$$

$$=-4\left(S^2-6S-7\right)=-4(S+1)(S-7).$$

Επομένως η ανίσωση (1) αληθεύει για τιμές του x μεταξύ των ριζών του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (1), όταν: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow -1\le S\le 7$, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S είναι η $S_{\max}=7$. Για $S=7$ η ανίσωση (1) γράφεται $x^2-6x+9\le 0\Leftrightarrow (x-3)^2\le 0$ και αληθεύει μόνο για $x=3$, οπότε $y=S_{\max}-x=7-3=4$.

(β) Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $\varepsilon: x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $C:(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C για εκείνα τα k, για τα οποία το σύστημα

$$(x-1)^2+(y-2)^2=8,\ x+y=k,$$

έχει διπλή λύση, δηλαδή όταν η ευθεία ε έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο C.

Ισοδύναμα, αυτό ισχύει όταν η εξίσωση

$$2x^2+2(1-k)x+k^2-4k-3=0. \qquad (2)$$

έχει μοναδική λύση ως προς x, δηλαδή όταν έχει διακρίνουσα $\Delta=-4\left(k^2-6k-7\right)=0\Leftrightarrow$ $k=-1$ ή $k=7$, οπότε η ελάχιστη τιμή του k είναι $k_{\min}=-1$. Το αντίστοιχο σημείο επαφής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης (2) για $k=-1$. Επειδή είναι $\Delta=0$ η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{k-1}{2}=-1$, οπότε $y=0$. Επομένως το ζητούμενο σημείο επαφής είναι το $(x,y)=(-1,\,0)$.

Πρόβλημα 3

Έστω $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο, ώστε $f(a)\ge k+2$.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$, ισχύει ότι $f(a)<k+2$. Τότε $f(a)\le k+1$ για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$. Αφού επιπλέον η f είναι 1-1, έπεται ότι οι αριθμοί

$$f(1)-1, f(2)-1,\,\ldots, f(k+1)-1,$$

είναι (με κάποια διαφορετική ενδεχομένως σειρά) οι αριθμοί $1-1, 2-1,\ldots,k+1-1$.

Επομένως

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]=3\left[1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2\right]$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}=\frac{2k^3+3k^2+k}{2}=k^3+\frac{3}{2}k^2+k.$$

Όμως $k^3<k^3+\frac{3}{2}k^2+k<(k+1)^3$, οπότε ο παραπάνω αριθμός δεν μπορεί να είναι κύβος φυσικού αριθμού, (άτοπο). Επομένως υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο ώστε $f(a)\ge k+2$.

Πρόβλημα 4

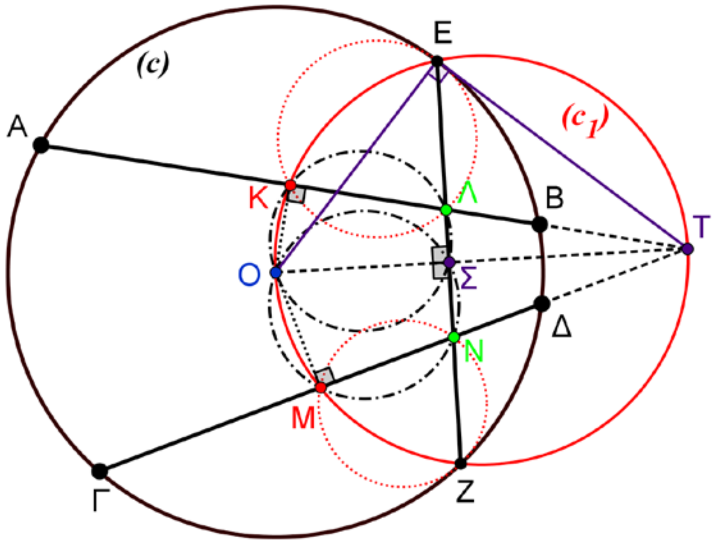
Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O},R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K,M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΟΚΜ τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στα σημεία E,Z (το σημείο Ε ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ,N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K},\Lambda,\mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Οι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$.

Λύση

(i) Επειδή K,M είναι μέσα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, θα ισχύουν οι καθετότητες: $\mathrm{OK}\perp\mathrm{AB}$ και $\mathrm{OM}\perp\Gamma\Delta$.



Σχήμα 8

Έστω T το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής AB και του κύκλου c_1. Τότε το σημείο T είναι το αντιδιαμετρικό του O στο κύκλο c_1 (διότι $\hat{\mathrm{K}} = 90^o$) . Το σημείο T είναι επίσης το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής $\Gamma\Delta$ και του κύκλου c_1.

Άρα η OT είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής EZ.

Επειδή $\hat{\mathrm{K}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma\Lambda K}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (1).$$

Επειδή $\hat{\mathrm{N}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma NM}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM}$, οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda NM}$ είναι εγγράψιμο.

(ii) Το τρίγωνο OET είναι ορθογώνιο στο E (διότι η OT είναι διάμετρος του κύκλου c_1), οπότε η TE είναι εφαπτόμενη του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO}. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (3) (σε συνδυασμό με την ισότητα (1)), έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK}. \qquad (4)$$

Άρα η ET εφάπτεται στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{K\Lambda E}$. Επομένως οι κύκλοι $c(\mathrm{O}, R)$ και $(\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{E})$ έχουν στο σημείο τους E κοινή εφαπτομένη, οπότε εφάπτονται στο σημείο E.

ΘΕΜΑΤΑ 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $(3150-x)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma\Rightarrow\alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega\Rightarrow\alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

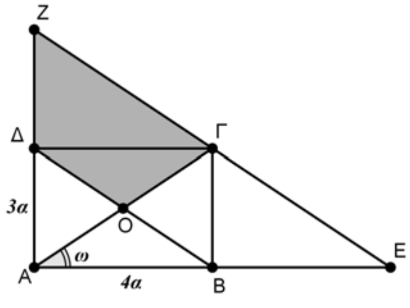
$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690\Leftrightarrow 15\omega=9690\Leftrightarrow\omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

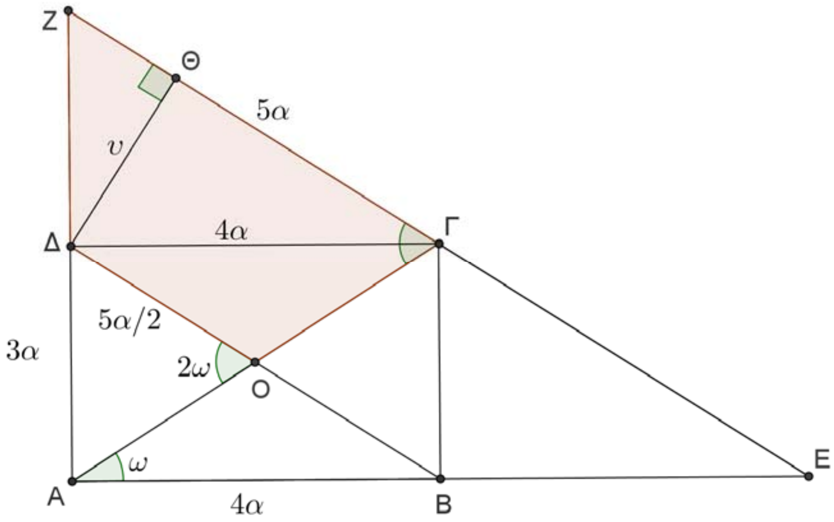
$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$



1.Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2.Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.
3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $Ο\hat{Β}Α = \omega = Ο\hat{Α}Β$. Η γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Α}Β + Ο\hat{Β}Α = 2\omega$. Από την παραλληλία $ΕΖ \parallel ΒΔ$, επειδή οι γωνίες $Α\hat{Γ}Ζ$ και $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $Α\hat{Γ}Ζ = 2\omega$.

2. Επειδή $ΕΖ \parallel ΒΔ$ και $ΓΔ \parallel ΑΕ$, $ΒΓ \parallel ΑΖ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $ΒΔ = ΓΖ = ΓΕ$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $ΑΓ = ΒΔ$. Επομένως, θα είναι και $ΑΓ = ΓΖ = ΓΕ$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΓΖ$, οπότε το ύψος του $ΓΔ = ΑΒ = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $ΑΖ = 2 \cdot ΑΔ = 6\alpha\ cm$ και $ΔΖ = 3\alpha\, cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Rightarrow ΒΔ^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow ΒΔ = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $ΟΔ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $ΓΖ = 5\alpha\, cm$.
Για το ύψος $\upsilon = ΔΘ$ έχουμε ότι:

$$Ε(ΓΔΖ) = \frac{ΔΓ \cdot ΔΖ}{2} = \frac{ΓΖ \cdot ΔΘ}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{ΓΖ \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$Ε(ΔΟΓΖ) = \frac{(ΔΟ + ΓΖ)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+ax^2+bx+c$, όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x)=3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)=(2x)^3+a(2x)^2+b\cdot 2x+c-19\left((-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c\right)$$

$$=8x^3+4ax^2+2bx+c+19x^3-19ax^2+19bx-19c=27x^3-15ax^2+21bx-18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x)=3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x\left(9x^2+12x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=27x^3+36x^2+12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a=36,\ 21b=12,\ -18c=0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a=-\frac{12}{5},\ b=\frac{4}{7}, c=0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x)=x^3-\dfrac{12}{5}x^2+\dfrac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a,b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b)\neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2=b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}\Leftrightarrow b(a-b)^2+b(a+b)^2=a\left(3ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2+(a+b)^2\right]-ab(3a-b)=0\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2\right)-ab(3a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2-3a^2+ab\right)=0\overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow}2b^2-a^2+ab=0\Leftrightarrow a^2=b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-x-1=0,\quad x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow(x-1)(x+1)-(x+1)=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\ \ x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b\text{) ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \qquad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \qquad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\le x+y+z\le 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\ge 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\le 13(x+y+z)+3\le 23\cdot 13+3$$
$$\Rightarrow 133\le 13(x+y+z)+3\le 302$$
$$\Rightarrow 133\le 99(x-z)\le 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

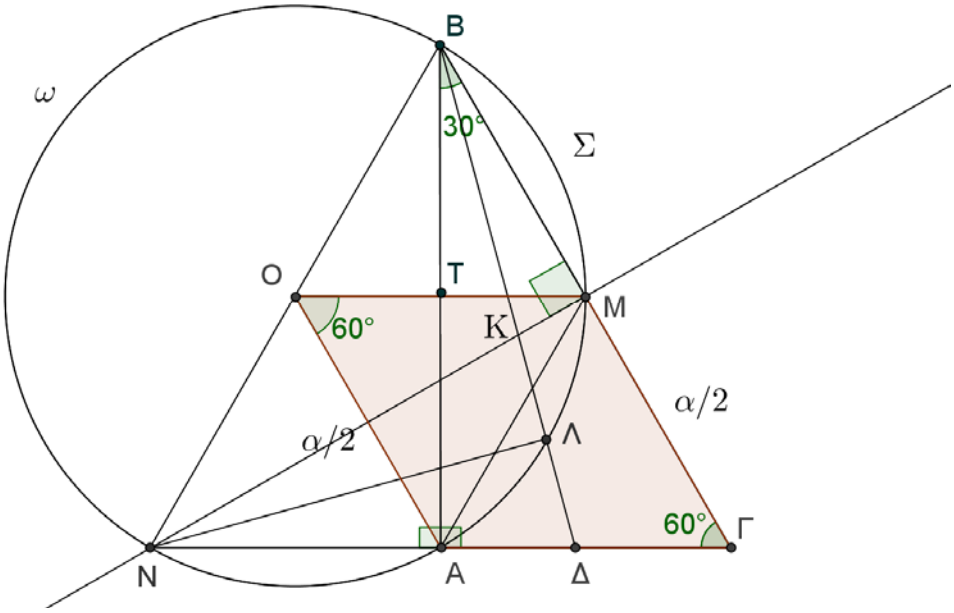
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda}\perp \mathrm{B\Delta}$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $KM, A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$N\hat{K}\Delta = B\hat{K}M = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $N\hat{\Delta}K$ ως εξωτερική του τριγώνου $\Delta\Gamma B$ ισούται με

$$N\hat{\Delta}K = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $NK\Delta$ είναι ισοσκελές με $NK = N\Delta$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $K\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $NK\Delta$, έπεται ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισοσκελές με $N\Gamma = NB$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισόπλευρο, οπότε $BN = \alpha$. ΟΙ ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $A\Gamma = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$A\hat{O}M = 2 \cdot A\hat{B}\Gamma = 2\cdot\left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ.$$

Επίσης $A\hat{O}B = 2\cdot\Gamma\hat{N}B = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $M\hat{O}B = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$AT = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$E\left(\Gamma\overset{\frown}{AM}\right) = E\left(A\Gamma BO\right) - E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(O\overset{\frown}{AM}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta \acute{\alpha} \sigma \eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\frac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 40n \quad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 46(n-1) \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 28(n-1) \quad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 32(n-2) \quad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 46 - 6n, \qquad x_n = 12n + 28, \qquad x_1 + x_n = 8n + 64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

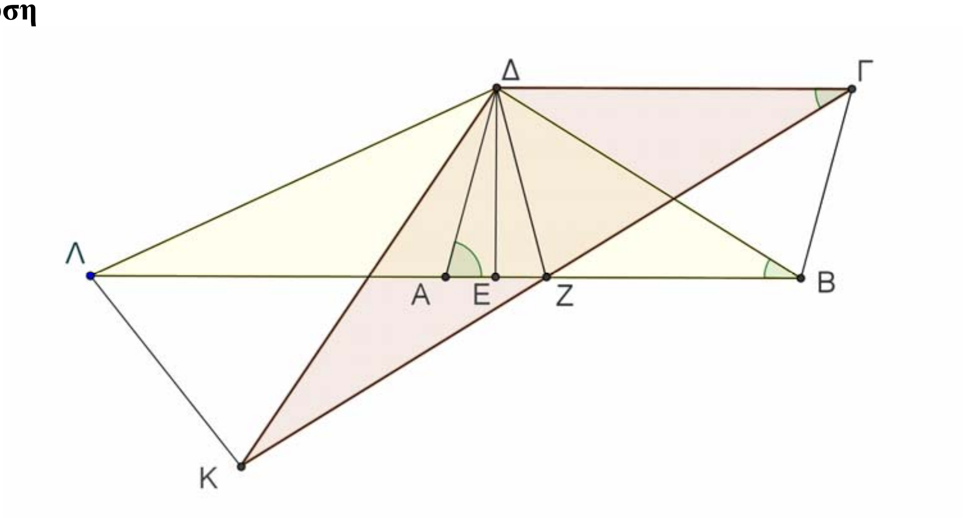
$$x_1 + x_n = (46 - 6n) + \left(12n + 28\right) = 8n + 64 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 16$ και $x_5 = 88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\text{ΑΒ} = \text{ΓΔ} = \text{ΒΔ}$. Φέρουμε το ύψος του ΔΕ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε $\text{ΔΖ} = \text{ΔΑ}$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔΕ. Επίσης είναι $\text{ΔΑ} = \text{ΒΓ}$, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως θα είναι $\text{ΔΖ} = \text{ΒΓ}$. Επιπλέον

$$\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Β} = 180^\circ - \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Α} = 180^\circ - \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Β} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΖΒΓ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΔΖ = ΒΓ και ΖΒ κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $\text{ΔΒ} = \text{ΖΓ} \Rightarrow \text{ΑΒ} = \text{ΖΓ} \Rightarrow 2 \cdot \text{ΑΒ} = 2 \cdot \text{ΖΓ} \Rightarrow \text{ΒΛ} = \text{ΓΚ}$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΒΛ και ΔΓΚ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, ΒΛ=ΓΚ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ΔΛ και ΔΚ ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \qquad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \le x + y + z + w \le 30$, οπότε

$$1698 \le 100(x + y + z + w) - 2 \le 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \le 999(x - w) + 90(y - z) \le 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.
- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

  $$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του} 10,$$

  οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

  $$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$
- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Για $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-1+\frac{2}{x-2}-1+\frac{3}{x-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3}+\frac{4-x}{x-2}+\frac{4-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow (4-x)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

2^{ος} τρόπος

Για $x\in\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε:

$$3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=x^2-3x+2+2\left(x^2-4x+3\right)+3\left(x^2-5x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+33x-18=6x^2-26x+26 \Leftrightarrow 3x^3-24x^2+59x-44=0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm11,\pm22,\pm44$, από τις οποίες μόνο το 4 ικανοποιεί την εξίσωση. Έτσι με το σχήμα Horner έχουμε

$$3x^3-24x^2+59x-44=(x-4)\left(3x^2-12x+11\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Λύση

Έστω x ο τέταρτος στη σειρά αριθμός. Τότε οι δεδομένοι αριθμοί θα έχουν τη μορφή:

$$\alpha_1=x-3d,\alpha_2=x-2d,\alpha_3=x-d,\alpha_4=x,\alpha_5=x+d,\alpha_6=x+2d,\alpha_7=x+3d.$$

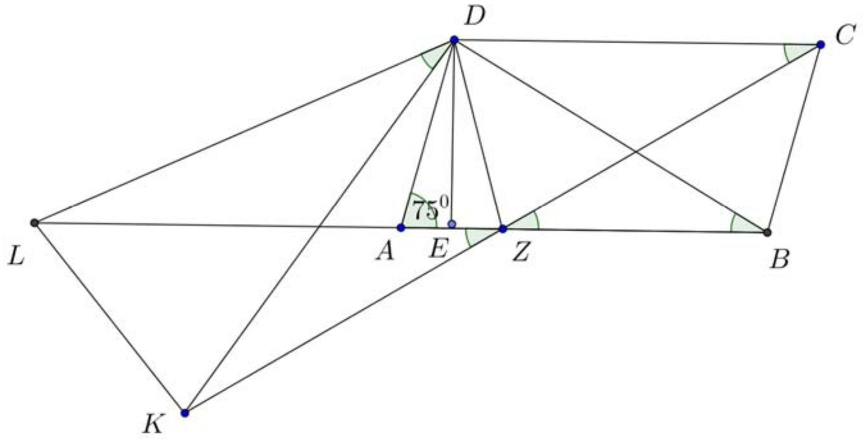
Επομένως το άθροισμά τους ισούται με $7x$ και το άθροισμα των 5 μεσαίων ισούται με $5x$. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο φυσικό αριθμό x που είναι τέτοιος, ώστε ο $7x$ ναι είναι τέλειος κύβος και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Για να είναι ο $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 7^2, ενώ για να είναι και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 5. Για να παραμείνει όμως το $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει το x να είναι πολλαπλάσιο του 5^3. Τελικά, το x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5^3\cdot7^2$, οπότε η ελάχιστη τιμή του όρου α_4 είναι $5^3\cdot7^2$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Λύση



Σχήμα 4

Έχουμε $DZ = DA$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους DE. Επίσης είναι $DA = BC$, από το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Επομένως θα είναι $DZ = BC$. Επιπλέον

$$D\hat{Z}B = 180^\circ - D\hat{Z}A = 180^\circ - D\hat{A}B = A\hat{B}C.$$

Επομένως τα τρίγωνα DZB και ZBC έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($DZ = BC$ και τη ZB κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $DB = ZC \Rightarrow AB = ZC \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot ZC \Rightarrow BL = CK$
- $Z\hat{B}D = CZB \Rightarrow Z\hat{B}D = D\hat{C}Z$, αφού από $DC \parallel ZB$ ισχύει ότι: $C\hat{Z}B = D\hat{C}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα DBL και DCK έχουν: $DB = DC$, $BL = CK$ και $D\hat{C}K = D\hat{B}L$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους DL και DK ίσες και επιπλέον $D\hat{L}B = D\hat{K}C$, οπότε το τετράπλευρο $DLKZ$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} K\hat{D}L &= K\hat{Z}L = B\hat{Z}C \quad (\text{ως κατά κορυφή}) \\ &= Z\hat{B}D \quad (\text{από τα ίσα τρίγωνα } DZB \text{ και } ZBC) \\ &= 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ \quad (\text{από το ισοσκελές τρίγωνο } ABD). \end{aligned}$$

Σημείωση. *Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι με το μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο D κατά γωνία $B\hat{D}C = 30^\circ$, το τρίγωνο CDK θα συμπέσει με το τρίγωνο BDL, οπότε $K\hat{D}L = 30^\circ$.*

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 4x^2 + kx + m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k, m δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Έστω $0 < x_1 < x_2 < 1$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε:

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1).$$

Υποθέτουμε ότι οι k, m είναι ακέραιοι. Τότε οι αριθμοί $f(0) = m$ και $f(1) = 4 + k + m$ είναι ακέραιοι . Αφού το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του 4 εκτός των ριζών και οι αριθμοί 0 και 1 είναι εκτός των ριζών, έπεται ότι $f(0) > 0$ και $f(1) > 0$, οπότε, αφού είναι ακέραιοι, θα είναι $f(0) \geq 1$ και $f(1) \geq 1$. Από την (1) για $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $4x_1x_2 \geq 1$ και $4(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1 . \qquad (2)$$

Όμως ισχύουν:

$$4x_1(1 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 \geq 0 \text{ και } 4x_2(1 - x_2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_2 - 1)^2 \geq 0 \quad (3)$$

οπότε με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \leq 1 . \qquad (4)$$

Επομένως πρέπει να έχουμε ισότητα:

$$16x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right) = 1 , \qquad (5)$$

η οποία, λόγω των (3), ισχύει μόνον όταν $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες.

Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι και δύο αριθμοί k και m ακέραιοι.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 50n \qquad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 56(n - 1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 40(n - 1) \qquad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 45(n - 2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 56 - 6n, \qquad x_n = 10n + 40, \qquad x_1 + x_n = 5n + 90 ,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

$$x_1 + x_n = (56-6n) + \big(10n+40\big) = 5n+90 \Leftrightarrow n = 6,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 20$ και $x_6 = 100$.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a = b$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}} = x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = 1$. Η δοσμένη σχέση τότε γίνεται:

$$\frac{1}{1+x^3} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + 2x(x^3+1) = 3(x^3+1) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - x^3) - (x^3 - x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

Όμως $2x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + (x^3 - x^2) - (x-1) = x^3 + (x-1)^2(x+1) > 0$. Επομένως πρέπει $x = 1$ και άρα $a = b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος k είναι ο n και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους ακέραιοι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 2018$. Τότε

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ οπότε } 2018 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 18$ η τιμή της παράστασης στο δεξί μέλος ισούται με 2109 επομένως $n \leq 17$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 2018 γράφεται ως άθροισμα 17 τετραγώνων, διαφορετικών ανά δύο ακεραίων.

Έχουμε ότι $1^2 + \ldots + 19^2 = 2470$, οπότε αν βρούμε δύο τετράγωνα με άθροισμα $2470 - 2018 = 452$, τότε το 2018 θα γράφεται ως το άθροισμα των υπόλοιπων 17 τετραγώνων. Γράφουμε:

$$452 = 2^2 \cdot 113 = 2^2 \cdot (8^2 + 7^2) = 16^2 + 14^2,$$

οπότε $2018 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2$, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

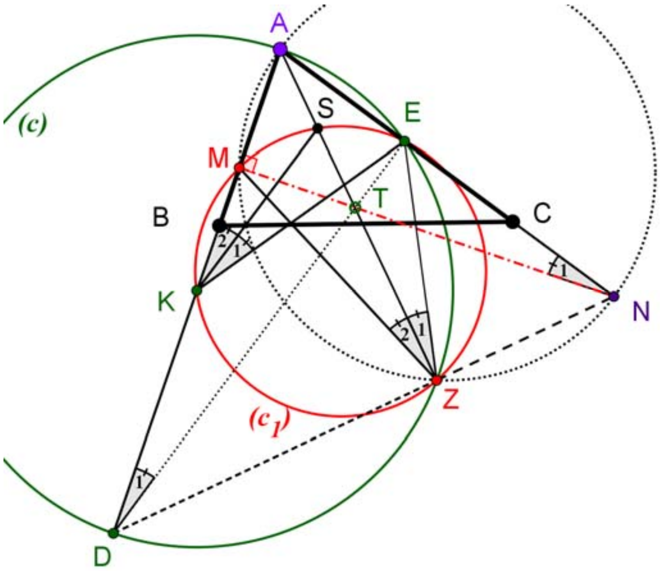
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K, KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο

N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Έστω ότι η AZ, τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο S. Από τα ορθογώνια τρίγωνα AED και AMN έχουμε:

$$A\hat{D}E = \hat{D}_1 = \hat{N}_1 = 90^o - \hat{A}. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Οι γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AE, άρα:

$$\hat{D}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SE, άρα:

$$\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (3)$$

Από τις ισότητες $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_1 = 90^o - \hat{A}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAE ($KA = KE$ ως ακτίνες του κύκλου (c)) έχουμε:

$$A\hat{K}E = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180 - 2\hat{A}.$$

Επειδή όμως $\hat{K}_1 = 90^\circ - A$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_2 = 90^\circ - A$.

Οι γωνίες $\hat{K}_2$ και $\hat{Z}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SM, άρα:

$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2. \qquad (4)$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{Z}_2 = \hat{N}_1$, οπότε το τετράπλευρο $AMZN$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $A\hat{Z}N = A\hat{M}N = 90^\circ$.

Η τελευταία ισότητα ($A\hat{Z}N = 90^\circ$) σε συνδυασμό με την ισότητα $A\hat{Z}D = 90^o$ (η γωνία $A\hat{Z}D$ βαίνει στη διάμετρο AD του κύκλου (c)), αποδεικνύει ότι τα σημεία D, Z, N είναι συνευθειακά.

Οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν), διότι είναι ύψη του τριγώνου ADN.

ΘΕΜΑΤΑ 2016

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

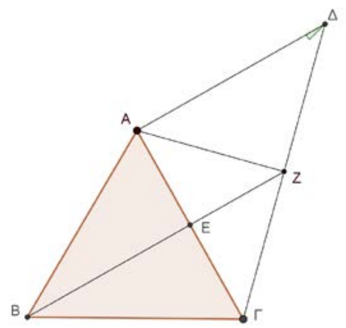
Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

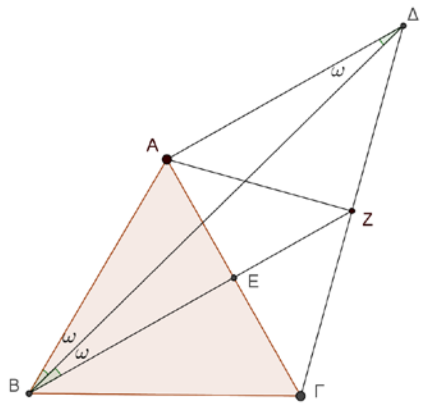
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$
$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.



Λύση
(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $A\Delta = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta \qquad (1)$$

Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel A\Delta$, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E. \qquad (3)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$, οπότε θα έχουμε

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $A\hat{\Delta}B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.
Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $\mathrm{A}=88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.
Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.
Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.
Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}$$

.

Λύση

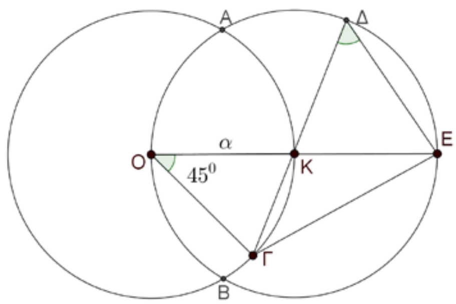
Έχουμε ότι $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}=\left(\frac{12}{3}\right)^{\nu}:2^{2\nu-1}=4^{\nu}:2^{2\nu-1}=2^{2\nu}:2^{2\nu-1}=2^{2\nu-(2\nu-1)}=2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu} = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4,\ \alpha^3 = 8$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^3-\beta)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha} = \frac{(8-10)^3+40-20+8}{4+20-20} = \frac{-8+40-20+8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :

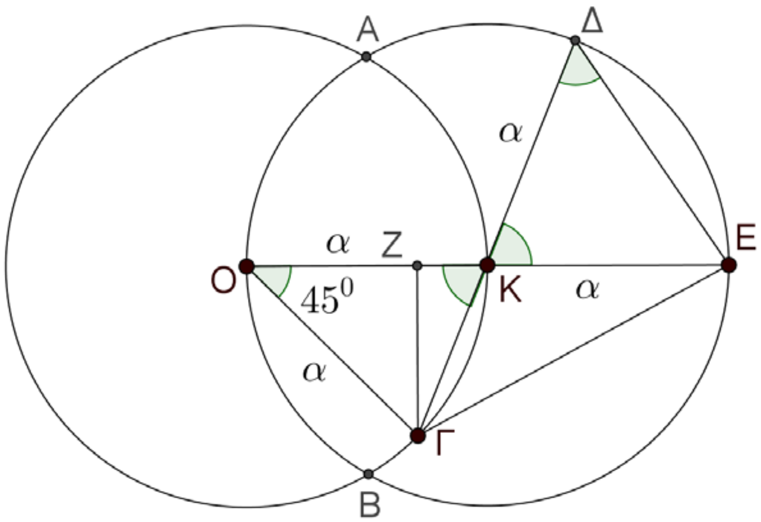


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\mathrm{OK} = \mathrm{O\Gamma} = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\mathrm{O\hat{K}\Gamma} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\mathrm{\Delta\hat{K}E}$ και $\mathrm{O\hat{K}\Gamma}$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\mathrm{\Delta\hat{K}E} = \mathrm{O\hat{K}\Gamma} = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{KE} = \alpha$), οπότε

$$\mathrm{K\hat{\Delta}E} = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma\mathrm{Z} = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{O}\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$.Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d\,\text{.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36} < \frac{\mathrm{B}}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36}, \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{A}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{B}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{A}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{B}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{A}{36}<110<111<\frac{B}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\leq\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\leq x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\leq x^3+x+19\Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x\leq x^3+x+19$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+5x\leq x^3+x+19\Leftrightarrow 4x\leq 20\Leftrightarrow x\leq 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9}\Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21\Leftrightarrow 2x>5\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\leq 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A = \overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_\nu \cdot 10^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot 10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$, $\nu \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

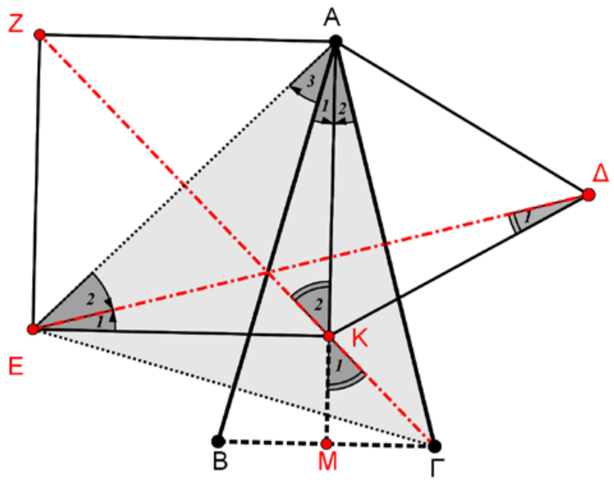
Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 22112 διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1 = 45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2 = 45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ$ (διότι $\widehat{A} = 30^\circ$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ$ (διότι $E\widehat{A}K = 45^\circ$).
Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.
Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3$.
Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1 = 15^\circ$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$,
δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.
Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο
$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$
να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση
Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $A = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος.
Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:
$$A = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$
Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $A + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3-7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.
Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = B^2 - A$, με $B^2 > A$. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = A^2 - A$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος
$$A = \left(\alpha^2 + 18\right)^2 - \left(8\alpha + 1\right)^2$$
είναι πρώτος.

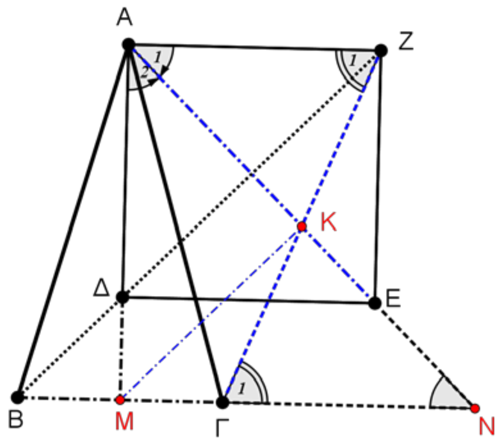
Λύση
Έχουμε
$$A = \left(\alpha^2+18\right)^2 - \left(8\alpha+1\right)^2 = \left(\alpha^2+18+8\alpha+1\right)\left(\alpha^2+18-8\alpha-1\right)$$
$$= \left(\alpha^2+8\alpha+19\right)\left(\alpha^2-8\alpha+17\right) = \left[\left(\alpha+4\right)^2+3\right]\left[\left(\alpha-4\right)^2+1\right].$$

Επειδή $(\alpha+4)^2+3\geq 3$, ο ακέραιος Α θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha-4)^2+1=1\Leftrightarrow \alpha=4$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\widehat{N}=45^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως ΜΑ=ΜΝ⇔ΜΔ+ΔΑ=ΜΓ+ΓΝ και με δεδομένη την ισότητα ΜΓ=ΜΔ, καταλήγουμε: ΑΔ=ΓΝ=ΑΖ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓΝ=ΑΖ β) $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1=\widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε ΚΖ=ΚΓ και ΚΑ=ΚΝ.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha}>2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2>\frac{4(\alpha+1)}{\alpha}\Leftrightarrow(2\alpha+1)^2>4\alpha(\alpha+1)\Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1>4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.

Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}>2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2}>2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3}>2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}=16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z,w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ \ y+\frac{1}{y}-w=2,\ \ z+\frac{1}{x}+w=2,\ \ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}.$$

Λύση

Έστω

$$\textbf{(Σ)}\quad \left\{x+\frac{1}{x}=w+2\ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2\ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w\ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w\ \ (4)\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0\Leftrightarrow x=y\ \text{ ή }\ xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y.$ Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z}\Leftrightarrow(z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0\Leftrightarrow x=z\ \text{ ή }\ xz=-1.$$

- Αν $x=z,$ τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

  $w=0$ και $x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow w=0$ και $x=1$. Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.

- Αν $xz=-1,$ τότε οι x,z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1.$ Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0\Leftrightarrow z^2-1=0\Leftrightarrow z=1,\ \text{αφού}\ z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

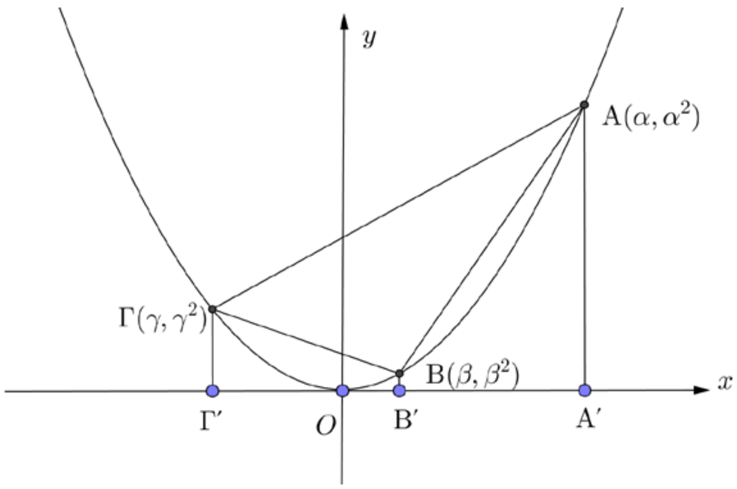
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της A,B και Γ με τετμημένες α,β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Λύση

Αν είναι A',B' και Γ' οι προβολές των σημείων A,B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{AB\Gamma}) &= E(\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'})-E(\mathrm{ABB'A'})-E(\mathrm{B\Gamma\Gamma'B'})\\
&=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}\cdot 2\omega-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\cdot\omega-\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot=\frac{\omega}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\beta^2-\gamma^2\right)\\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta^2\right)=\frac{\omega}{2}\cdot\left[\alpha^2-\beta^2-\left(\beta^2-\gamma^2\right)\right]=\\
&=\frac{\omega}{2}\cdot\left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)\right]=\frac{\omega^2}{2}\cdot(\alpha+\beta-\beta-\gamma)=\frac{\omega^2}{2}\cdot 2\omega=\omega^3
\end{aligned}$$

,



Σχήμα 5

Σημείωση.

Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β΄ Λυκείου. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{AB\Gamma}) &= \frac{1}{2}\det(\mathbf{BA},\mathbf{B\Gamma}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2 \\ \gamma-\beta & \gamma^2-\beta^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)(\gamma^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)(\gamma-\beta)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma+\beta-\alpha-\beta) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}\omega\cdot(-\omega)(-2\omega) = \omega^3.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

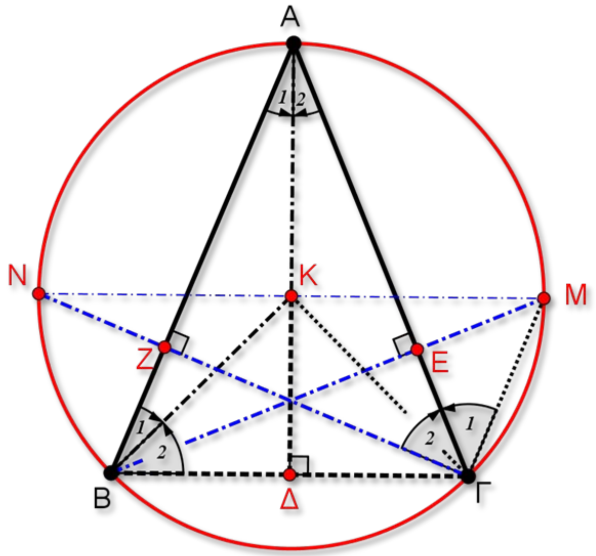
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (δηλαδή ότι το σημείο Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΚ, έχουμε: $\widehat{B}_2 = 45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (αφού $\widehat{A} = 45^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A}_1 = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ.$$

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{B}_2 = 67{,}5^\circ - 45^\circ = 22{,}5^\circ = \hat{A}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΚΑ=ΚΓ, οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 6

Η γωνία $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο ΑΜ.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ).

Επομένως $M\hat{\Gamma}N = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η ΜΝ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο Κ του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned}
&Q(x) = P(x) - x^2 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\\
&\Leftrightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2\\
&\Leftrightarrow P(x) = ax^4 - 10ax^3 + (35a+1)x^2 - 50ax + 24a
\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$P(5) = 24a + 25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&a \le 10,\ -10a \le 10,\ 35a+1 \le 10,\ -50a \le 10,\ 24a \le 10\\
&\Leftrightarrow a \le 10,\ \ a \ge -1,\ a \le \frac{9}{35},\ a \ge -\frac{1}{5},\ a \le \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35}.
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \le 24a \le \frac{9\cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} + 25 \le 24a + 25 \le \frac{9\cdot 24}{35} + 25\\
&\Leftrightarrow \frac{101}{5} \le 24a + 25 \le \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \le P(a) \le \frac{1091}{35},
\end{aligned}$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A = 14^7 + 14^2 + 1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n = 14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $A = n^7 + n^2 + 1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $n^2 + n + 1$ είναι παράγοντάς του Α ως εξής:

$$\mathrm{A} = n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 =$$
$$= n(n^3 + 1)(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 = n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1 =$$
$$= (n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)$$

Επομένως ο αριθμός $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$ διαιρεί τον αριθμό A. Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.

ΘΕΜΑΤΑ 2017

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

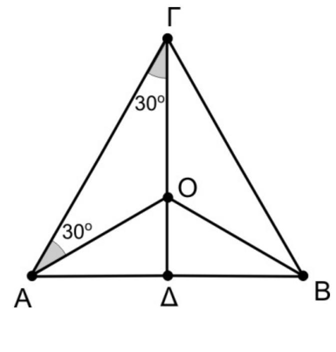
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}\\&=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2\\&=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2\\&=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $O\hat{A}\Gamma=O\hat{\Gamma}A=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

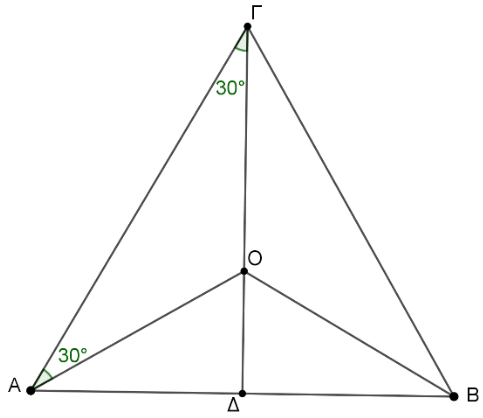


Λύση
(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma A=\Gamma B$ και $OA=OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ Επομένως

$$\mathrm{\Delta\hat{A}O} = \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} - \mathrm{O\hat{A}\Gamma} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \mathrm{O\hat{A}\Gamma},$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot \mathrm{B}=80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A}=9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A}=x(9\mathrm{B})=9x\mathrm{B}=9\cdot 40=360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360+80=440$ τ.μ.

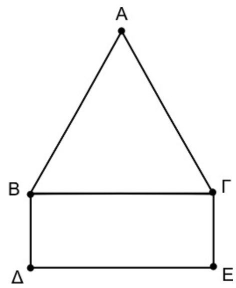
Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.
Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

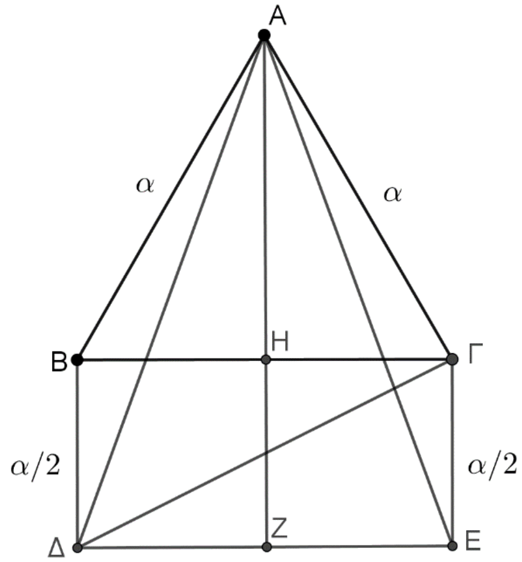
πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.
Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\mathrm{B}\Delta = \frac{\alpha}{2}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$.
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.



Λύση
(α) (1^{ος} τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = \alpha$ και $B\Delta = \Gamma E = \dfrac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}\Delta = 60^\circ + 90^\circ = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}E\,.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $A\Delta = AE$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z),$$

όπου

$$(ABH) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (B\Delta ZH) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z) = \frac{\alpha^2}{8}\,.$$

Έχουμε επίσης $(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta)$. Όμως είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},(AB\Delta) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση
Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση
Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

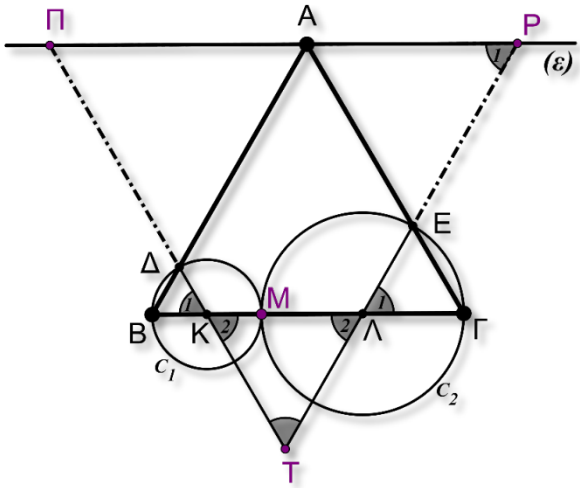
Πρόβλημα 4

Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο $Μ$ (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο $Κ$ του $ΜΒ$ και ακτίνα $ΚΒ$) τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠΡΤ$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΤΚΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $ΚΔ, ΚΒ$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$ΚΛ = ΜΚ + ΜΛ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $AP \mathbin{/\!/} B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60°$).
Το τετράπλευρο $AP\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$).
Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $TP\Pi$ είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση
Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

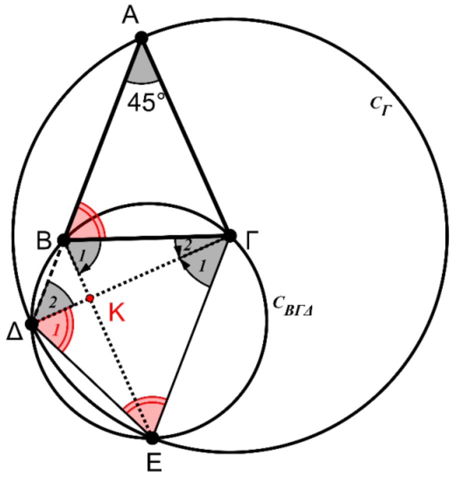
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$
$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση
Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45^\circ \quad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67,5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.

Άρα ΒΔ // ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ = ΓΕ (ακτίνες του $C_Γ$). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα $\widehat{B}_1 = \Gamma_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5°$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1 = 45°$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2 = 22{,}5°$ και κατά συνέπεια $\widehat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5° + 22{,}5° = 90°$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right)$$

$$= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right) - \left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right]$$

$$= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Επομένως έχουμε

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu+1 \geq 3$ και $\nu^4-\nu+1=\nu\left(\nu^3-1\right)+1 \geq 2\cdot 7+1=15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2 = x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy \overset{(1)}{=} (x+y)^2-4(x+y)$.

Ισχύει ότι $(x+y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x+y)$, άρα $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$, οπότε $x+y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x+y=t$ και τότε $d^2 = t^2-4t = (t-2)^2-4 \overset{(2)}{\geq} (8-2)^2-4 = 32$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a)=0 \text{ και } f\left(f(x)\right)=xf(x)+a, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση
Θέτοντας $x=a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f\left(f(a)\right)=af(a)+a \Rightarrow f(0)=a.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f\left(f(0)\right)=0\cdot f(0)+a \overset{(1)}{\Rightarrow} f(a)=a,$

οπότε από τη σχέση $f(a)=0$ έπεται ότι $a=0$.

Για $a=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f\left(f(x)\right)=xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c,\ c\in\mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f\left(x^c\right)=x\cdot x^c \Rightarrow \left(x^c\right)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1} \Rightarrow c^2=c+1 \Rightarrow c^2-c-1=0 \Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν } x\le 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0. \end{cases}$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7+x^6+x^5+1=0\ .$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7+x^6+x^5+1 &= x^5\left(x^2+1\right)+\left(\left(x^2\right)^3+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right) \\ &=\left(x^2+1\right)\left(x^5+x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^4(x+1)-(x+1)(x-1)\right] \\ &=\left(x^2+1\right)(x+1)\left(x^4-x+1\right). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$\alpha^4-\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha\left(\alpha^3-1\right)+1=0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)+1=0\Leftrightarrow f(\alpha)+1=0$.

Όμως για $\alpha\le 0$ ή $\alpha\ge 1$ η παράσταση $f(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f(\alpha)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0, -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x+1)\left(x^4-x+1\right)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ με $\hat{A}=36°$. Ο κύκλος $C_1(Γ,ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η $ΔΓ$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{A}=\hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΕ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

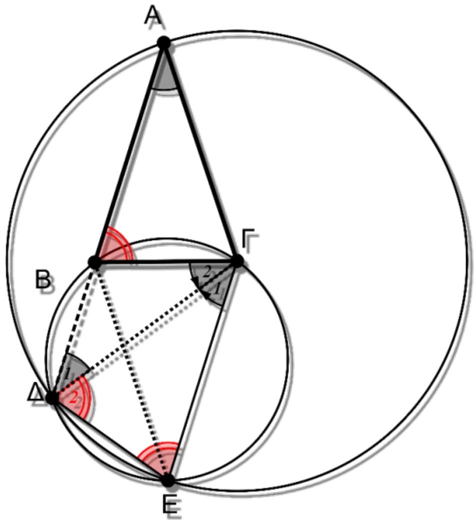
$$\hat{E}=\hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E}=\hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{A}=\hat{Δ}_1=\hat{Γ}_1=36°$.

Άρα $ΒΔ \,/\!\!/\, ΓΕ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ($ΒΕ$ και $ΓΔ$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία $Ε$ και $Α$ ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε η $ΑΕ$ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $B\Delta \mathbin{/\!/} \Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}=B\hat{\Gamma}E=72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.
Επειδή όμως $\hat{A}=\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}_1=36°$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη $B\Gamma, \Delta\Gamma$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $\Delta\Gamma$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9>8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9}>9^{9^8}\Leftrightarrow\left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}}>\left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}}\Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}}>9\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}}>3\Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8}>3\Leftrightarrow 4^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8}>3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8>1\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24}>3^{16}\Leftrightarrow 2^{25}>3^{15}\Leftrightarrow 2^5>3^3$, που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9>9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right)>\ln\left(9^{9^8}\ln 8\right)\Leftrightarrow 8^9\ln 8+\ln(\ln 9)>9^8\ln 9+\ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9)>\ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9\ln 8 > 9^8\ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.

ΘΕΜΑΤΑ 2018

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση
1ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$
$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+10\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{10\beta-11\beta}{\beta}\right)=\left(\frac{12\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{-\beta}{\beta}\right)$$
$$=\frac{12}{1}\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500+18=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

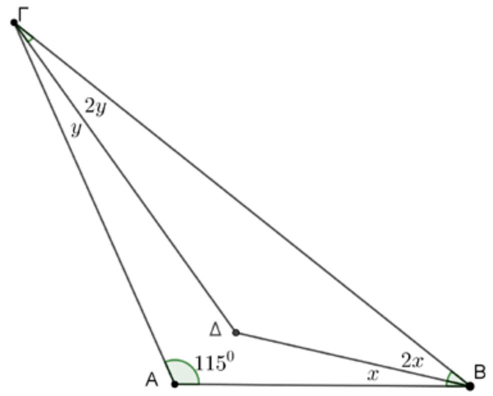
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι , οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου Α που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$. τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3\left(x + y\right) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\left(x + y\right) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40\Leftrightarrow\frac{12x}{15}=24\Leftrightarrow 12x=360\Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma=-\frac{18}{2^3}$, $\delta=\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$, $\delta=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64}\ ,\ \gamma^2+\delta^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8}=-\frac{81}{16}-\frac{1}{64}=-\frac{325}{64}\Rightarrow\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\frac{325}{64}\cdot\frac{325}{64}-\left(-\frac{325}{64}\right)^2=0$.

2ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=$$

$$= \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta - \beta^2\delta^2 =$$
$$= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)^2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα α εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

Η μία ομάδα = α εργάτες τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας

Πόσοι εργάτες (έστω x) τελειώνουν 15 έργα σε 5 ημέρες;

Επειδή τα ποσά**: εργάτες – έργο, είναι ανάλογα**, ενώ τα ποσά : **εργάτες – ημέρες , είναι αντιστρόφως ανάλογα**, έχουμε ότι:

$$x = \alpha \cdot \frac{15}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{5} = \alpha \cdot 60 \cdot \frac{1}{15} = 4\alpha\ .$$

Επομένως θα χρειαστούν 4 τέτοιες ομάδες εργατών.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c = \alpha x^2 + (b+4a)x + 4a + 3b + c$$

Επομένως

$$P(x) - P(y) = a(x^2 - y^2) + (b+4a)(x-y) = (x-y)(a(x+y) + b + 4a),$$

οπότε

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = \frac{(x-y)(a(x+y)+b+4a)}{x-y} = a(x+y)+b+4a$$

που είναι θετικός ακέραιος, αφού οι αριθμοί a, b, c, x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

(β) Από το πρώτο ερώτημα, για $x = 2018,\ y = 8$ έχουμε ότι

$$\frac{P(2018) - P(8)}{2010} = \kappa \ \text{ακέραιος},$$

δηλαδή

$$P(2018) - P(8) = 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \Rightarrow P(2018) = P(8) + 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος}$$

Όμως το $2010 = 3 \cdot 670$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $P(8)$ από την υπόθεση, οπότε και το $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\widehat{\text{Α}} = 72°$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

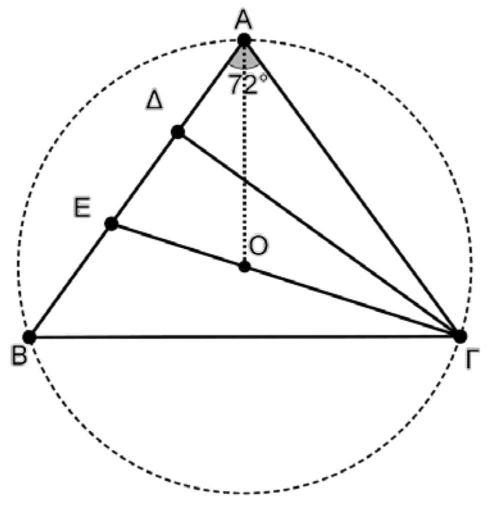
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Λύση

Θεωρούμε το ύψος από την κορυφή Α που τέμνει τη ΓΕ στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ότι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Το ύψος από την κορυφή Α είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ, άρα το Ο ως σημείο της θα ισαπέχει από τα Β,Γ, δηλαδή ΟΒ=ΟΓ.

Επιπλέον το Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ, το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\text{ΓΕΑ}} = 72°$, οπότε $\widehat{\text{ΕΓΑ}} = 36°$ (1). Επειδή όμως η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, θα ισχύει ότι $\widehat{\text{ΟΑΓ}} = 36°$, οπότε λόγω της (1) θα ισχύει ΟΑ = ΟΓ.



Σχήμα 2

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x+y\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^4+y^4\right) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}\,, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι:

$$xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2}\ .$$

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2\cdot\frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.
Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x+y,\ xy \in \mathbb{Z}$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right) - xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z},\ \text{αφού}\ \ x^2+y^2,\ x+y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A} = \kappa\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\left(\kappa+3\right)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.
(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.
(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \kappa\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\left(\kappa+3\right) = \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\\ &= \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa^2+3\kappa+2\right) = \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa(\kappa+3)+2\right)\end{aligned}$$

Επομένως ο Α ισούται με το γινόμενο των ακεραίων $\kappa\left(\kappa+3\right)$, $\kappa\left(\kappa+3\right)+2$ οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και επιπλέον είναι άρτιοι, αφού στο γινόμενο $\kappa\left(\kappa+3\right)$ ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
(β) Έστω $\kappa\left(\kappa+3\right) = 2\mu$, όπου μ θετικός ακέραιος. Τότε $\mathrm{A} = 2\mu\left(2\mu+2\right) = 4\mu\left(\mu+1\right)$

Αν ήταν ο Α τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε θα είχαμε $\mathrm{A} = 4\mu(\mu+1) = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$, όπου
λ ακέραιος. Θα είχαμε τότε $\mu(\mu+1) = \lambda^2$, όπου μ θετικός ακέραιος και λ ακέραιος, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$$\mu^2 < \mu^2 + \mu = \mu(\mu+1) < (\mu+1)^2,$$

δηλαδή ο $\mu(\mu+1)$ βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Πρόβλημα 3

Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, ύψος ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Λύση

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και θέτουμε $\mathrm{AB} = \alpha,\ \Gamma\Delta = \beta$ και φέρουμε το ύψος $\mathrm{AE} = 6$. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι ΒΓ=ΑΔ. Όμως $\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Delta} = 4\sqrt{10}$, οπότε $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = 2\sqrt{10}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ παίρνουμε

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{E\Delta}^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}^2 = 40 - 36 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = 2 \qquad (1)$$

Επιπλέον από τον τύπο για το εμβαδό του τραπεζίου έχουμε:

$$\mathrm{E} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{A\Delta}}{2} \Rightarrow 72 = \frac{(\alpha+\beta)\cdot 6}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = 24 \qquad (2)$$

Αν τώρα φέρουμε την κάθετη από το Ο στις βάσεις που τις τέμνει στα μέσα τους Ν και Μ, τότε

$$\mathrm{E\Delta} = \mathrm{M\Delta} - \mathrm{ME} = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta - \alpha = 4 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha = 10,\ \beta = 14$.

Αν τέλος ονομάσουμε $\mathrm{OM} = x,\ \mathrm{ON} = y$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + 49 = R^2 \qquad (4)$$

και

$$y^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow y^2 + 25 = R^2 \Rightarrow (6-x)^2 + 25 = R^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 + 25 = R^2 \Rightarrow 61 - 12x = R^2 - x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x = 12 \Rightarrow x = 1$, οπότε από την (4) έχουμε ότι $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

(β) Αν το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow x^2+49=R^2 \qquad (4)$$

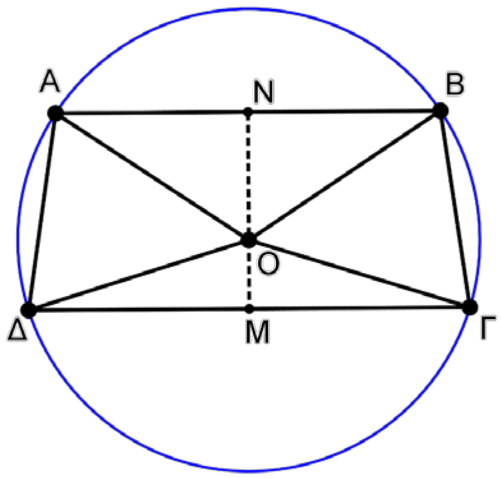
και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow y^2+25=R^2 \Rightarrow (6+x)^2+25=R^2 \Rightarrow$$

$$x^2+12x+36+25=R^2 \Rightarrow 61+12x=R^2-x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x+12=0$, άτοπο.

Επομένως υπάρχει μόνο μία δυνατή περίπτωση στην οποία $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα έναν τετραψήφιο x τέτοιον, ώστε ο $2007x$ να λήγει σε 2008. Γράφουμε $2007x=2000x+7x$ οπότε αφού ο $2000x$ λήγει σε 000, αναζητούμε x ώστε ο $7x$ να λήγει σε 008.

Για να λήγει ο $7x$ σε 008, πρέπει ο x να λήγει σε 4. Τότε έχουμε δύο κρατούμενα, οπότε το προτελευταίο ψηφίο του x πρέπει να είναι 4. Έχουμε τρία κρατούμενα, οπότε το τρίτο από το τέλος ψηφίο του x πρέπει να είναι 1. Επομένως ο x λήγει σε 144.

Αναζητούμε λοιπόν τετραψήφιο $\overline{a144}$ τέτοιον, ώστε να πολλαπλασιάζεται με τον 2007 και ο αριθμός που προκύπτει να λήγει σε 2008. Ο $2000\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος το τελευταίο ψηφίο του $2a$. Επιπλέον ο $7\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $7a+1$(γιατί έχουμε και ένα κρατούμενο). Οπότε ο $2a+(7a+1)=9a+1$, πρέπει να λήγει σε 2, οπότε πρέπει $a=9$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9144. Πράγματι, το γινόμενο $2007\cdot 9144$ ισούται με 18352008 που λήγει σε 2008.

Αν τώρα πάρουμε έναν οποιαδήποτε εξαψήφιο $\overline{\beta\gamma 9144}$ και τον πολλαπλασιάσουμε με τον 2007, τα τέσσερα τελευταία ψηφία του γινομένου δεν επηρεάζονται άρα λήγει και αυτός σε 2008. Για το διψήφιο τμήμα $\overline{\beta\gamma}$ έχουμε επιλογές από 10 έως 99. Επομένως έχουμε συνολικά 90 επιλογές, άρα έχουμε 90 εξαψήφιους με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή, έχουμε ότι:

$$x^5 + y^5 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - x^4 y - xy^4 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - xy\left(x^3 + y^3\right),$$

και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}\,, \tag{2}$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι: $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2 \cdot \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.

Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right) - xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2 + y^2,\ x + y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

Λύση

Επειδή $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0,\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\left(x^2+x+1\right)>\left(x^2+2x+3\right)(x+a)\Leftrightarrow x^3+x^2+x>x^3+2x^2+3x+ax^2+2ax+3a$$
$$\Leftrightarrow (a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0. \qquad (1)$$

Για $a=-1$, η ανίσωση (1) γίνεται: $-3<0$ και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $a\neq -1$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta=4(a+1)^2-12a(a+1)=4(a+1)(a+1-3a)=-4(a+1)(2a-1).$$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$a+1<0 \text{ και } -4(a+1)(2a-1)<0\Leftrightarrow a+1<0 \text{ και } 4(a+1)(2a-1)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-1 \text{ και } a<-1 \text{ ή } a>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a<-1.$$

Επομένως το ζητούμενο αληθεύει για κάθε $a\leq -1.$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β ώστε $\beta=2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N}\geq 4$.

Λύση
Έστω $d_1,d_2,...,d_N$ οι διάμετροι των κύκλων. Τότε το μήκος του πρώτου κύκλου είναι $2\pi R_1=\pi d_1$, το μήκος του δεύτερου $2\pi R_2=\pi d_2$, το μήκος του N-οστού είναι $2\pi R_{\mathrm{N}}=\pi d_{\mathrm{N}}$. Αφού το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου, θα έχουμε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}=2(2\alpha+2\beta)=4(\alpha+\beta)=4(\alpha+2\alpha)=12\alpha \qquad (1).$$

Για να χωράει όμως κάθε κύκλος στο ορθογώνιο θα πρέπει η διάμετρός του να είναι το πολύ όσο η μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου, δηλαδή $d_1\leq\alpha,d_2\leq\alpha,...,d_N\leq\alpha$, οπότε

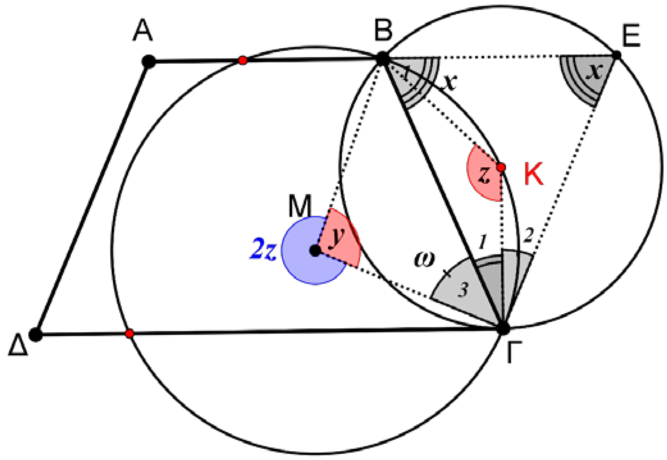
$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}\leq\alpha\pi+...+\alpha\pi=\mathrm{N}\alpha\pi \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\mathrm{N}\alpha\pi\geq 12\alpha\Leftrightarrow \mathrm{N}\geq\frac{12}{\pi}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, $\mathrm{N}\geq 4$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(AB \parallel ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ=2AB$. Αν E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B και K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου

$ΒΓΕ$ εφάπτεται στην $ΓΔ$ στο σημείο $Γ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΚ$ εφάπτεται στην $ΓΕ$ στο σημείο $Γ$.

Λύση



Σχήμα 4

Έστω $Μ$ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΚ$.

Θα αποδείξουμε ότι $ΚΓ \perp ΓΔ$ και $ΜΓ \perp ΓΕ$.

Εφόσον $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$, θα ισχύει $ΑΕ = 2ΑΒ$.

Άρα $ΑΕ = ΔΓ = 2ΑΒ$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Άρα $ΓΕ = ΑΔ = ΒΓ$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισοσκελές ($ΓΕ = ΒΓ$) οπότε το περίκεντρό του θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της $ΒΕ$ που είναι η $ΓΚ$ (διότι $Γ, Κ$ ισαπέχουν από τα άκρα του $ΒΕ$).

Άρα $ΚΓ \perp ΒΕ \parallel ΓΔ \Rightarrow ΚΓ \perp ΓΔ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΒΓΕ$ έχουμε: $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - 2\hat{x}$.

Η γωνία $Β\hat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $Β\hat{Ε}Γ = \hat{x}$ (στο περιγεγραμμένο κύκλο του ισοσκελούς τριγώνου $ΒΓΕ$), άρα $\hat{z} = 2\hat{x}$ και κατά συνέπεια $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - \hat{z}$.

Η γωνία $Β\hat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΒΚΓ$ και η μη κυρτή γωνία $Β\hat{Μ}Γ = 2\hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

Αν θέσουμε $\hat{Γ}_3 = \hat{\omega}$, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $ΜΒΓ$ έχουμε:

$2\hat{\omega} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{\omega} + 360° - 2\hat{z} = 180° \Leftrightarrow \hat{\omega} = \hat{z} - 90°$.

Άρα $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = 180° - \hat{z} + \hat{z} - 90° = 90°$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^4+4\right),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Λύση

Επειδή $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+4x^2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left(x^2+2x+2\right)=(a+1)\left(x^2-2x+2\right)$$

(αφού $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2+2(a-1)x+2(a-1)=(a+1)x^2-2(a+1)x+2(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4ax+4=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4a^2-8=4\left(a^2-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow |a|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Επομένως, αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα:

- Αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x=a\pm\sqrt{a^2-2}$.
- Αν $a=\pm\sqrt{2}$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x=a=\pm\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right),\ x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T)=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε $f(x+T)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε για $x=0$ προκύπτει ότι

$$f(T)=f(0)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu T+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=3 \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μπορεί να αληθεύει μόνον όταν είναι:

$$\sigma\upsilon\nu T=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi,\ T\sqrt{3}=2\mu\pi,\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}.$$

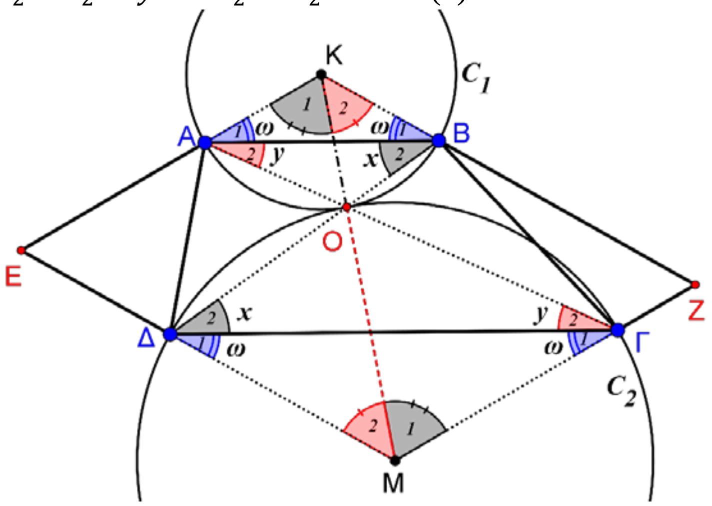
Από τις ισότητες $T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi$ λαμβάνουμε με διαίρεση κατά μέλη ότι $\dfrac{\lambda}{\kappa}=\sqrt{2}$, που είναι άτοπο γιατί ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός $\dfrac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \mathbin{/\!/} ΓΔ \text{ και } ΑΒ < ΓΔ)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $ΟΔΓ$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $MΔ$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $MΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Από την παραλληλία των βάσεων του τραπεζίου, προκύπτουν (ως εντός εναλλάξ) οι ισότητες γωνιών: $\hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = \hat{y}$ και $\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{x}$ (1).



Σχήμα 5

Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{B}_2$ (στο κύκλο C_1) οπότε:

$$\widehat{K}_1 = 2\hat{B}_2 = 2\hat{x}.$$

Η γωνία $\widehat{M}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{Δ}_2$ (στο κύκλο C_2) οπότε:

$$\widehat{M}_1 = 2\hat{Δ}_2 = 2\hat{x}.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε: $\widehat{K}_1 = \widehat{M}_1 = 2\hat{x}$ (2).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\widehat{K}_2 = \widehat{M}_2 = 2\hat{y}$ (3).

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAB έχουμε:

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $MΓΔ$ έχουμε:

$$\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το τρίγωνο AOK έχουμε: $A\hat{O}K = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από το τρίγωνο $ΓOM$ έχουμε: $Γ\hat{O}M = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από τις τελευταίες ισότητες έχουμε: $A\hat{O}K = Γ\hat{O}M$. Άρα τα σημεία O, K, M είναι συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$ και την παραλληλία $AB \mathbin{/\!/} ΓΔ$ συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

Πρόβλημα 4

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p, q, r με $p > q > r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο. Τότε γράφουμε:

$$\sqrt[3]{rp} = a, \sqrt[3]{2018pq} = a + kd, \sqrt[3]{2018qr} = a + md\ ,\ m, k \in Z$$

Αντικαθιστώντας το a παίρνουμε τις σχέσεις

$$\sqrt[3]{2018pq} = \sqrt[3]{rp} + kd \text{ και } \sqrt[3]{2018qr} = \sqrt[3]{rp} + md\ ,$$

οπότε απαλείφοντας το d παίρνουμε:

$$m\sqrt[3]{2018pq} - k\sqrt[3]{2018qr} = (m-k)\sqrt[3]{rp}\ . \qquad (1)$$

Υψώνοντας στον κύβο την (1) παίρνουμε:

$$2018m^3 pq - 2018k^3 qr + 3mk\sqrt[3]{2018^2 q^2 pr}(m\sqrt[3]{2018pq} - k\sqrt[3]{2018qr}) = (m-k)^3 rp$$

Η τελευταία λόγω της (1) γράφεται:

$$2018m^3 pq - 2018k^3 qr + 3mk(m-k)\sqrt[3]{2018^2 q^2 p^2 r^2} = (m-k)^3 rp\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $(2018pqr)^2$ πρέπει να είναι τέλειος κύβος. Όμως στο $2018pqr = 2\cdot 1009\cdot pqr$ κάθε πρώτος μπορεί να εμφανιστεί σε δύναμη το πολύ 2, αφού $p > q > r$, άρα δεν είναι τέλειος κύβος.

ΘΕΜΑΤΑ 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση
1ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=(12-10)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(3+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-10\right)\cdot\left(1-3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(3+3^2-10\right)\cdot\left(1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}\right)=(3+9-10)\cdot\left(1-\frac{3}{9}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot(+5)=10.$$

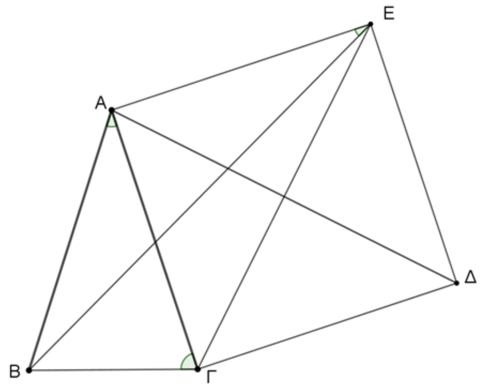
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Γ} = 2 \cdot \hat{Α}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $Α\hat{Ε}Β$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Β\hat{Ε}Γ$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Λύση

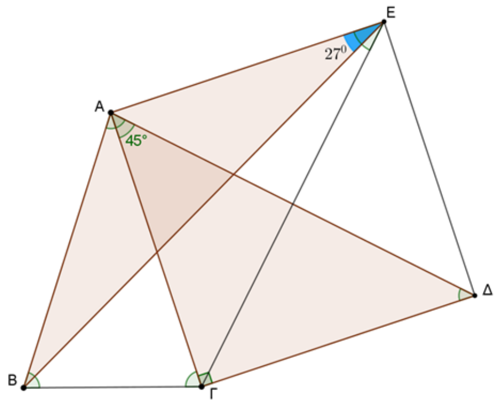
(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ έπεται ότι $\hat{Γ} = \hat{Β} = 2 \cdot \hat{Α}$, οπότε από τη σχέση $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{Α} + 2\hat{Α} + 2\hat{Α} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{Α} = 180^\circ \Rightarrow \hat{Α} = 36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $ΑΒ = ΑΓ = ΑΕ$ και ισχύει ότι

$$Β\hat{Α}Ε = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Ε = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ,$$

οπότε θα είναι $Α\hat{Ε}Β = \dfrac{180^\circ - Β\hat{Α}Ε}{2} = \dfrac{180^\circ - 126^\circ}{2} = 27^\circ$.



Σχήμα 1

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $Α\hat{Γ}Δ = 90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $Γ\hat{Α}Δ = 45^\circ$. Επομένως είναι

$$Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Δ = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $Γ\hat{Α}Ε = 90^\circ$ προκύπτει ότι: $Α\hat{Ε}Γ = 45^\circ$, οπότε $Β\hat{Ε}Γ = Α\hat{Ε}Γ - Α\hat{Ε}Β = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$.

Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. **Σημείωση**: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα. Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right) \Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728 \Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364 \Rightarrow 3\alpha+4=364 \Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A=55789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία 2, $4=2\cdot 2$, $9=3\cdot 3$ ή 2, $6=2\cdot 3$, $6=2\cdot 3$. Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma ,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$, $\beta = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma \\
&= \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{8^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} - \frac{3}{4\cdot 8^2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{\left(2^3\right)^3} + \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{3}{2^2\cdot\left(2^3\right)^2} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^9} - \frac{3}{2^2\cdot 2^6} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{-1+4-3}{2^8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 63000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $63000 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο ακέραιος 222335557 έχει γινόμενο ψηφίων 630000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα πρέπει να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ και το $9 = 3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία 2, $4 = 2\cdot 2$, $9 = 3\cdot 3$ ή 2, $6 = 2\cdot 3$, $6 = 2\cdot 3$.

Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο **Α = 555789** ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 63000.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 2455599 ή 2555669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 555789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **1555789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι βρήκαμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο Α του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000, τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος από τον Α που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα. Αυτός προκύπτει από τον Α με τοποθέτηση στο τέλος του ενός επιπλέον ψηφίου ίσου με το 1. Αυτό είναι άτοπο, από την υπόθεση για τον ακέραιο Α.

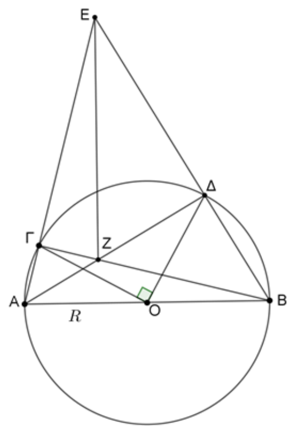
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $AB = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $EZ = 2R$.

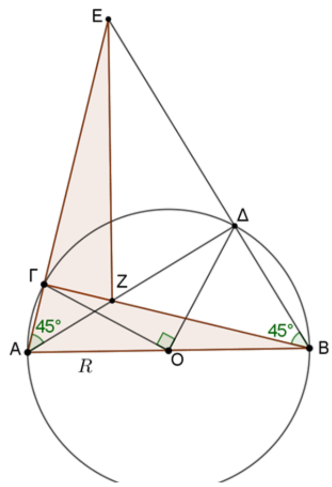
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στο οποίο βαίνει και η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma Z}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$. Επειδή $\mathrm{A\hat{\Gamma}E} = 180^\circ - \mathrm{A\Gamma B} = 90^\circ$ και $\mathrm{\Gamma\hat{B}E} = \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$.
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΖ έχουν τις δύο κάθετες πλευρές του ίσες μία προς μία, δηλαδή μία κάθετη πλευρά ίση $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 2R$.

Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Λύση
Επειδή τα δυνατά αθροίσματα των τριάδων είναι μόνο δύο, το 15 και το 13 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις κάρτες με διαφορετικούς αριθμούς.
Πράγματι, αν υπήρχαν τρεις κάρτες με διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς , έστω x, y, z και οι άλλες δύο κάρτες είχαν τους αριθμούς α και β, τότε θα είχαμε συνολικά τρία διαφορετικά αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta+x, \alpha+\beta+y, \alpha+\beta+z,$ το οποίο είναι αντίθετο στην υπόθεση.
Επίσης συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κάρτες να έχουν τον ίδιο αριθμό, γιατί τότε θα είχαμε ένα μόνο δυνατό άθροισμα τριάδων.
Επομένως πάνω στις κάρτες υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, έστω x, y , με $x > y$. Τότε τα δυνατά αθροίσματα τριάδων, διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, είναι:

$$x+x+x = 3x > x+x+y = 2x+y > x+y+y = x+2y > y+y+y = 3y.$$

Επειδή τα δυνατά αθροίσματα είναι μόνο δύο, παρατηρούμε ότι ο αριθμός y πρέπει να υπάρχει μία μόνο φορά, γιατί:

- Αν το y υπάρχει σε τέσσερις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει μόνο σε μία κάρτα και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $x+2y=15,\ 3y=13$, που δεν δίνει ακέραιες τιμές για τα x, y.
- Αν το y υπάρχει σε τρεις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε δύο κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $2x+y > x+2y > 3y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.
- Αν το y υπάρχει σε δύο κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε τρεις κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $3x > 2x+y > x+2y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.

Επομένως, τα δυνατά αθροίσματα είναι τα :

$$x+x+x = 3x,\ x+x+y = 2x+y, \text{ με } 3x > x+2y,$$

οπότε έχουμε:

$$3x = 15,\ 2x+y = 13 \Leftrightarrow x = 5,\ y = 3.$$

Επομένως, μία κάρτα έχει τον αριθμό 3 και οι υπόλοιπες τέσσερις έχουν τον αριθμό 5.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$$

$$\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ ισούται με 1, έπεται ότι

οι αριθμοί $\rho_1=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (ή με αντίστροφη σειρά) είναι οι δύο

ρίζες της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ με άθροισμα $\rho_1+\rho_2=3$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n,m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A=2(n+1)-3(m+2)+7\,.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}.$$

Λύση

Οι θετικοί διαιρέτες του 50 είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10, 25, 50, οπότε ο $3n-2$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $3n$ είναι κάποιος από τους 3, 4, 7, 12, 27, 52 οπότε οι πιθανές τιμές του n, αφού είναι θετικός ακέραιος, είναι 1, 4, 9.

Οι θετικοί διαιρέτες του $243=3^5$ είναι οι αριθμοί 1, 3, 9, 27, 81, 243 οπότε ο $4m-1$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $4m$ είναι κάποιος από τους 2, 4, 10, 28, 82, 244, οπότε οι πιθανές τιμές του m είναι 1, 7, 61.

(α) Η παράσταση $A = 2(n+1) - 3(m+2) + 7 = 2n - 3m + 3$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή του. Τότε είναι: $\max A = 2\cdot 9 - 3\cdot 1 + 3 = 18$.

(β) Έχουμε ότι $B = \dfrac{162}{n^2} - \dfrac{m^2}{3721}$, οπότε η παράσταση B παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του. Τότε έχουμε:

$$\min B = \frac{162}{9^2} - \frac{61^2}{3721} = \frac{162}{81} - \frac{3721}{3721} = 2 - 1 = 1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy} = \frac{3z+5y}{yz} = \frac{5x+z}{zx} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2}.$$

Λύση

Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = \frac{5}{z} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{z},\ \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = 3x,\ z = 5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{3z+5y}{yz} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2} \Leftrightarrow \frac{15x+15x}{15x^2} = \frac{140}{x^2+9x^2+25x^2} \Leftrightarrow \frac{30x}{15x^2} = \frac{140}{35x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{140}{35x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 4x \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 2.$$

Άρα έχουμε: $x = 2,\ y = 6,\ z = 10$.

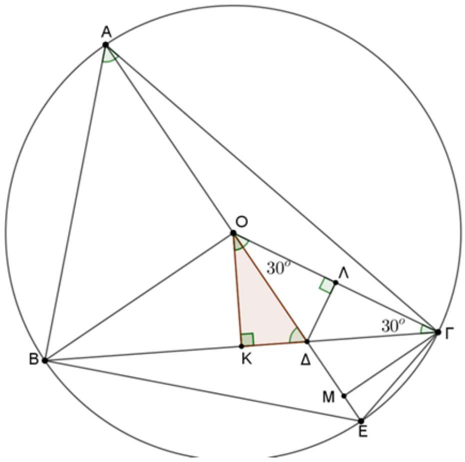
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C(\mathrm{O}, R)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta} = 2\cdot \mathrm{\Delta\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma} = 30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Φέρουμε την $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε το Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $\mathrm{K\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{1} = \frac{\mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma}{2+1} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{3} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{K\Gamma} - \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$.

Επίσης $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = 90^\circ - \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε, αν φέρουμε $\Delta\Lambda \perp \mathrm{O\Gamma}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ με $\Delta\hat{\Gamma}\Lambda = 30^\circ$ προκύπτει ότι η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή : $\Delta\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο τη γωνίας των 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ, οπότε έχουμε: $\Delta\Lambda = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΛΔ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΟΔ κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{K\Delta} = \Lambda\Delta$), οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda$ και αφού $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 60^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 30^\circ \Rightarrow \Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$.

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma} = R$, και την εξωτερική του γωνία $\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Επομένως θα είναι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ύψος την ακτίνα ΒΟ. Από το τρίγωνο ΟΚΓ προκύπτει η σχέση της ακτίνας R με την πλευρά α, αφού είναι $\mathrm{OK} = \frac{R}{2}$ και

$$\mathrm{O\Gamma}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{K\Gamma}^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \alpha = R\sqrt{3}.$$

Το ύψος ΓΜ του τριγώνου ΑΓΕ παρατηρούμε προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΜ με $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$ ότι είναι $\mathrm{\Gamma M} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2}$.

Για το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ έχουμε:

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{AB E\Gamma})} = \mathrm{E}_{(\mathrm{ABE})} + \mathrm{E}_{(\mathrm{AE\Gamma})} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AE}\cdot\mathrm{BO} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AE}\cdot\Gamma\mathrm{M} = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R + \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\left||x+8|-3x\right| = \frac{x+7}{6}$.

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$|x+8-3x| = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow |8-2x| = \frac{x+7}{6} \qquad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7 \leq x < 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 8-2x = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 48-12x = x+7 \Leftrightarrow 13x = 41 \Leftrightarrow x = \frac{41}{13} < 4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $[-7,4)$.

(β) $x \geq 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 2x-8 = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 12x-48 = x+7 \Leftrightarrow 11x = 55 \Leftrightarrow x = 5 > 4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y = y+3z = z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των x, y, z για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y = y+3z = z+5x = t$, τότε έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ y+3z=t \\ z+5x=t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ -2y-6z=-2t \\ 6z+30x=6t \end{array}\right\} \Rightarrow 31x = 5t \Rightarrow x = \frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y = t \Rightarrow \frac{5t}{31} + 2y = t \Rightarrow 2y = \frac{26t}{31} \Rightarrow y = \frac{13t}{31},$$

$$z+5x = t \Rightarrow z + \frac{25t}{31} = t \Rightarrow z = \frac{6t}{31}.$$

Επομένως έχουμε: $\frac{x}{y}=\frac{5}{13},\ \frac{z}{y}=\frac{6}{13}$.

(β) Εκφράζουμε την παράσταση συναρτήσει της μεταβλητής y , οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}y\right)^2+y^2+\left(\frac{6}{13}y\right)^2-2y-144=\frac{230}{169}y^2-2y-144=f(y),$$

Επειδή ο συντελεστής του y^2 είναι θετικός, η παράσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $y=-\frac{-2}{2\cdot\frac{230}{169}}=\frac{169}{230}$. Τότε είναι $x=\frac{5}{13}y=\frac{5}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{13}{46},\quad z=\frac{6}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{78}{230}=\frac{39}{115}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y):-\pi\le x\le\pi,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0\Leftrightarrow x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9\left[\sigma\upsilon\nu^2(xy)+\eta\mu^2(xy)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x+3\sigma\upsilon\nu(xy)\right]^2+\left[3\eta\mu(xy)\right]^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0\\3\eta\mu(xy)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\cdot(\pm1)=0\\\eta\mu(xy)=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-3\\\eta\mu(-3y)=0\end{matrix}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{matrix}x=3\\\eta\mu(3y)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-3\\3y=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{matrix}x=3\\3y=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-3\\y=\frac{\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{matrix}x=3\\y=\frac{\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(-3,\frac{\kappa\pi}{3}\right),\kappa\in\mathbb{Z}\ \acute{\eta}\ (x,y)=\left(3,\frac{\kappa\pi}{3}\right),\kappa\in\mathbb{Z}$$

Για να ανήκουν τα παραπάνω ζεύγη στο ορθογώνιο D πρέπει

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\kappa\pi}{3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{3}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\kappa\in\{-1,0,1\},$$

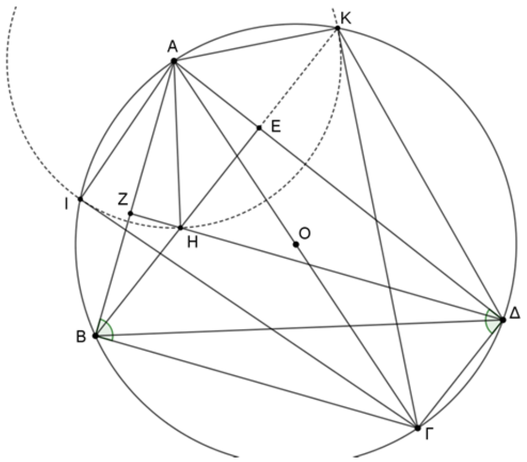
οπότε προκύπτουν τα ζεύγη:

$$\left(\pm3,-\frac{\pi}{3}\right),(\pm3,0),\left(\pm3,\frac{\pi}{3}\right).$$

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=90^\circ$.Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A},\mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}=\mathrm{B}\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα ΓΙΚ και ΓΚΑ είναι ορθογώνια, αφού η ΑΓ είναι διάμετρος και έχουν κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{AI} = \mathrm{AK}$, ως ακτίνες του κύκλου $C_2\left(\mathrm{A}, \mathrm{AH}\right)$. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και θα έχουν και $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K}$.

Επειδή η ΒΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Έχουμε επιπλέον ότι:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (γιατί ΓΖ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ).

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, οπότε τα σημεία Α, Η, Ε, Κ είναι συνευθειακά. Επειδή επιπλέον οι ευθείες ΒΚ και ΓΔ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ευθεία ΑΔ, έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C_1\left(\mathrm{O}, R\right)$ και άρα ισοσκελές. Επομένως οι διαγώνιοι του ΓΚ και ΒΔ είναι ίσες.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c,$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Λύση

Ο ακέραιος Α μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^3 \cdot 111 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = x \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 37 + \overline{abc} = \pi o\lambda.37 + \overline{abc},$$

για κάθε $x \in \{1, 2, ..., 9\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ισοδυναμία

$$37 \mid \mathrm{A} \Leftrightarrow 37 \mid \overline{abc}.$$

Όμως όλοι οι το πολύ τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με το 37 είναι της μορφής $37\kappa, \kappa \in \mathbb{Z},$ που ικανοποιούν τη σχέσεις $0 \leq 37\kappa \leq 999$. Έχουμε

$$0 \leq 37\kappa \leq 999, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa \leq 27, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως υπάρχουν 28 θετικοί ακέραιοι με τρία το πολύ ψηφία που διαιρούνται με το 37 και επειδή για το σχηματισμό των πρώτων τριών ψηφίων του Α υπάρχουν 9 δυνατές περιπτώσεις, προκύπτει ότι συνολικά υπάρχουν $9 \cdot 28 = 252$ θετικοί ακέραιοι της δεδομένης μορφής που διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |mx+4| + |mx-4|, m > 0$ και $y = 12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m > 0$.

Λύση

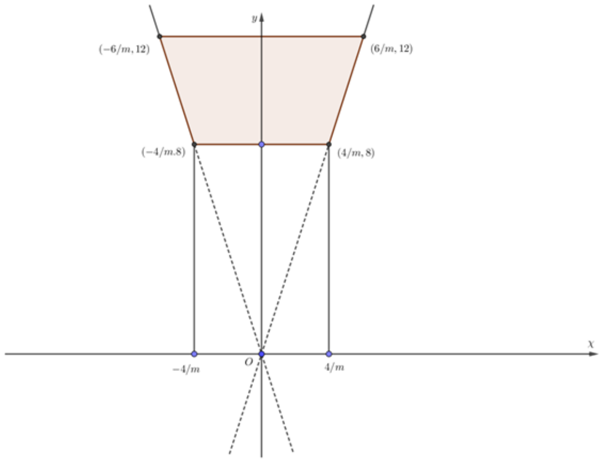
Η εξίσωση $y = |mx+4| + |mx-4|,\ m \in \mathbb{R}$, παίρνει τη μορφή

$$y = m \cdot \left| x + \frac{4}{m} \right| + m \cdot \left| x - \frac{4}{m} \right| = m \cdot \left(\left| x + \frac{4}{m} \right| + \left| x - \frac{4}{m} \right| \right), m > 0,$$

οπότε θεωρώντας την τιμή του x στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{4}{m} \right), \left[-\frac{4}{m}, \frac{4}{m} \right]$ και $\left[\frac{4}{m}, +\infty \right)$ έχουμε:

$$y = |mx+4| + |mx-4| = \begin{cases} -2mx, \ \alpha\nu \ x < -\frac{4}{m} \\ 8, \ \alpha\nu \ -\frac{4}{m} \le x \le \frac{4}{m} \\ 2mx, \quad \alpha\nu \ x > \frac{4}{m} \end{cases}, \quad m > 0.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι μία τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με σημεία αλλαγής κατεύθυνσης τα $\mathrm{A}\left(-\frac{4}{m}, 8 \right)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{4}{a}, 8 \right)$. Η εξίσωση $y = 12$ ορίζει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 12)$. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $\Gamma\left(\frac{6}{m}, 12 \right)$ και $\Delta\left(-\frac{6}{m}, 12 \right)$, οπότε ορίζουν το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις μήκους $\frac{8}{m}$ και $\frac{12}{m}$, ενώ το ύψος τους έχει μήκος 4. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{40}{m}$. Από την εξίσωση $\frac{40}{m} = 20 \Leftrightarrow m = 2$.



Σχήμα 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}$

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4,$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^4+8x^2-16\right)}=$$
$$=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^2-4\right)^2}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases}x^2-4, & \text{αν } |x|\geq 2\\ 4-x^2, & \text{αν } |x|<2\end{cases}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $x\leq -2$ ή $x\geq 2.$ Τότε η εξίσωση γίνεται:

$\mathrm{A}=\alpha x+4\Leftrightarrow x^2-4=\alpha x+4\Leftrightarrow x^2-\alpha x-8=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2+32>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},\ x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2},$ για κάθε τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$.

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},$ ισχύει ότι:

$$x_1\geq 2\Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq 4-\alpha\Leftrightarrow \alpha\geq -2,$$

γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε $\alpha\geq 4$, ενώ για $\alpha<4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq\left(4-\alpha\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2+32\geq\alpha^2-8\alpha+16\Leftrightarrow 8\alpha\geq -16\Leftrightarrow \alpha\geq -2.$$

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},$ ισχύει ότι:

$$x_1\leq -2\Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq -(4+\alpha)\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha \geq -4$, ενώ για $\alpha < -4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2 + 32 \leq (4+\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 32 \leq \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Leftrightarrow 8\alpha \geq 16 \Leftrightarrow \alpha \geq 2, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως η λύση x_1 είναι δεκτή για $\alpha \geq -2$ και ανήκει στο διάστημα $[+2, +\infty)$.

Για τη λύση $x_2 = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2 \geq 2 \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 32} \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + 32} \leq \alpha - 4 \text{ (αδύνατη),}$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha \leq 4$, ενώ για $\alpha > 4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2 + 32 \leq (\alpha - 4)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 32 \leq \alpha^2 - 8\alpha + 16 \Leftrightarrow 8\alpha \leq -16 \Leftrightarrow \alpha \leq -2, \text{ άτοπο.}$$

Για τη λύση $x_2 = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2 \leq -2 \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 32} \leq -4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + 32} \geq \alpha + 4,$$

η οποία αληθεύει για κάθε $\alpha \leq -4$, ενώ για $\alpha > -4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2 + 32 \geq (\alpha + 4)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 32 \geq \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Leftrightarrow 8\alpha \leq 16 \Leftrightarrow \alpha \leq 2.$$

Επομένως η λύση x_2 είναι δεκτή για $\alpha \leq 2$ και ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -2]$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{A} = \alpha x + 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει:

- δύο λύσεις στο σύνολο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$, όταν $-2 \leq \alpha \leq 2$
- μία λύση στο σύνολο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$, όταν $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Περίπτωση 2. $-2 < x < 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \alpha x + 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 = \alpha x + 4 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (δεκτή) ή } x = -\alpha.$$

Η λύση $x = -\alpha$ είναι δεκτή, εφόσον $-2 < -\alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$.

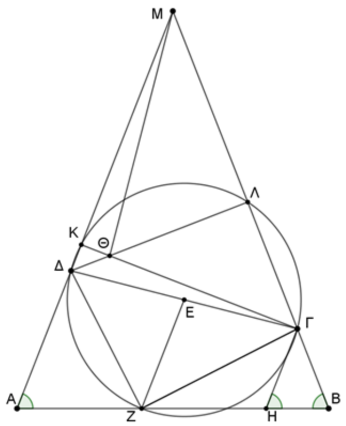
Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A} = \alpha x + 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει:

- τέσσερις πραγματικές λύσεις για $-2 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 0$
- τρεις πραγματικές λύσεις για $\alpha = 0$
- δύο πραγματικές λύσεις για $\alpha = -2$ ή $\alpha = 2$.
- μία πραγματική λύση για $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} < 90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} = \Delta\Gamma$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 6

Φέρουμε τη ΓΗ παράλληλη προς τη ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Τότε

$\Gamma\hat{H}B = \hat{A}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά στις παράλληλες ΓΗ και ΑΔ)

$\hat{A} = \hat{B}$ (από υπόθεση).

Επομένως είναι:

$$\Gamma\hat{H}B = \hat{B} \Rightarrow \Gamma H = \Gamma B \,. \qquad (1)$$

Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις, θα έχουμε

$$EZ = \frac{A\Delta + \Gamma H}{2} \overset{(1)}{=} \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

Επομένως στο τρίγωνο ΓΔΖ η διάμεσος ΖΕ ισούται με το μισό της πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Ζ, δηλαδή $\Gamma\hat{Z}\Delta = 90^\circ$.

Επιπλέον, η ΓΖ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΓΔΖ, οπότε

$$\Gamma K\Delta = 90^\circ = \Delta\hat{\Lambda}\Gamma \,.$$

Επομένως οι ΓΚ και ΔΛ είναι ύψη στο τρίγωνο ΜΔΓ, οπότε το σημείο τομής τους Θ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΔΓ. Άρα θα είναι $M\Theta \perp \Gamma\Delta$.

ΘΕΜΑΤΑ 2020

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής
$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta\ ,$$
όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Λύση
Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν τα άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως τα ψηφία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αρκεί να ικανοποιούν την εξίσωση:
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi o\lambda.9\,.$$
Επειδή $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έπεται ότι $10 \le \alpha+\beta+\gamma+\delta \le 30$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=18,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta \text{ ή } \alpha+\beta+\gamma+\delta=27,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$$
$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(1,2,6,9),(1,2,7,8),(1,3,5,9),(1,3,6,8).(1,4,5,8),(1,4,6,7),$$
$$(2,3,4,9),(2,3,5,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)\}$$
$$\text{ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(4,6,8,9),(5,6,7,9)\}.$$
Επιπλέον ένα ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε αρκεί ο ακέραιος $\overline{\gamma\delta}$ να είναι πολλαπλάσιος του 4. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις παραπάνω τετράδες στις :
$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,3,6,8) \text{ ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(3,4,5,6)\,.$$
Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι είναι οι: 13068, 34056.

Πρόβλημα 2
Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Λύση

Έστω ότι ο Γιάννης είχε α ευρώ μαζί του, οπότε η Μαρία θα είχε $600-\alpha$ ευρώ. Τότε ο Γιάννης ξόδεψε $\alpha\cdot\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}=\frac{\alpha}{9}$ ευρώ, ενώ η Μαρία ξόδεψε $\left(600-\alpha\right)\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{100}=\frac{600-\alpha}{7}$.
Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\alpha}{9}+\frac{600-\alpha}{7}=80\Leftrightarrow 7\alpha+9\left(600-\alpha\right)=5040$$
$$\Leftrightarrow 5400-2\alpha=5040\Leftrightarrow 2\alpha=360\Leftrightarrow \alpha=180.$$

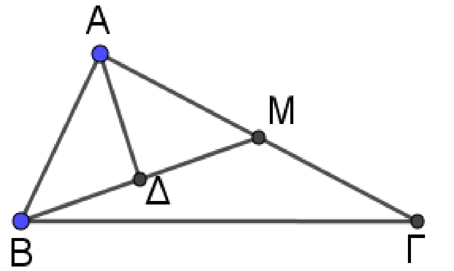
Άρα ο Γιάννης είχε μαζί του 180 ευρώ και η Μαρία είχε $600-180=420$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\text{AB}=\alpha\ cm$ και $\text{A}\Gamma=2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.

(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Έχουμε:

$$(\text{AB}\Gamma)=2(\text{ABM})\Rightarrow\frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{A}\Gamma=2\frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{AM}\Rightarrow\text{A}\Gamma=2\text{AM}.$$

Επομένως Μ μέσον ΑΓ και Ισχύει $\text{AM}=\frac{\text{A}\Gamma}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha\ cm$. Αφού και $\text{AB}=\alpha\ cm$, έχουμε $\text{AB}=\text{AM}$. Επομένως το σημείο Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ και αφού Δ μέσον της ΒΜ, προκύπτει ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΜ. Άρα είναι $\text{A}\Delta\perp\text{BM}$.
Διαφορετικά, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο, άρα και ύψος.

(β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο και ύψος, το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος του. Επομένως $\text{B}\hat{\text{A}}\Delta=\Delta\hat{\text{A}}\text{M}=45^0$. Όμως ισχύει ότι $\text{A}\hat{\text{B}}\Delta=\text{A}\hat{\text{M}}\Delta=45^0$ (αφού ΑΒΜ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο) επομένως ΑΒΔ και ΑΔΜ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα δηλαδή $\text{A}\Delta=\Delta\text{M}=\Delta\text{B}=\frac{\text{BM}}{2}$. Τώρα έχουμε:

$$\frac{\text{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \text{A}\Delta}}{\text{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \text{BM}}}=\frac{\text{A}\Delta^2}{\text{BM}^2}=\frac{\text{A}\Delta^2}{(2\text{A}\Delta)^2}=\frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\text{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\text{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2020.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A}>2020$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4$, τότε $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000$, $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000$, οπότε
$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2020, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha=3$, τότε
$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B}&=\overline{3\beta\gamma\delta}-\overline{3\beta\gamma}\\&=3000+100\beta+10\gamma+\delta-300-10\beta-\gamma\\&=2700+90\beta+9\gamma+\delta>2020, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha=2$, τότε
$$\begin{aligned}&\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{2\beta\gamma\delta}-\overline{2\beta\gamma}=2020\\&\Leftrightarrow 2000+100\beta+10\gamma+\delta-200-10\beta-\gamma=2020\\&\Leftrightarrow 1800+90\beta+9\gamma+\delta=2020\\&\Leftrightarrow 90\beta+9\gamma+\delta=220.\end{aligned}$$

  Επειδή τα β,γ,δ είναι ψηφία, θα είναι $0\leq 9\gamma+\delta\leq 90$, οπότε πρέπει $130\leq 90\beta\leq 220\Leftrightarrow\beta=2$. Τότε $9\gamma+\delta=40\Rightarrow 31\leq 9\gamma\leq 40\Rightarrow\gamma=4$. Επομένως: $\delta=40-36=4$ και $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=2244$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha+9=(\beta-3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta+9=(\alpha-3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2+\beta^2$.

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γράφονται:

$$\alpha=\beta^2-6\beta \qquad (1)$$

$$\beta=\alpha^2-6\alpha \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2-6(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=7(\alpha+\beta) \qquad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha-\beta=\beta^2-\alpha^2-6(\beta-\alpha)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-5(\beta-\alpha)=0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow(\beta-\alpha)(\beta+\alpha-5)=0\overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow}\alpha+\beta=5. \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) λαμβάνουμε: $\alpha^2+\beta^2=35$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2019.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A}>2019$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4$, τότε $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000$, $\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000$, οπότε
$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2019, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha=3$, τότε
$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B}&=\overline{3\beta\gamma\delta}-\overline{3\beta\gamma}\\&=3000+100\beta+10\gamma+\delta-300-10\beta-\gamma\\&=2700+90\beta+9\gamma+\delta>2019, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha=2$, τότε
$$\begin{aligned}&\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{2\beta\gamma\delta}-\overline{2\beta\gamma}=2019\\&\Leftrightarrow 2000+100\beta+10\gamma+\delta-200-10\beta-\gamma=2019\\&\Leftrightarrow 1800+90\beta+9\gamma+\delta=2019\\&\Leftrightarrow 90\beta+9\gamma+\delta=219.\end{aligned}$$
  Επειδή τα β,γ,δ είναι ψηφία, θα είναι $0\leq 9\gamma+\delta\leq 90$, οπότε πρέπει $130\leq 90\beta\leq 219\Leftrightarrow\beta=2$. Τότε $9\gamma+\delta=39\Rightarrow 31\leq 9\gamma\leq 39\Rightarrow\gamma=4$. Επομένως: $\delta=39-36=3$ και $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=2243$.

Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α,β,γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και (iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ,λ,μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha-1=\kappa\beta,\quad \beta-1=\lambda\gamma,\ \gamma-1=\mu\alpha .$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}&2\alpha=\kappa\beta+1=\kappa\left(\lambda\gamma+1\right)+1=\kappa\left(\lambda(\mu\alpha+1)+1\right)+1\\&\Rightarrow 2\alpha=\kappa\lambda\mu\alpha+\kappa\lambda+\kappa+1\\&\Rightarrow \alpha=\frac{\kappa\lambda+\kappa+1}{2-\kappa\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

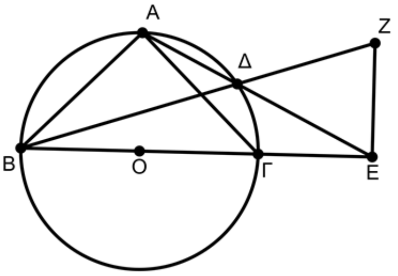
$$2-\kappa\lambda\mu>0\Leftrightarrow\kappa\lambda\mu<2.$$

Επειδή οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι έχουμε μόνο την περίπτωση:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = 3$.

  $\alpha = 3, \gamma - 1 = \alpha, \beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 3, \gamma = 4, \beta = 5 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (3,5,4)$.

Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$

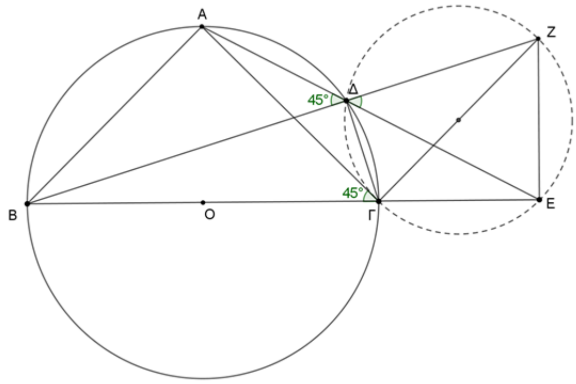
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$

Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$, τα τόξα $\widehat{BA}$ και $\widehat{A\Gamma}$ είναι ίσα και επιπλέον το άθροισμα μας τους είναι 180° , οπότε καθένα από αυτά θα είναι 90°. Επομένως η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Delta}B$ στο τόξο $\widehat{BA}$ θα είναι ίση με $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Όμως οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{\Delta}B$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, οπότε $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$



Σχήμα 2

(β) Επειδή η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, είναι . $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ Επομένως θα έχουμε και ότι $\Gamma\hat{\Delta}Z = 180^\circ - B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Επίσης δίνεται ότι $\Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$. Επομένως ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΓΖ περνάει από τα σημεία Δ και Ε. Τότε η εγγεγραμμένη σε αυτόν το κύκλο γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη γωνία $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$. Άρα είναι $Z\hat{\Gamma}E = 45^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Gamma E = EZ$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x>1,$ έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=x\alpha\beta \qquad (1)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη της (1) διαδοχικά επί α και β, και πρόσθεση στη συνέχεια κατά μέλη των δύο σχέσεων που προκύπτουν, έχουμε:

$$\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3=x\alpha^2\beta+x\alpha\beta^2 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)=x\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\xRightarrow{\alpha+\beta=1}\alpha^3+\beta^3=(x-1)\alpha\beta. \qquad (2)$$

Επομένως, έχουμε;

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(x-1)\alpha\beta}{x\alpha\beta}=\frac{x-1}{x}$$

και ομοίως

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{x\alpha\beta}{(x-1)\alpha\beta}=\frac{x}{x-1}.$$

Επομένως η δεδομένη ισότητα γίνεται εξίσωση με άγνωστο το x:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow 6\left[(x-1)^2+x^2\right]=13x(x-1)\Leftrightarrow 12x^2-12x+6=13x^2-13x$$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=-2$ (απορρίπτεται, αφού $x>1$) ή $x=3$.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύει:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha>0$ ισχύει:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \text{ (με την ισότητα να ισχύει για } \alpha=1).$$

Θέτοντας τώρα όπου α το $x-2y+\omega$ και $2x-y+\omega$ στην προηγούμενη σχέση, προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} \geq 2 \qquad (3)$$

$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} \geq 2 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$x - 2y + \omega + \frac{1}{x - 2y + \omega} = 2 \qquad (5)$$

$$2x - y + \omega + \frac{1}{2x - y + \omega} = 2, \qquad (6)$$

οπότε $x - 2y + \omega = 1$ και $2x - y + \omega = 1$ από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y = 0$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\omega^2 - 2\omega \geq -1 \Leftrightarrow (\omega - 1)^2 \geq 0 \text{ (που ισχύει).}$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha - 1 = \kappa\beta, \quad 2\beta - 1 = \lambda\gamma, \quad \gamma - 1 = \mu\alpha .$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$2\alpha = \kappa\beta + 1 = \kappa\left(\frac{\lambda\gamma + 1}{2}\right) + 1 = \kappa\left(\frac{\lambda(\mu\alpha + 1) + 1}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow 4\alpha = \kappa\lambda\mu\alpha + \kappa\lambda + \kappa + 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\kappa\lambda + \kappa + 2}{4 - \kappa\lambda\mu}.$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

$$4 - \kappa\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda\mu < 4.$$

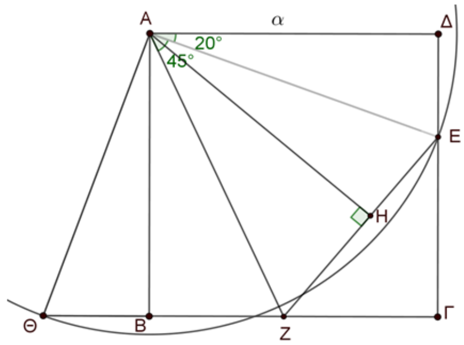
Οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, αφού $2\alpha - 1 > 0$, $2\beta - 1 > 0$ και $\gamma - 1 > 0$. Επιπλέον, οι κ, λ πρέπει να είναι περιττοί, όπως προκύπτει από τις δύο πρώτες εξισώσεις. Επομένως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$, άτοπο .
- $\kappa = \lambda = 1$, $\mu = 2$. Τότε:
  $\alpha = 2, \gamma - 1 = 2\alpha = 4, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 2, \gamma = 5, \beta = 3 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 5)$
- $\kappa = 3, \lambda = \mu = 1$. Τότε:
  $\alpha = 8, \gamma - 1 = \alpha, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 8, \gamma = 9, 2\beta = 10 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (8, 5, 9)$.

- $\kappa = 1, \lambda = 3, \mu = 1$. Τότε:
  $\alpha = 6, \gamma - 1 = \alpha, 2\beta - 1 = 3\gamma \Rightarrow \alpha = 6, \gamma = 7, 2\beta = 22 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (6, 11, 7)$.
- $\kappa = \lambda = 1, \mu = 3$. Τότε:
  $\alpha = 4, \gamma - 1 = 3\alpha, 2\beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 6, \gamma = 13, 2\beta = 14 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (4, 7, 13)$.

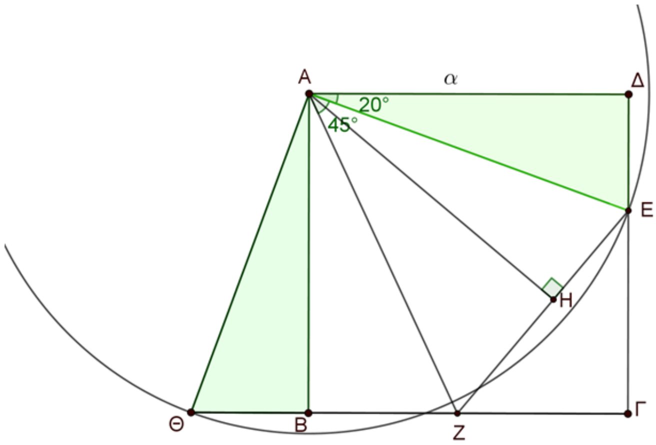
Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E = 20^0$ και $E\hat{A}Z = 45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta = ZE$ και υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α.



Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 3

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΘ είναι ορθογώνια με $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Theta = 90^0$ και επιπλέον έχουν:

- $A\Delta = AB = \alpha$
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $B\hat{A}\Theta = \Delta\hat{A}E = 20^0$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $B\hat{A}Z = B\hat{A}\Delta - Z\hat{A}E - E\hat{A}\Delta = 90^0 - 45^0 - 20^0 = 25^0$, οπότε

$$\Theta\hat{A}Z = \Theta\hat{A}B + B\hat{A}Z = 20^0 + 25^0 = 45^0$$

Τα τρίγωνα ΑΘΖ και ΑΖΕ έχουν:

- $AZ = AZ$, κοινή πλευρά
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου)
- $\Theta\hat{A}Z = 45^0 = Z\hat{A}E$

  Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $Z\Theta = ZE$
  και επιπλέον $A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z$.

Τέλος τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΗΕ είναι ορθογώνια με $A\hat{B}\Theta = A\hat{H}E = 90^0$ και έχουν:

- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)
- $A\hat{\Theta}B = A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z = A\hat{E}H$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AH = AB = \alpha$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow x(3-x) + 6\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(x+3) \Leftrightarrow 3x - x^2 + 6\lambda^2 - \lambda x - 6\lambda = 0, \quad x \neq 0, \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (\lambda - 3)x + 6\lambda - 6\lambda^2 = 0, \quad x \neq 0, \pm 3.$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4(6\lambda - 6\lambda^2) = 25\lambda^2 - 30\lambda + 9 = (5\lambda - 3)^2 \geq 0$$

και για $\lambda \neq \frac{3}{5}$, έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους

$$x_1 = 2\lambda, \ x_2 = 3 - 3\lambda.$$

Λόγω του περιορισμού:

$x_1 \neq 0, \pm 3$, οπότε $\lambda \neq 0, \pm\frac{3}{2}$ και $x_2 \neq 0, \pm 3$, οπότε $\lambda \neq 0, 1, 2$.

Επομένως, για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, 1, 2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, πρέπει να ισχύει:

$$|x_1 - x_2| = 7 \Leftrightarrow |5\lambda - 3| = 7 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται) ή } \lambda = -\frac{4}{5},$$

οπότε η ζητούμενη τιμή είναι $\kappa = -\frac{4}{5}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy = 1, \ x, y > 0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

Λύση

(α) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7\\
&= x\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)+y\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)\\
&= \left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)(x+y)=\left[x^4\left(x^2+y^2\right)+y^4\left(x^2+y^2\right)\right](x+y)\\
&= \left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)=\left(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\\
&= \left[\left(x^2+y^2\right)^2-\left(\sqrt{2}xy\right)^2\right]\left(x^2+y^2\right)(x+y)\\
&= \left(x^2+y^2+\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2-\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y).
\end{aligned}
$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση

$$P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y).$$

Θεωρώντας $xy=1,\ x,y>0,$ έχουμε τις ανισότητες:

$$x^4+y^4\geq 2x^2y^2=2 \text{ (η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),$$

$$x^2+y^2\geq 2xy=2 \quad \text{(η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),$$

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}=2 \quad \text{(η ισότητα ισχύει όταν } x=y=1),$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\geq 8,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=1$.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 21 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 26 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{10\alpha+5\beta+5\gamma}{20}=30 \\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20 \\ \dfrac{5\gamma+5\delta+5\varepsilon}{15}=10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\alpha+\beta+\gamma=120 \\ \beta+\gamma+\delta=60 \\ \gamma+\delta+\varepsilon=30 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma=10\alpha+5\beta+5\gamma+5\delta+5\varepsilon=5\cdot\left[\left(2\alpha+\beta+\gamma\right)+\left(\gamma+\delta+\varepsilon\right)-\gamma\right]=5\left(150-\gamma\right). \quad (4)$$

Από την (3) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\max}=30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=30,\ \delta+\varepsilon=0$, με μία πιθανή λύση $\alpha=45,\ \beta=30,\ \delta=\varepsilon=0$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=60,\ \delta+\varepsilon=30$ με μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=40$, $\delta=20,\ \varepsilon=10$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\Sigma_{\min}=5\left(150-\gamma_{\max}\right)=5\left(150-30\right)=600,$$

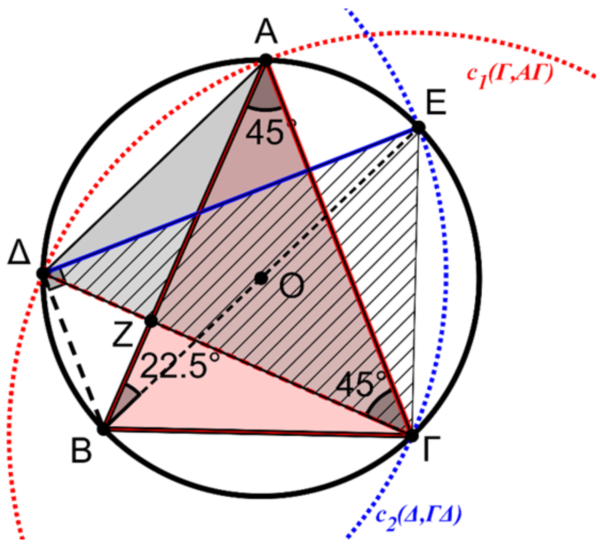
$$\Sigma_{\max}=5\left(150-\gamma_{\min}\right)=5\left(150-0\right)=750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma=5\left(150-20\right)=650$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=45°$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\Delta,\Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B,O,E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην ΔE.

Λύση



Σχήμα 4

Από την εκφώνηση του προβλήματος ισχύουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων: $AB=A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές), $\Gamma\Delta=A\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου c_1) και $\Gamma\Delta=\Delta E$

(ακτίνες του κύκλου c_2)
Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$AB = A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E \quad (1).$$

Ισχύουν επίσης οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma \qquad (2)$$

Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$,. $\Gamma\Delta A$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε θα είναι:

$$\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{A}\Gamma = 45^0.$$

Επομένως, είναι $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma - E\hat{B}\Gamma = 67{,}5^0 - 45^0 = 22{,}5^0$ και επιπλέον ισχύει:

$$A\hat{B}O = \frac{180^0 - A\hat{O}B}{2} = \frac{180^0 - 135^0}{2} = 22{,}5^0$$

Από την ισότητα $A\hat{B}E = A\hat{B}O$, συμπεραίνουμε ότι τα σήμεια B, O, E είναι συνευθειακά.
Αφού τα σήμεια B, O, E είναι συνευθειακά, η γωνία $B\Delta E$ είναι ορθή, οπότε: $\Delta B \perp \Delta E$.
Επίσης $B\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{B}Z = 45^0 \Rightarrow$ Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$, οπότε $\Delta B \perp OZ$. Από τις καθετότητες $\Delta B \perp \Delta E$ και $\Delta B \perp OZ$, συμπεραίνουμε $\Delta E \parallel OZ$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, $n = 1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2}, \text{ για κάθε } n = 1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση
Από τη δεδομένη σχέση έχουμε

$M_{n+2} - M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$, για κάθε $n = 1,2,3,...$, οπότε η ακολουθία $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, $n = 1,2,3,...$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Επομένως, υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$M_n = M_1 + (n-1)\omega = a_1 + (n-1)\omega, \; n = 1,2,3,... \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας M_n έχουμε:

$$nM_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$(n-1)M_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1}.$$

Από την τελευταία σχέση, λόγω της (1), λαμβάνουμε:

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1} = n\left[a_1 + (n-1)\omega\right] - (n-1)\left[a_1 + (n-2)\omega\right]$$
$$\Rightarrow a_n = a_1 + \left[n(n-1) - (n-1)(n-2)\right]\omega = a_1 + (2n-2)\omega = a_1 + (n-1)\cdot 2\omega.$$

Επομένως η ακολουθία a_n, $n = 1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2ω.

Πρόβλημα 2

Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 5 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 6 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 21 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5\alpha+5\beta+5\gamma}{15}=10 \\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20 \\ \dfrac{5\gamma+5\delta+10\varepsilon}{20}=30 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=30 \\ \beta+\gamma+\delta=60 \\ \gamma+\delta+2\varepsilon=120 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma=5\alpha+5\beta+5\gamma+5\delta+10\varepsilon=5\cdot\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+2\varepsilon)-\gamma\right]=5(150-\gamma). \qquad (4)$$

Από την (1) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\max}=30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=0,\ \beta+\delta=30,\ \delta+2\varepsilon=90$, και μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=0,\ \delta=30,\ \varepsilon=45$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{\min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=30,\ \beta+\delta=60,\ \delta+2\varepsilon=120$ και μία πιθανή λύση $\alpha=10,\ \beta=20,$ $\delta=40,\ \varepsilon=40$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\Sigma_{\min}=5(150-\gamma_{\max})=5(150-30)=600,$$

$$\Sigma_{\max}=5(150-\gamma_{\min})=5(150-0)=750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma=5(150-10)=700$.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P\left(x^2\right)=\left(P(x)\right)^2-2P(x)+2,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$P\left(x^2\right)-1=\left(P(x)-1\right)^2, \qquad (1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε, αν θέσουμε $Q(x)=P(x)-1$, έχουμε

$$Q\left(x^2\right)=\left(Q(x)\right)^2, \qquad (2)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(α) Το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $Q(x)=c$. Τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $c=c^2 \Leftrightarrow c=0$ ή $c=1$, οπότε $P(x)=1$ ή $P(x)=2$.

(β) Το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό $n\geq 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$Q(x)=a_nx^n+R(x), a\neq 0, \text{ όπου } \deg R(x)=r\leq n-1 \text{ ή } R(x)=0. \qquad (3)$$

Αν $R(x)\neq 0$, από τη σχέση (2) έχουμε:

$$a_nx^{2n}+R\left(x^2\right)=a_n^2x^{2n}+2a_nx^nR(x)+\left(R(x)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a_n=1 \text{ και } R\left(x^2\right)=2a_nx^nR(x)+\left(R(x)\right)^2.$$

Συγκρίνοντας τους βαθμούς των πολυωνύμων των δυο μελών της τελευταίας σχέσης, παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο του πρώτου μέλους της έχει βαθμό $2r$, ενώ το πολυώνυμο του δευτέρου μέλους της έχει βαθμό $n+r$, οπότε πρέπει $r=n$, άτοπο. Επομένως είναι $R(x)=0$ και $Q(x)=x^n \Rightarrow P(x)=x^n+1, n\geq 1$.

Επομένως, τα πολυώνυμα που ζητάμε είναι: $P(x)=1$ ή $P(x)=2$ ή $P(x)=x^n+1$, $n\geq 1$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του Δ βρίσκεται επάνω στην $B\Gamma$ και περνά από τα σημεία B,O. Ο κύκλος c_1 τέμνει την AB στο σημείο E και τον κύκλο c στο σημείο Z. Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $O\Delta E$, $c_2(O,\Delta,E)$ τέμνει την AB στο σημείο K, να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Δ,Z,O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOK.

Λύση

Η $O\Delta$ είναι διάκεντρος των κύκλων c και c_1, άρα θα είναι μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής BZ. Δηλαδή η $O\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BOZ}$ του ισοσκελούς τριγώνου BOZ.

Άρα: $$\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{x}.$$

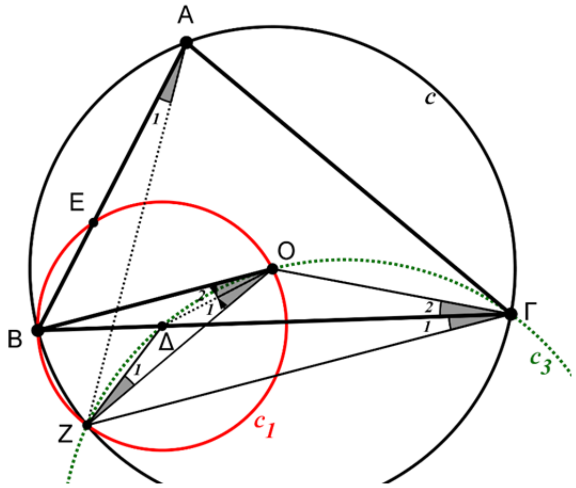
Η γωνία $\hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c με αντίστοιχη επίκεντρη την γωνία $\widehat{BOZ}$, οπότε

$$\hat{A}_1=\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{x}.$$

Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένς στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο BZ, οπότε

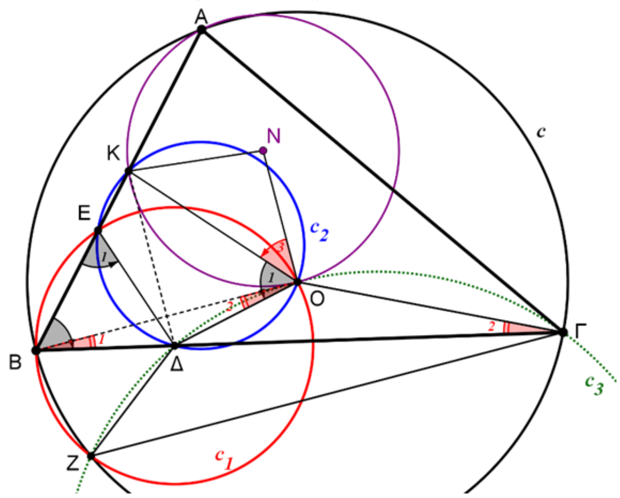
$$\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1=\hat{x}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{x}$, οπότε τα σημεία Γ, Δ, Z, O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο (έστω c_3).



Σχήμα 5

Επί πλέον ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔOZ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{x}$.
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\Gamma O\Delta Z$ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90° - \hat{A} = \hat{x}$.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓOZ ισχύει $\widehat{\Gamma OZ} = \widehat{O\Gamma Z} = 2\hat{x}$, άρα $OB \parallel \Gamma Z$.
Εφόσον το τρίγωνο ΓOZ είναι ισοσκελές το κέντρο του κύκλου c_3 θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΓZ.
Αν τώρα συμβολίσουμε με N το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AOK, αρκεί να αποδείξουμε ότι $ON \perp \Gamma Z$ ή ισοδύναμα $ON \perp OB$.



Σχήμα 6

Από το ισοσκελές τρίγωνο NOK έχουμε:

$$\hat{O}_3 = 90° - \frac{\widehat{KNO}}{2} = 90° - \widehat{KAO} = 90° - \widehat{BAO} = 90° - (90° - \hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{\Gamma}.$$

Ισχύει: $\hat{O}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{x} = 90° - \hat{A} \Rightarrow \hat{O}_2 = 90° - \hat{A}$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο } O\Delta EK \text{ έχουμε: } \hat{O}_1 = \hat{E}_1 \\ \text{Από το ισοσκελές τρίγωνο } \Delta BE \text{ έχουμε: } \hat{E}_1 = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}.$$

Άρα έχουμε: $\widehat{NOB} = \hat{O}_3 + \hat{O}_1 - \hat{O}_2 = \hat{\Gamma} + \hat{B} - 90° + \hat{A} = 90°$.