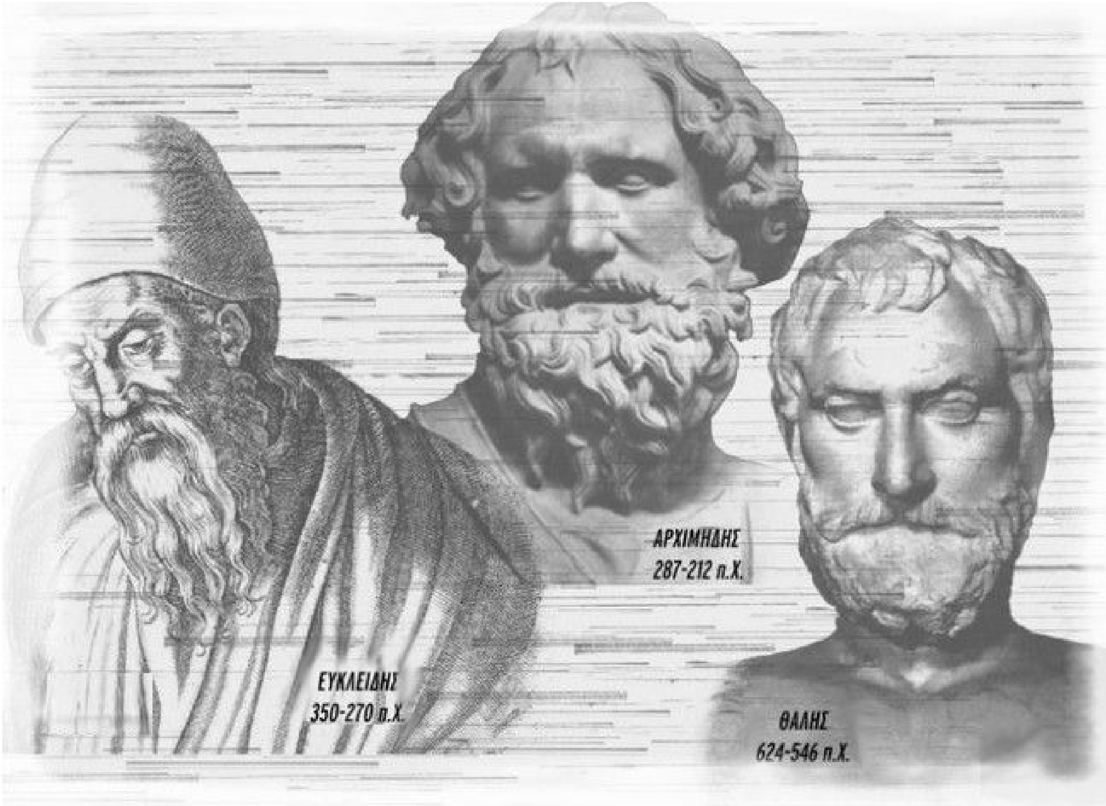
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ Ε.Μ.Ε.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

“ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ”

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26$^{\eta}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός
$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7}$$
είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

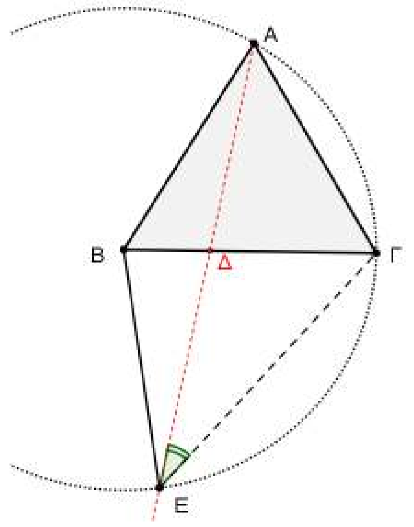
Λύση

Έχουμε
$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7} = \frac{9(n^2+7)-32}{n^2+7} = 9 - \frac{32}{n^2+7}.$$
Επειδή ο αριθμός Κ είναι ακέραιος, έπεται ότι ο n^2+7 είναι διαιρέτης του 32 και αφού είναι $n^2+7 \geq 8$, έπεται ότι:
$$n^2+7 \in \{8,16,32\} \Leftrightarrow n^2 \in \{1,9,25\} \Leftrightarrow n \in \{-1,1,-3,3,-5,5\}.$$
Διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να λύσει τη δεδομένη ισότητα ως προς n^2 και στη συνέχεια να προσδιορίσει τις κατάλληλες τιμές του Κ για τις οποίες ο n^2 προκύπτει μη αρνητικός ακέραιος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)



Παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA}=\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{BE}$, οπότε το σημείο Β είναι κέντρο κύκλου που περνάει από τα σημεία Α, Γ και Ε. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(\mathrm{B},\mathrm{BA})$ με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^\circ$. Άρα είναι:
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0.$$

2^{ος} τρόπος

Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$ και ΒΑ = ΒΓ, οπότε θα είναι ΒΓ = ΒΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Αν φέρουμε το ύψος του από την κορυφή Β, έστω BZ, $Z \in \Gamma E$, τότε η ΒΖ είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΓΕ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΒΖ με την ΑΕ. Τότε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΚΕ είναι ίσα, γιατί έχουν:

ΒΓ = ΒΕ, ΒΚ κοινή πλευρά και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{B}E$.

Άρα έχουμε:

$$B\hat{\Gamma}K = B\hat{E}K$$

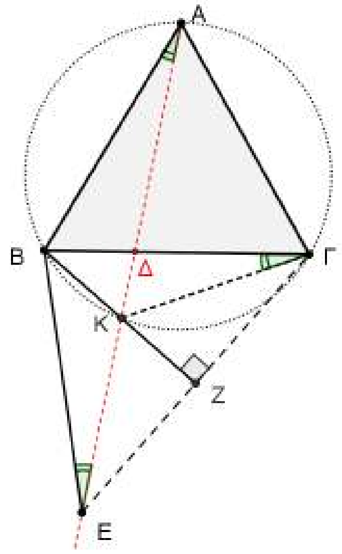
και αφού $B\hat{E}K = B\hat{A}K$ έπεται ότι $B\hat{\Gamma}K = B\hat{A}K$.
Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΚΓ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$Z\hat{K}E = B\hat{K}A \text{ (ως κατά κορυφή)}$$

$$B\hat{K}A = B\hat{\Gamma}A = 60^\circ \text{(από το εγγράψιμο ΑΒΚΓ)}.$$

Άρα είναι

$$A\hat{E}\Gamma = K\hat{E}Z = 90^\circ - E\hat{K}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^0.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \text{ και } B = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A < B$, **(β)** $A < \frac{1}{5990}$.

Λύση

(α) Σε κάθε κλασματικό παράγοντα του Α της μορφής $\frac{2\nu-1}{2\nu+2}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$, αντιστοιχεί ένας κλασματικός παράγοντας του Β της μορφής $\frac{2\nu}{2\nu+3}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$.

Επειδή ισχύει:

$$\frac{2\nu-1}{2\nu+2} < \frac{2\nu}{2\nu+3} \Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu - 3 < 4\nu^2 + 4\nu \Leftrightarrow -3 < 0,$$

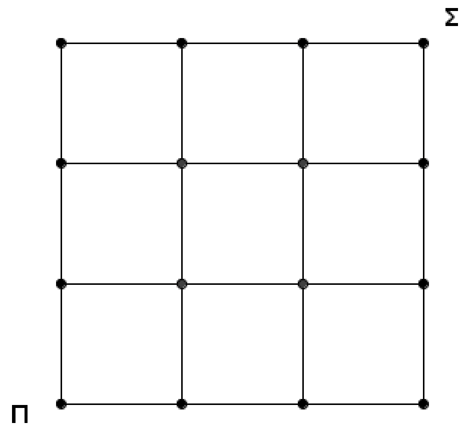
για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, άρα και για $\nu = 1,2,\ldots,299$, με πολλαπλασιασμό των παραπάνω 299 ανισοτήτων με θετικούς όρους κατά μέλη, προκύπτει η ανισότητα $A < B$.

(β) Επειδή είναι $A > 0$, από την ανισότητα $A < B$ με πολλαπλασιασμό των δύο μελών της επί Α, λαμβάνουμε:

$$A^2 < A\cdot B = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{599\cdot 600\cdot 601} < \frac{1}{100\cdot 599^2} = \frac{1}{5990^2} \Rightarrow A < \frac{1}{5990}.$$

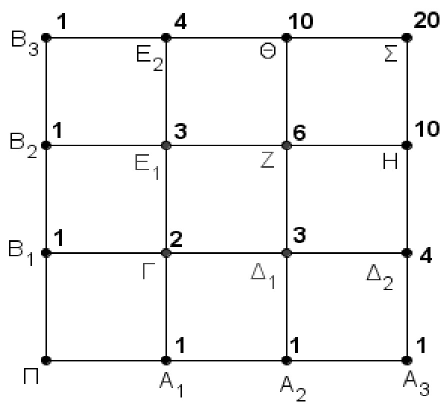
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



Λύση

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει κάποιος μαθητής όλες τις διασταυρώσεις μέχρι να φτάσει στο σχολείο. Προφανώς στις διασταυρώσεις A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2, B_3, μπορεί κάποιος μαθητής να μετακινηθεί με ένα μόνο τρόπο, διότι μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά ή προς τα άνω.
Στις υπόλοιπες διασταυρώσεις, μπορεί να μετακινηθεί με το άθροισμα των τρόπων που μπορεί να μετακινηθεί προς τις πλησιέστερες διασταυρώσεις που βρίσκονται αριστερά και προς τα κάτω.
Έτσι όλες οι δυνατές διαδρομές από τις οποίες μπορεί να φτάσει κάποιος στο σχολείο, είναι συνολικά 20. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, δύο τουλάχιστον μαθητές θα ακολουθήσουν οπωσδήποτε την ίδια διαδρομή, εφόσον ο αριθμός των μαθητών είναι $k \geq 21$. Άρα η ελάχιστη τιμή του k είναι 21.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

Λύση

Αρκεί να υπάρχουν $a,b\in\mathbb{N}^*$ με $(a,b)=1$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{9n-1}{n+7}=\frac{a^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$n=\frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2}=\frac{7(a^2-9b^2)+64b^2}{9b^2-a^2}=-7+\frac{64b^2}{9b^2-a^2} \qquad (2)$$

Επειδή είναι $(a,b)=1$, έπεται ότι $(a^2,b^2)=1$ και $(9b^2-a^2,b^2)=1$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο αριθμός n είναι ακέραιος, αν, και μόνον αν, ο ακέραιος $9b^2-a^2$ είναι διαιρέτης του 64.

Επειδή οι αριθμοί a,b και n είναι θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι $9b^2-a^2\geq 8$, οπότε θα είναι:

$$9b^2-a^2=(3b+a)(3b-a)\in\{8,16,32,64\}. \qquad (3)$$

Επειδή οι παράγοντες $3b+a$, $3b-a$ έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 6 και διαφορά πολλαπλάσιο του 2 και είναι $3b+a>3b-a$, από τη σχέση (3) οι μόνες δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$(3b+a,3b-a)=(4,2) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(8,4) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(16,2)$$
$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,1) \text{ ή } (a,b)=(2,2) \text{ ή } (a,b)=(7,3).$$

Το ζευγάρι $(a,b)=(2,2)$ απορρίπτεται, γιατί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a,b είναι 2, οπότε προκύπτουν τελικά οι τιμές $n=1$ ή $n=11$.

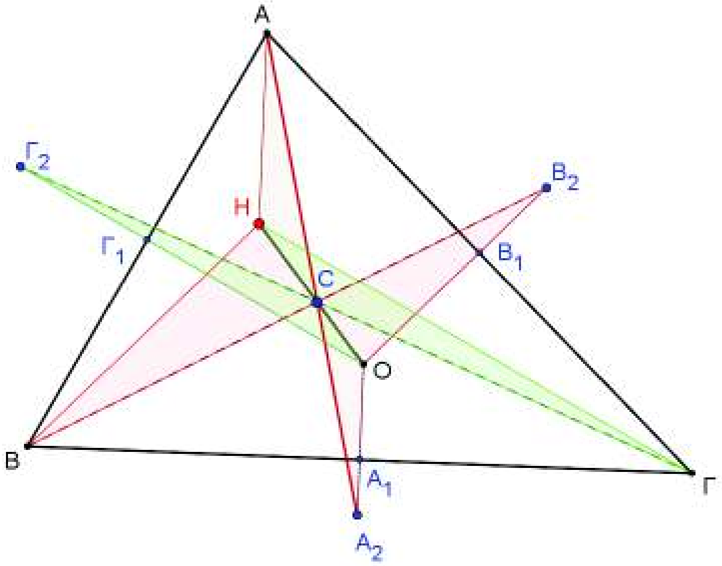
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A_1,B_1,\Gamma_1}$ τα μέσα των πλευρών $\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{A\Gamma}$ και AB αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A_2,B_2,\Gamma_2}$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma_2}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma_1}}$ με $\lambda>0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA_2,BB_2,\Gamma\Gamma_2}$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε θα ισχύει $\overrightarrow{AH} = 2\cdot\overrightarrow{OA_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OA_2} = \lambda\cdot\overrightarrow{OA_1}$, καταλήγουμε στη σχέση: $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{OA_2}$.

Αν τώρα C είναι το σημείο τομής των AA_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων CHA και COA_2), έχουμε: $\overrightarrow{HC} = \dfrac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{CO}$. Δηλαδή η AA_2 περνάει από το σημείο C που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.



Ομοίως, θα ισχύει $\overrightarrow{BH} = 2\cdot\overrightarrow{OB_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OB_2} = \lambda\cdot\overrightarrow{OB_1}$, καταλήγουμε

$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{OB_2}.$$

Αν τώρα C' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων $C'HA$ και $C'OB_2$), έχουμε: $\overrightarrow{HC'} = \dfrac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{C'O}$. Δηλαδή η BB_2 περνάει από το σημείο C' που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.

Αν τώρα C'' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH, τότε με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η $\Gamma\Gamma_2$ περνάει από το σημείο C'' που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.

Τα σημεία όμως C, C', C'' ταυτίζονται. Άρα οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\lambda = 1$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(2) Αν $\lambda = 2$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$. Στη περίπτωση αυτή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ίσα και έχουν κοινό κύκλο του Euler.

(3) Σε κάθε περίπτωση τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι όμοια με τις πλευρές τους παράλληλες. Το ένα τρίγωνο είναι "εικόνα" του άλλου μέσα από ομοιοθεσίες, οπότε μπορεί να προκύψει λύση και μέσω ομοιοθεσιών.

(4) Λύσεις του προβλήματος μπορούν να δοθούν με χρήση Ααλυτικής Γεωμετρίας ή μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη φάση τη γνωστή ανισότητα $2\alpha\beta \leq \alpha^2+\beta^2$, η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz=\frac{1}{2}\left(2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+2xyz\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(2xy\cdot xy+2yz\cdot yz+2zx\cdot zx+2xyz\right)\\
&\leq\frac{1}{2}\left[xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+2xyz\right] \qquad (1)\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-xyz^2-yzx^2-zxy^2+2xyz\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-xyz\left(x+y+z-2\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right], \quad (\text{αφού } x+y+z=2).
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\leq\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right], \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα ισχύει, όπως προκύπτει από την (1), όταν :

$$x=y=z \text{ ή } x=y, z=0 \text{ ή } y=z, x=0 \text{ ή } z=x, y=0,$$

οπότε, αφού είναι $x+y+z=2$, η ισότητα αληθεύει όταν:

$$\left(x,y,z\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \text{ ή } \left(1,1,0\right) \text{ ή } \left(1,0,1\right) \text{ ή } \left(0,1,1\right). \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα $\alpha\beta\leq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, θεωρώντας $\alpha=2xy+2yz+2zx$, $\beta=x^2+y^2+z^2$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2xy+2yz+2zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\\
&\leq\frac{1}{4}\left(\frac{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2=\frac{1}{16}\left(x+y+z\right)^4=1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Από τις (2) και (4) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\leq 1.$$

Η ισότητα στην ανισότητα (4) ισχύει όταν:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow 2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2,$$

η οποία συναληθεύει με τις ισότητες (3) για $\left(x,y,z\right)=\left(1,1,0\right)$ ή $\left(1,0,1\right)$ ή $\left(0,1,1\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad \text{(I)},$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad \text{(II)}$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.

Λύση

(α) Εφόσον ο μιγαδικός w είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$, θα ισχύει $w^2 + w + 1 = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία εξίσωση με w, έχουμε:

$$w^3 + w^2 + w = 0 \Leftrightarrow w^3 + \underbrace{w^2 + w + 1}_{0} = 1 \Leftrightarrow w^3 = 1.$$

Από τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $|w| = 1$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (Ι) $w^2 = -w - 1$, έχουμε:

$$z_1(-1 - w) + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow -z_1 - z_1 w + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_3 - z_1)w = z_1 - z_5.$$

Άρα

$$|(z_3 - z_1)w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow |z_3 - z_1||w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow \boxed{|z_3 - z_1| = |z_1 - z_5|} \quad \text{(A)}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (Ι) $w = -w^2 - 1$, έχουμε:

$$z_1 w^2 + z_3(-w^2 - 1) + z_5 = 0 \Leftrightarrow z_1 w^2 - z_3 w^2 - z_3 + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_3)w^2 = z_5 - z_3.$$

Άρα έχουμε

$$|(z_1 - z_3)w^2| = |z_5 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - z_3||w^2| = |z_5 - z_3| \Leftrightarrow \boxed{|z_3 - z_1| = |z_5 - z_3|} \quad \text{(B)}.$$

Από τις σχέσεις (Α) και (Β) έχουμε τις ισότητες:

$$|z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| = |z_5 - z_1|,$$

δηλαδή το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο.

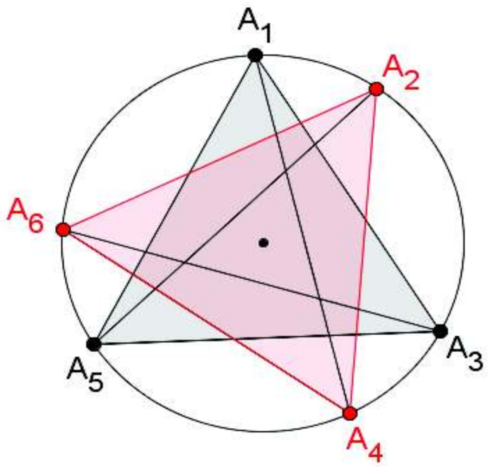
(β) Με όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τη σχέση (ΙΙ)) αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο $A_2A_4A_6$ είναι ισόπλευρο.

Από γνωστή πρόταση της γεωμετρίας έχουμε ότι $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4$, οπότε χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_6 - z_1| = |z_1 - z_4|. \qquad (1)$$

Ομοίως, από την ισότητα $A_3A_2 + A_3A_4 = A_3A_6$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| = |z_3 - z_6|. \qquad (2)$$



Ομοίως , από την ισότητα $A_5A_4 + A_5A_6 = A_5A_2$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| = |z_2 - z_5|. \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$|z_1 - z_4| = |z_3 - z_6| = |z_2 - z_5|$$

λαμβάνουμε:

$$|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|+|z_4-z_5|+|z_5-z_6|+|z_6-z_1| = 3|z_1-z_4| = 3|z_2-z_5| = 3|z_3-z_6|.$$

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa+3\lambda,$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$.

Λύση

Θεωρούμε τους αριθμούς της μορφής $80\kappa+3\lambda,$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, σταθεροποιώντας την τιμή του κ.

Για $\kappa=0$ λαμβάνουμε όλα τα πολλαπλάσια του 3 αρχίζοντας από το 0.

Για $\kappa=1$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=80+3\lambda=3(26+\lambda)+2=3\rho+2,\rho\geq 26,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 26 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+2,$ για $\rho=0,1,2,...25$.

Για $\kappa=2$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=160+3\lambda=3(53+\lambda)+1=3\rho+1,\rho\geq 53,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 53 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+1,$ για $\rho=0,1,2,...52$.

Για $\kappa\geq 3$ προκύπτουν αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 240 που έχουμε ήδη εκφράσει στη μορφή $80\kappa+3\lambda,$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$. Έτσι συνολικά δεν μπορούμε να εκφράσουμε στη ζητούμενη μορφή τους 79 αριθμούς 2,5,8, ... ,77 και 1,4,7,... , 157, που περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$ και $\mathrm{B\Gamma}=\beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\mathrm{BZ}=\mathrm{BO}$. Αν το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta=\alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\mathrm{AZ}=\mathrm{EO}$, **(iii)** $\mathrm{EO}\perp\mathrm{Z\Delta}$.

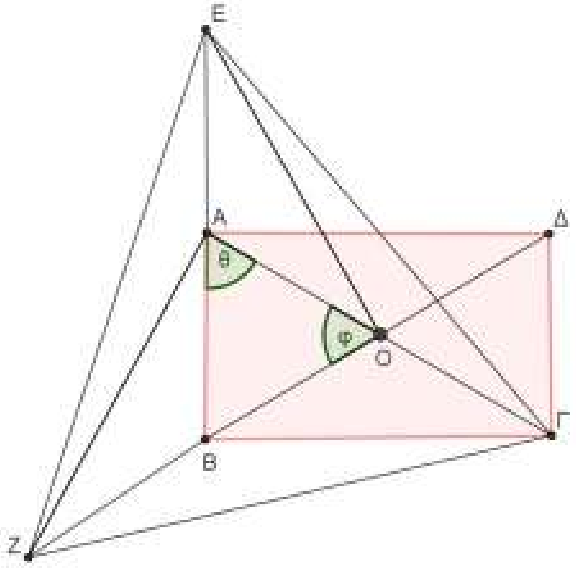
Λύση

Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΖΟΓ έχουν, λόγω των υποθέσεων τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία,

$$\mathrm{AE}=\mathrm{O\Gamma},\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{OZ}\ \text{και}\ \mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Gamma},$$

οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Έτσι προκύπτει η ισότητα

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\Gamma \Leftrightarrow 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = 180^0 - \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B},$$



Σχήμα 1

οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{BO}$. Όμως ισχύει $\mathrm{AO} = \mathrm{OB}$, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισόπλευρο πλευράς $\mathrm{AB} = \alpha$. Το ύψος του τριγώνου ΑΒΟ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, αλλά ισούται και με το μισό της πλευράς $\mathrm{B}\Gamma = \beta$. Επομένως έχουμε

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \alpha\sqrt{3}.$$

(ii) Τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΟΕΒ είναι ίσα, αφού έχουν

$$\mathrm{AO} = \mathrm{OB},\ \mathrm{OZ} = \mathrm{EB} \text{ και } \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = 60^\circ = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O}\ .$$

Άρα θα έχουν και $\mathrm{AZ} = \mathrm{ZO}$.

(iii) Επειδή είναι $\mathrm{AO} = \mathrm{AE} = \mathrm{AB}$ η διάμεσος του τριγώνου ΒΟΕ ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί. Άρα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = 90^\circ$ και $\mathrm{EO} \perp \mathrm{Z}\Delta$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27\,.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \geq 27\,. \qquad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι οι αριθμοί x, y και z είναι θετικοί με γινόμενο $xyz = 1$, οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\,, \qquad (2)$$

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{xyyzzx} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \qquad (3)$$

Λόγω των (2), (3) και των υποθέσεων $a,b>0$ και $xyz=1$, έχουμε

$$a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

οπότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, αρκεί, αντί της (1), να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq 27 \text{ ή } (a+b)^3 \geq 27,$$

που ισχύει, αφού δίνεται ότι $a+b=3$.

Η ισότητα αληθεύει για x, y και z για τα οποία οι δύο ανισότητες (2) και (3) ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή για $x=y=z=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

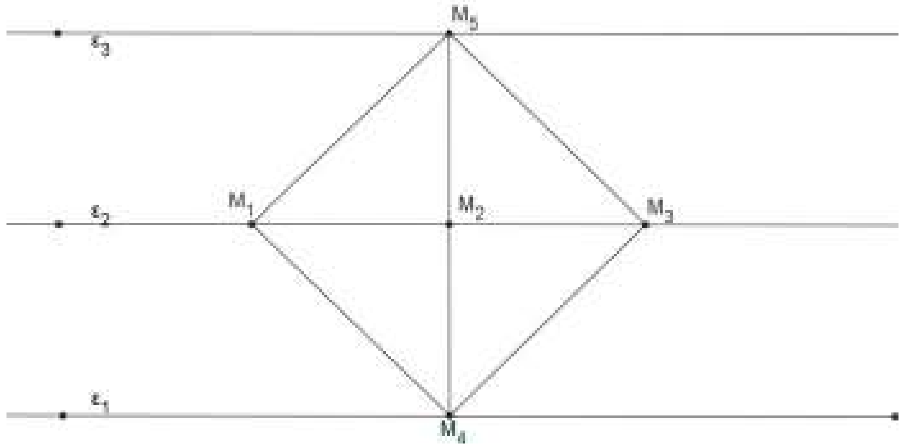
(α) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 \in \varepsilon_2$, $\mathrm{M}_4 \in \varepsilon_1$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \varepsilon_1$, $\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4 \in \varepsilon_3$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_2$.

Λύση

Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι από 5 σημεία στα οποία δεν υπάρχουν τρία που να είναι συνευθειακά, σχηματίζονται ακριβώς $\binom{5}{3} = 10$ τρίγωνα. Στη συνέχεια για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων χάνεται και ένα τρίγωνο.

(α). Τρία από τα δεδομένα σημεία, έστω τα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$, ανήκουν στην ευθεία ε_2.



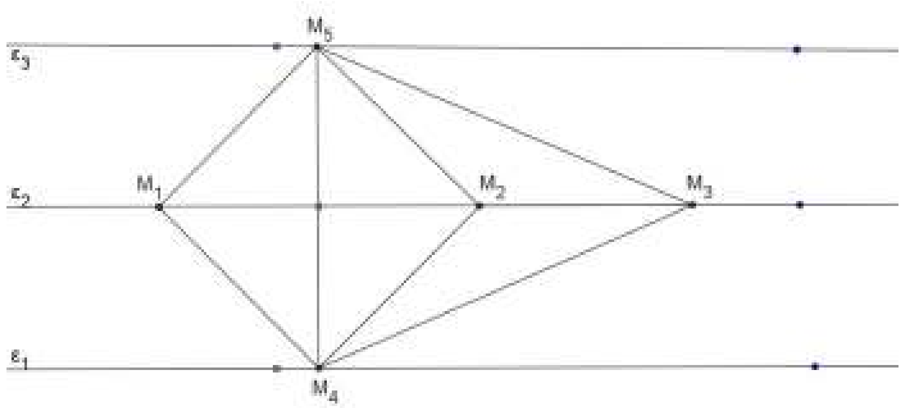
Σχήμα 2

Τότε αυτά δεν σχηματίζουν τρίγωνο, ενώ τα άλλα δύο σημεία πρέπει να τοποθετηθούν από ένα σε καθεμία από τις άλλες δύο ευθείες. Για το σχηματισμό ισοσκελών τριγώνων πρέπει τα σημεία αυτά να ανήκουν σε κάποια από τις μεσοκάθετες των ευθύγραμμων τμημάτων M_1M_2, M_2M_3, M_1M_3. Αν το σημείο M_2 είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και τα M_4, M_5 ανήκουν στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και είναι $M_1M_2 \neq M_2M_4 = \alpha$, τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $M_1M_3M_4$ και $M_1M_3M_5$.

Παρατηρούμε όμως ότι, αν θεωρήσουμε στη προηγούμενη περίπτωση $M_1M_2 = M_2M_4 = M_2M_5 = \alpha$, που είναι δυνατόν, αφού οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν, τότε και τα τρίγωνα $M_1M_2M_4$ και $M_2M_3M_4$ καθώς και τα τρίγωνα $M_1M_2M_5$ και $M_2M_3M_5$ είναι ισοσκελή, οπότε έχουμε άλλα 4 ισοσκελή τρίγωνα. Επειδή και η ευθεία ε_2 είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_4M_5 και τα τρίγωνα $M_1M_4M_5$ και $M_3M_4M_5$ είναι ισοσκελή. Άρα έχουμε συνολικά κατασκευάσει **8 ισοσκελή τρίγωνα** με κορυφές από τα πέντε σημεία που είναι και ο μέγιστος δυνατός αριθμός στη περίπτωση αυτή, δηλαδή όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

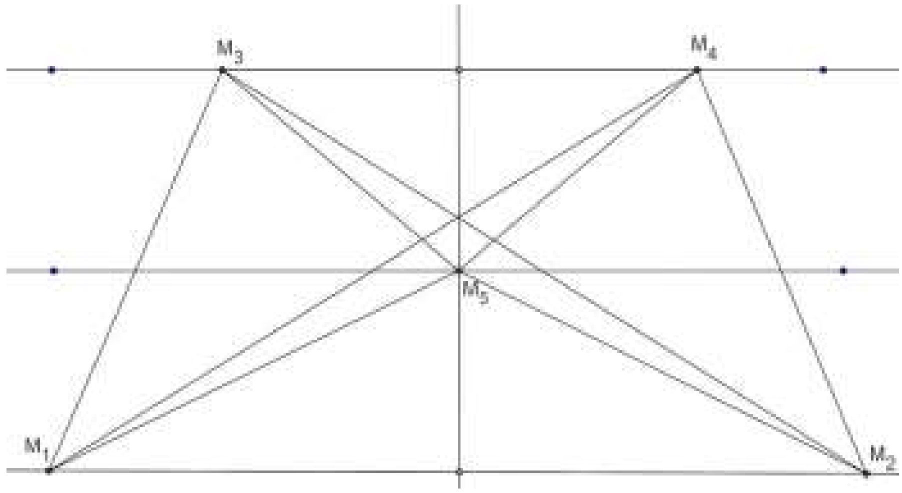
Στην περίπτωση που θεωρήσουμε τα $M_4 \in \varepsilon_1$, $M_5 \in \varepsilon_3$, έτσι ώστε η M_4M_5 να είναι μεσοκάθετη του M_1M_2, τότε το τετράπλευρο $M_1M_4M_2M_5$ είναι ρόμβος (τετράγωνο, αν $M_1M_2 = 2\alpha$) και από τα τέσσερα σημεία προκύπτουν 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_1M_2M_4, M_1M_2M_5$, $M_1M_4M_5$ και $M_2M_4M_5$. Το σημείο M_3 μπορεί να επιλεγεί πάνω στην ευθεία ε_2 έτσι ώστε $M_2M_3 = M_3M_4 = M_2M_5$, οπότε πλέον σχηματίζονται άλλα τρία ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_2M_3M_4, M_2M_3M_5$ και $M_3M_4M_5$. Έτσι έχουμε συνολικά κατασκευάσει **7 ισοσκελή τρίγωνα**. Αν είναι $M_2M_3 \neq M_2M_4 = M_2M_5$, τότε θα έχουμε συνολικά **5 ισοσκελή τρίγωνα**.

Άρα ο μέγιστος αριθμός ισοσκελών τριγώνων στη περίπτωση αυτή είναι 8.



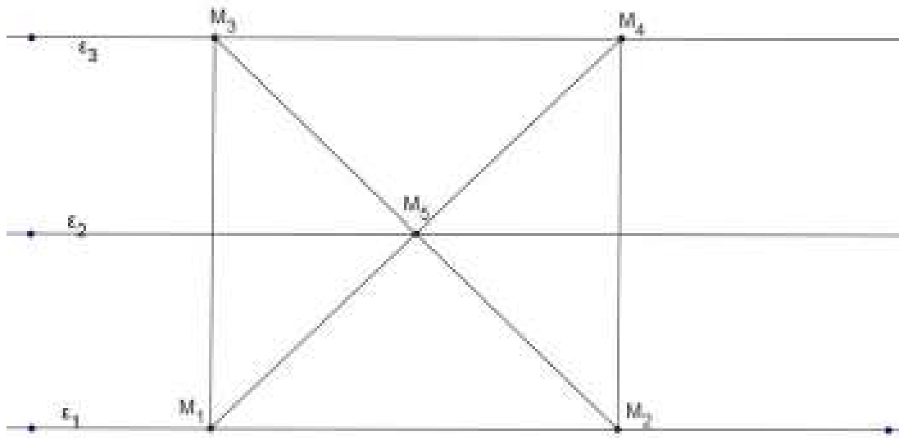
Σχήμα 3

(β). Σε τυχαία τοποθέτηση των σημείων M_1, M_2 πάνω στην ευθεία ε_1 και των M_3, M_4 πάνω στην ευθεία ε_3 το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι τραπέζιο, οπότε από τα 4 αυτά σημεία σχηματίζονται ένα ή δύο ισοσκελή τρίγωνα, μόνο στην περίπτωση που μία από τις βάσεις ισούται με τη μία ή με τις δύο μη παράλληλες πλευρές, αντίστοιχα.



Σχήμα 4

Το σημείο M_5 πρέπει να τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία ε_2, αλλά και στη μεσοκάθετη κάποιου από τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4. Στην περίπτωση ισοσκελούς τραπεζίου $M_1M_2M_4M_3$ οι δύο βάσεις M_1M_2 και M_3M_4 έχουν κοινή μεσοκάθετη δ, οπότε για $M_5 = \delta \cap \varepsilon_2$ προκύπτουν δύο ισοσκελή τρίγωνα. Συνολικά στην τοποθέτηση αυτή σχηματίζονται το **πολύ 4 ισοσκελή τρίγωνα**.



Σχήμα 5

Στην ίδια περίπτωση, αν πάρουμε τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, πάνω στις δύο ευθείες ε_1 και ε_3, έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο, τότε αυτά σχηματίζουν 4 ισοσκελή τρίγωνα. Στη συνέχεια, αν πάρουμε το σημείο M_5 πάνω στην ευθεία ε_2, έτσι ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του τετραγώνου που ορίζουν τα τέσσερα πρώτα σημεία, τότε με μία κορυφή το σημείο M_5 σχηματίζονται άλλα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα Έτσι έχουμε συνολικά **8 ισοσκελή τρίγωνα**.

Στην περίπτωση που τα 4 πρώτα σημεία σχηματίζουν παραλληλόγραμμο, τότε δεν προκύπτουν ισοσκελή τρίγωνα, εκτός εάν το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι ρόμβος, οπότε έχουμε συνολικά **4 ή 5 το πολύ ισοσκελή τρίγωνα**, ανάλογα με τη θέση του σημείου M_5 πάνω στην ευθεία ε_2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y. \qquad (1)$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι για $y < 0$ η δεδομένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει ακέραιες λύσεις. Ομοίως για $y = 0$ η (1) δεν έχει ακέραια λύση

Για $y \in \mathbb{Z},\ y \geq 1,$ η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 6x^2 + \left(1 - 7 \cdot 2^y\right) = 0 \qquad (2)$$

η οποία για να έχει ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσα της αντίστοιχης επιλύουσας της (2) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, δηλαδή πρέπει

$$\Delta = 36 - 4\left(1 - 7 \cdot 2^y\right) = 32 + 4 \cdot 7 \cdot 2^y = 4 \cdot \left(8 + 7 \cdot 2^y\right)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Επειδή είναι $4 = 2^2$, για να είναι ο αριθμός Δ τέλειο τετράγωνο ακέραιου πρέπει και αρκεί ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 8 + 7 \cdot 2^y,\ y \geq 1$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Όμως ο αριθμός Α είναι άρτιος, οπότε, αν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε θα ισχύει ότι

$$\mathrm{A} = 8 + 7 \cdot 2^y = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 + 7 \cdot 2^{y-2} = \kappa^2, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0 \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) για $y = 1$ είναι αδύνατη, ενώ για $y = 2$ δίνει $\kappa = 3$, οπότε είναι $\mathrm{A} = 36$ και $\Delta = 4 \cdot 36 = 12^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 12}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \text{ ή } x^2 = -3 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Για $y = 3$, η εξίσωση (3) δίνει $\kappa = 4$, οπότε είναι $\mathrm{A} = 64$ και $\Delta = 4 \cdot 64 = 16^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 16}{2} \Leftrightarrow x^2 = 11 \text{ ή } x^2 = -5,$$

από τις οποίες καμία δεν είναι αποδεκτή.

Για $y \geq 4$, αφού ο ακέραιος $\mathrm{B} = 2 + 7 \cdot 2^{y-2}$ είναι άρτιος, η εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2 + 7 \cdot 2^{y-2} = (2\lambda)^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 + 7 \cdot 2^{y-3} = 2\lambda^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Άρα οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι: $(x, y) = (\pm 3, 2)$.

2ος τρόπος

Όπως και στον πρώτο τρόπο παρατηρούμε ότι για $y \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη στους ακέραιους.

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\left(x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 7 \cdot 2^y, \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 + 2x - 1 = 2^a,\ a \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b, b \in \mathbb{Z}_+ \\ a + b = y \end{array} \right\} (\Sigma_1) \text{ ή } \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}_+ \\ \kappa + \lambda = y \end{array} \right\} (\Sigma_2)$$

Λύση (Σ_1)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^a$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^a\right) = 4\left(2 + 2^a\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\mathrm{K} = 2 + 2^a$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $a = 0$ ή $a = 2$ ο αριθμός Κ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $a = 1$ είναι $\mathrm{K} = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = -3$ ή $x = 1$.

Για $x = -3$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^b$ η οποία έχει τη λύση $b = 1$, οπότε προκύπτει $y = a + b = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (-3, 2)$

Για $x = 1$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $-2 = 7 \cdot 2^b$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a \geq 3$, αφού ο αριθμός $\mathrm{K} = 2 + 2^a$ είναι άρτιος, πρέπει

$$\mathrm{K} = 2 + 2^a = (2m)^2, m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1 + 2^{a-2} = 2m^2, m \in \mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Λύση (Σ_2)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^\kappa\right) = 4\left(2 + 2^\kappa\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\Lambda = 2 + 2^\kappa$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $\kappa = 0$ ή $\kappa = 2$ ο αριθμός Λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $\kappa = 1$ είναι $\Lambda = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = 3$ ή $x = -1$.

Για $x = 3$ η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^\lambda$ η οποία έχει τη λύση $\lambda = 1$, οπότε προκύπτει $y = \kappa + \lambda = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (3, 2)$

Για $x=-1$ η εξίσωση $x^2+2x-1=7\cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $-2=7\cdot 2^\lambda$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a\geq 3$, αφού ο αριθμός $\Lambda=2+2^\lambda$ είναι άρτιος πρέπει

$$\Lambda=2+2^\kappa=(2m)^2, m\in\mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1+2^{\kappa-2}=2m^2, m\in\mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}. \tag{1}$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y δίνεται ότι $x+y=2\alpha$, $\alpha>0$, μπορούμε να θέσουμε:

$$x=\alpha+t,\ y=\alpha-t,\ -\alpha\leq t\leq\alpha.$$

Με αντικατάσταση των x,y στην (1), προκύπτει ότι, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}
&(\alpha+t)^3(\alpha-t)^3\left[(\alpha+t)^2+(\alpha-t)^2\right]^2\leq 4\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(\alpha^2-t^2\right)^3\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow & \left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^2-t^2\right)^2\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^{10},
\end{aligned}$$

η οποία αληθεύει, αφού λόγω της υπόθεσης $-\alpha\leq t\leq\alpha$ για τη νέα μεταβλητή t, έχουμε

$$\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^2\cdot\alpha^8=\alpha^{10}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $t=0$, δηλαδή όταν $x=y=\alpha$.

Παρατήρηση

Για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\alpha^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow x^3y^3\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^6=\alpha^6 \tag{2}$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=\alpha$.

Επίσης, για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$2\alpha^2\leq x^2+y^2\leq 4\alpha^2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow 4\alpha^4\leq\left(x^2+y^2\right)^2\leq 16\alpha^4 \tag{4}$$

όπου η ισότητα αριστερά ισχύει για $x=y=\alpha$, ενώ η ισότητα δεξιά ισχύει για $(x,y)=(2\alpha,0)$ ή $(0,2\alpha)$.

Όμως από τις (2) και (4) δεν μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα. Επομένως πρέπει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2=xy\left[xy\left(x^2+y^2\right)\right]^2=xyg(x,y),$$

υπό τη συνθήκη $x+y=2\alpha$. Όμως η συνάρτηση $g(x,y)=x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2$ έχει μέγιστη τιμή, όταν η συνάρτηση $h(x,y)=xy\left(x^2+y^2\right)$έχει μέγιστη τιμή, δηλαδή όταν η συνάρτηση

$$\varphi(x)=h(x,2\alpha-x)=x(2\alpha-x)\left(2x^2-4\alpha x+4\alpha^2\right),0\le x\le 2\alpha$$

έχει μέγιστη τιμή $\varphi(\alpha)=2\alpha^4$, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση παραγώγων. Από αυτό και την (1) μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

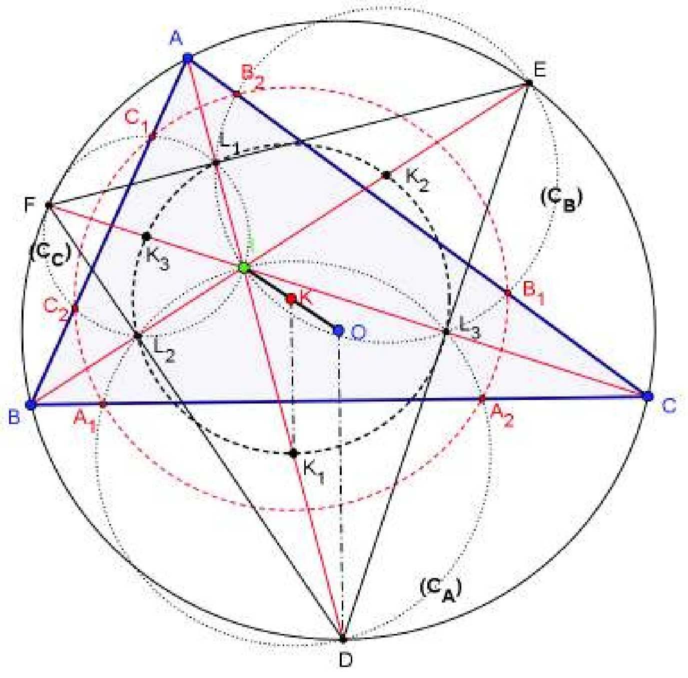
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω (C_A) ο κύκλος με κέντρο το K_1 και διάμετρο ID (K_1 το μέσο του ID), (C_B) ο κύκλος με κέντρο το K_2 και διάμετρο IE (K_2 το μέσο του IE) και (C_C) ο κύκλος με κέντρο το K_3 και διάμετρο IF (K_3 μέσο του IF).



Σχήμα 1

Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$DI=DB=DC,\ EI=EA=EC \text{ και } FI=FA=FB \qquad (1)$$

Οι κύκλοι (C_A) και (C_C) τέμνονται στα σημεία I και L_2.

Οι γωνίες $D\hat{L_2}I$ και $F\hat{L_2}I$ είναι ορθές διότι βαίνουν στις διαμέτρους DI και FI των κύκλων (C_A) και (C_C) οπότε τα σημεία D, L_2, F είναι συνευθειακά.

Σε συνδυασμό με τις ισότητες (1) καταλήγουμε ότι η DF είναι μεσοκάθετη της IB. Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι η DE είναι μεσοκάθετη της IC και η EF είναι μεσοκάθετη της IA.

Άρα το σημείο I είναι ορθόκεντρο του τριγώνου DEF του οποίου το περίκεντρο ταυτίζεται με το περίκεντρο O του τριγώνου ABC.

Τα σημεία K_1, K_2, K_3 και L_1, L_2, L_3 ανήκουν στο κύκλο του EULER του τριγώνου DEF που έχει κέντρο το μέσο K του ευθύγραμμου τμήματος IO.

Στο τρίγωνο IOD, έχουμε: K_1 το μέσο του ID και K το μέσο του IO.

Άρα $KK_1 \parallel OD$ και επειδή $OD \perp BC$ συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη του A_1A_2. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη των B_1B_2 και C_1C_2.

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

Θεωρώντας τη δύναμη του σημείου A ως προς τους κύκλους (C_B) και (C_C) έχουμε:

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2 = AI \cdot AL_1.$$

Άρα τα σημεία B_1, B_2, C_1, C_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

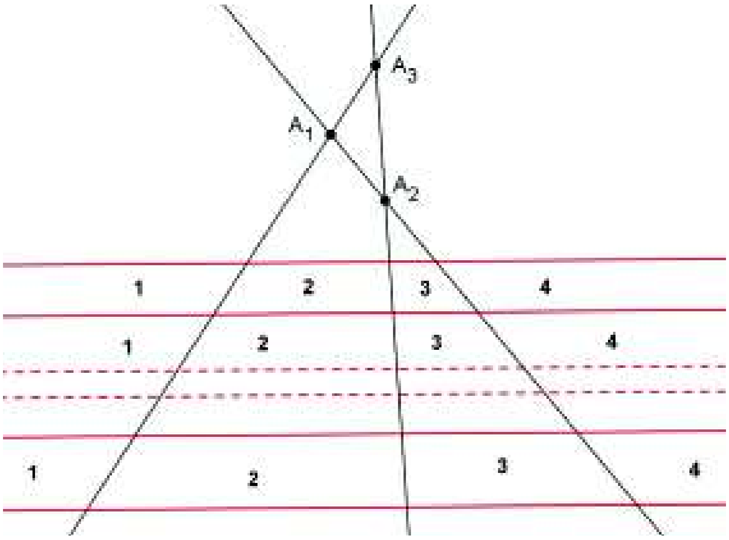
Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "*καλό*" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "*καλών*" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

Λύση

Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k-1$ διαδοχικές παράλληλες "λωρίδες" στο επίπεδο. Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ σημεία.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

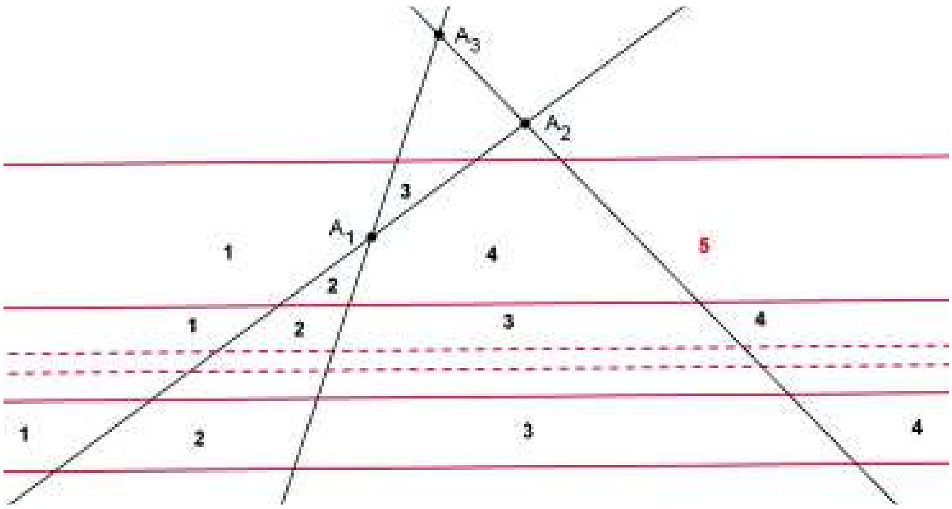
1η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων "λωρίδων".



Σχήμα 2

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε "λωρίδα" $n+1$ "καλά" χωρία. Άρα ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά "καλά" χωρία. Στο σχήμα 2 βλέπουμε τα "καλά" χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα των παράλληλων ευθειών, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επί πλέον "καλό" χωρίο (σχήμα 3).

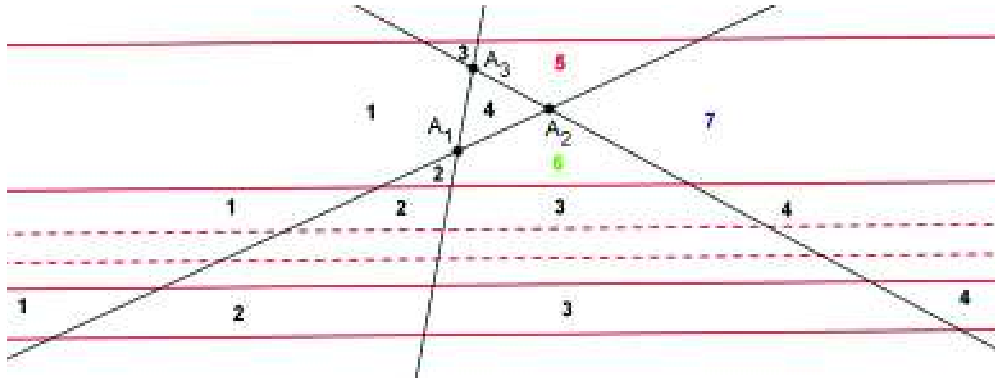


Σχήμα 3

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός "καλών" χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των "καλών" χωρίων.

2$^{\eta}$ Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις "λωρίδες", θα προστίθεται κάθε φορά και ένα "καλό" χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ "καλά" χωρία.



Σχήμα 4

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ (k-1)(n+1)+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}. \Leftrightarrow k=17, n=10.$$

Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

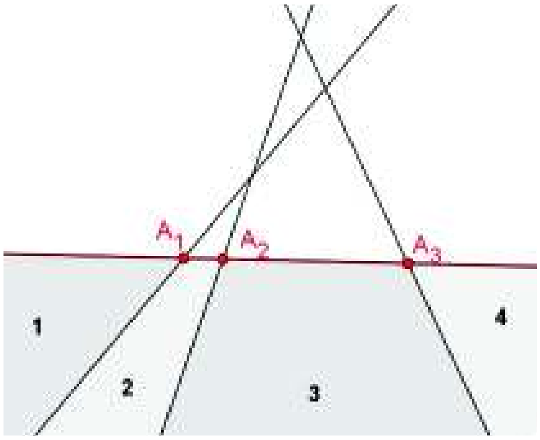
Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπ΄ όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1)=2$. Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1)=p(m)+r$, όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που "δημιουργούνται" με τη χάραξη της $(m+1)^{ης}$ ευθείας.



Σχήμα 5

Με τη χάραξη λοιπόν της $(m+1)^{ης}$ ευθείας "δημιουργούνται" τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα. Αν δηλαδή η $(m+1)$-ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση:

$$p(m)=p(m-1)+m \text{ και } p(1)=2\,.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

$$p(m)=\frac{m^2+m+2}{2}\,.$$

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που "δημιουργούνται", είναι: $\dfrac{n^2+n+2}{2}+k(n+1)$. Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.

ΘΕΜΑΤΑ 2011

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$28^η$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

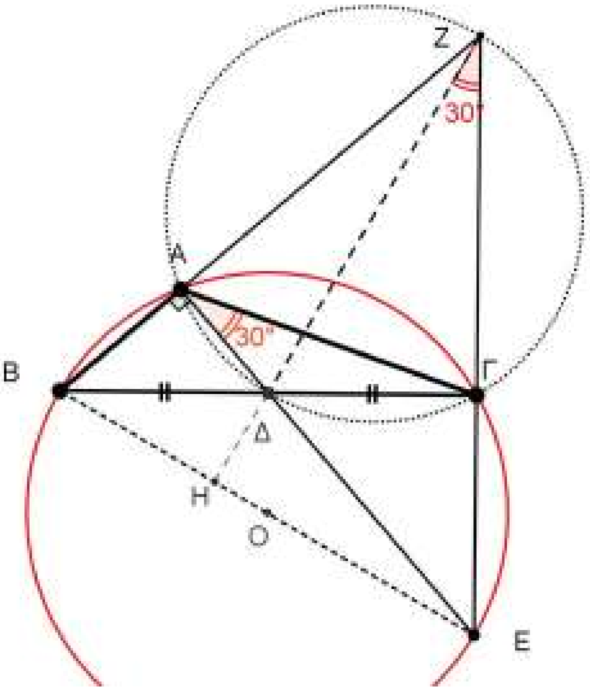
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$. Αν Δ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, δίνεται ότι η ευθεία $A\Delta$ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο E. Οι ευθείες BA και $E\Gamma$ τέμνονται στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\Delta \perp BE$, **(β)** $Z\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $B\hat{A}E = 90^\circ$ η ΒΕ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως θα είναι και $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο ΖΒΕ τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΒΓ είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο Δ.

Επομένως η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΖΒΕ, δηλαδή είναι $Z\Delta \perp BE$.



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι: $Z\hat{B}H = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$Z\hat{B}H = 180^\circ - \left(H\hat{B}Z + B\hat{Z}H\right) \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$H\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = E\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 120^\circ - 90^\circ + \Gamma\hat{B}A = 30^\circ + \hat{B}. \qquad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΓΖ (γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \hat{\Gamma} \qquad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = 180^\circ - \left(30^\circ + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(180^\circ - 120^\circ\right) = 90^\circ.$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα θα έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\mathrm{Z}$ η υποτείνουσα ΖΔ θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΔΓ, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = 2\cdot\Delta\Gamma = \mathrm{B}\Gamma$, αφού Δ μέσο της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha-\delta) + 100(\beta-\gamma) + 10(\gamma-\beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha-\delta) + 90(\beta-\gamma) \\ &= 9\big(111(\alpha-\delta) + 10(\beta-\gamma)\big). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 111(\alpha-\delta) + 10(\beta-\gamma).$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον $x > y$, θα ισχύει $\alpha > \delta$.

Η παράσταση Α γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν μέγιστοι και επί πλέον $\alpha - \delta > \beta - \gamma$. Η διαφορά $\alpha - \delta$ γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 9$ και $\delta = 1$. Η διαφορά $\beta - \gamma$ γίνεται μέγιστη όταν $\beta = 8$ και $\gamma = 2$.

Άρα $x = 9821$ και $y = 1289$ είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά $x - y = 9821 - 1289 = 8532$.

Η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $\alpha - \delta$ είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ) είναι:

$$(9,8), (8,7), (7,6)\ (6,5)\ (5,4)\ (4,3)\ (3,2) \text{ και } (2,1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ), η τιμή της παράστασης A γίνεται:

$$\mathrm{A} = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς $\beta - \gamma$ είναι το -8 που δημιουργείται για $\beta = 1$ και $\gamma = 9$.

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη (9,8) και (2,1) (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών x, y καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$.

Λύση

(α) Έστω $3\nu+1=7\kappa$, όπου ν,κ ακέραιοι. Ο ακέραιος ν έχει τη μορφή $\nu=7\rho+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ και ρ ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\upsilon)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\upsilon+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\upsilon+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το υ είναι το 2. Έτσι έχουμε $\nu=7\rho+2$, όπου ρ ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m=(7\rho+2)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(7\rho)^{m-i}\,2^i=\pi o\lambda.7+2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^m με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι $m=3\sigma+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$, τότε λαμβάνουμε:

$$2^m=2^{3\sigma+\upsilon}=8^\sigma\cdot 2^\upsilon=(7+1)^\sigma\cdot 2^\upsilon=(\pi o\lambda.7+1)\cdot 2^\upsilon=\pi o\lambda.7+2^\upsilon,$$

όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$. Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$ είναι τα $2^0=1$, $2^1=2$ και $2^2=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}. \qquad (1)$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{x}\,, \tag{2}$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4}\geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{4}}=\sqrt{y}\,, \tag{3}$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{4}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{4}}=\sqrt{z}\ . \tag{4}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=\frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^3}\left(\frac{z^2}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^7}z^8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z^7=4^7\Leftrightarrow x=y=z=4.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΕΜΕ
28^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2(2y-x)=x^2y^4-36.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2y^2(x-y)^2-6^2=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow [xy(x-y)-6]\cdot[xy(x-y)+6]=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}, \quad ή \quad xy(x-y)=-6,\ x,y\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}, \quad (1) \quad ή \quad xy(y-x)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}. \quad (2)$$

Από τη μορφή των (1) και (2) προκύπτει ότι, αν (x_0,y_0) είναι λύση της (1), τότε το ζευγάρι (y_0,x_0) είναι λύση της (2) και αντιστρόφως. Επομένως, αρκεί να λύσουμε μόνον την εξίσωση (1). Επειδή $x,y\in\mathbb{Z}$, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με :

$$\{xy=6,x-y=1\}(\Sigma_1)\text{ ή } \{xy=-6,x-y=-1\}(\Sigma_2)$$

$$\text{ή}\{xy=3,x-y=2\}(\Sigma_3)\text{ ή } \{xy=-3,x-y=-2\}(\Sigma_4)$$

$$\text{ή}\{xy=1,x-y=6\}(\Sigma_5)\text{ ή } \{xy=-1,x-y=-6\}(\Sigma_6)$$

$$\text{ή}\{xy=2,x-y=3\}(\Sigma_7)\text{ ή } \{xy=-2,x-y=-3\}(\Sigma_8).$$

Από τα 8 συστήματα μόνον τα (Σ_1), (Σ_3), (Σ_8) δίνουν τις ακέραιες λύσεις:

$$(x,y)=(3,2),(x,y)=(-2,-3),\ (x,y)=(3,1),$$

$$(x,y)=(-1,-3),\ (x,y)=(-2,1)\text{και } (x,y)=(-1,2).$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση (2) έχει στους ακέραιους τις λύσεις

$$(x,y)=(2,3),(x,y)=(-3,-2),(x,y)=(1,3),$$

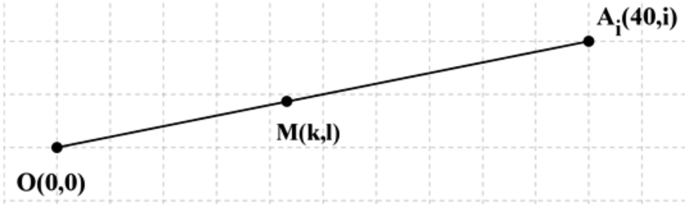
$$(x,y)=(-3,-1),(x,y)=(1,-2)\text{και } (x,y)=(2,-1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1)$, $A_2(40,2)$, …, $A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση.

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $\text{ΜΚΔ}(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l.



Σχήμα 1

Ένα σημείο $\text{M}(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ_i, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΜ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΑ}_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\leq 40$), δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40}=\frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\leq 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i "καλό", θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του "καλού" σημείου $\text{M}(k,l)$).

Επομένως, για να υπάρχει "καλό" σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως "καλό") θα πρέπει $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$. Αν τώρα $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$, τότε θα υπάρχουν $\text{ΜΚΔ}(40,i)-1$ "καλά" σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i. Στο σημείο $\text{Α}_2(40,2)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_2, στο οποίο ανήκει το "καλό" σημείο $(20,1)$. Στο σημείο $\text{Α}_4(40,4)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_4, στο οποίο ανήκουν τα "καλά" σημεία $(10,1)$, $(20,2)$, $(30,3)$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

Α2(40,2)	ΜΚΔ(40,2)=2	1	Α40(40,40)	ΜΚΔ(40,40)=40	39
Α4(40,4)	ΜΚΔ(40,4)=4	3	Α38(40,38)	ΜΚΔ(40,38)=2	1
Α5(40,5)	ΜΚΔ(40,5)=5	4	Α36(40,36)	ΜΚΔ(40,36)=4	3
Α6(40,6)	ΜΚΔ(40,6)=2	1	Α35(40,35)	ΜΚΔ(40,35)=5	4
Α8(40,8)	ΜΚΔ(40,8)=8	7	Α34(40,34)	ΜΚΔ(40,34)=2	1
Α10(40,10)	ΜΚΔ(40,10)=10	9	Α32(40,32)	ΜΚΔ(40,32)=8	7
Α12(40,12)	ΜΚΔ(40,12)=4	3	Α30(40,30)	ΜΚΔ(40,30)=10	9
Α14(40,14)	ΜΚΔ(40,14)=2	1	Α28(40,28)	ΜΚΔ(40,28)=4	3
Α15(40,15)	ΜΚΔ(40,15)=5	4	Α26(40,26)	ΜΚΔ(40,26)=2	1
Α16(40,16)	ΜΚΔ(40,16)=8	7	Α25(40,25)	ΜΚΔ(40,25)=5	4

A18(40,18)	ΜΚΔ(40,18)=2	1	A24(40,24)	ΜΚΔ(40,24)=8	7
A20(40,20)	ΜΚΔ(40,20)=20	19	A22(40,22)	ΜΚΔ(40,22)=2	1
		60			**80**

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη:
$$\text{ΜΚΔ}(k,l)=\text{ΜΚΔ}(l,k)=\text{ΜΚΔ}(l-k,k)=\text{ΜΚΔ}(|l-k|,|k|).$$
3. Το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης ϕ του Euler. Είναι γνωστό ότι $n-\phi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν. Επειδή όμως $40=5\cdot 2^3$, έχουμε:
$$\phi(40)=40\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=40\frac{1}{2}\frac{4}{5}=16.$$
Άρα το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων είναι $40-\phi(40)=24$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου ως εξής:
$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{a^2+2bc+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+2bc+24\right),$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{b^2+2ca+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(b^2+2ca+24\right),$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{c^2+2ab+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(c^2+2ab+24\right),$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le\frac{1}{3\sqrt[2]{12^2}}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+72\right)$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left[\left(a+b+c\right)^2+72\right]=\frac{36}{\sqrt[3]{12^2}}=\frac{18}{\sqrt[3]{18}}=3\sqrt[3]{12}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$a^2+2bc=12,\ b^2+2ca=12,\ c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c)=0,(b-c)(b+c-2a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(6-3c)=0,(b-c)(6-3a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow a=b=c=2.$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $3\sqrt[3]{12}$ και λαμβάνεται όταν είναι $a=b=c=2$.

Παρατήρηση

1. *Η επιλογή του αριθμού 12 ως δεύτερου και τρίτου όρου για την εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου οφείλεται στο ότι μόνον για αυτόν είναι δυνατόν να αληθεύει η ισότητα και στις τρεις επιμέρους ανισότητες. Αυτό είναι αναγκαίο για είναι δυνατόν η παράσταση να πάρει την τιμή που εμφανίζεται ως ένα πάνω φράγμα της. Για παράδειγμα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει τις ανισότητες*

$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\sqrt[3]{(a^2+2bc)\cdot 1\cdot 1}\le\frac{a^2+2bc+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\sqrt[3]{(b^2+2ca)\cdot 1\cdot 1}\le\frac{b^2+2ca+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\sqrt[3]{(c^2+2ab)\cdot 1\cdot 1}\le\frac{c^2+2ab+2}{3},$$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα βρίσκαμε

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6}{3}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2+6}{3}=\frac{42}{3}=14.$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να αληθεύει, όπως προκύπτει από το σύστημα

$$a^2+2bc=1,\ b^2+2ca=1,\ c^2+2ab=1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)^2=3,\ \text{άτοπο.}$$

2. *Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό*

$$x=\sqrt[3]{a^2+2bc},\ y=\sqrt[3]{b^2+2ca},\ z=\sqrt[3]{c^2+2ab},$$

μέσω του οποίου η συνάρτηση γίνεται $S(x,y,z)=x+y+z$, *της οποίας ζητάμε τη μέγιστη τιμή υπό τη συνθήκη* $x^3+y^3+z^3=(a+b+c)^2=36$. *Στη συνέχεια θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει* ***τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange****, χωρίς σοβαρό πρόβλημα στις πράξεις. Επίσης θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί χρησιμοποιώντας και άλλες κλασικές ανισότητες, όπως η ανισότητα του Holder ή την ανισότητα των δυνάμεων.*

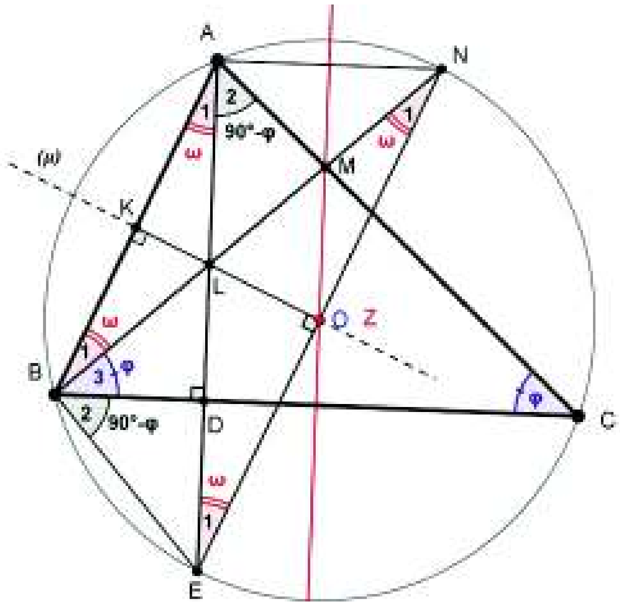
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο $\boldsymbol{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$, δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB // EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



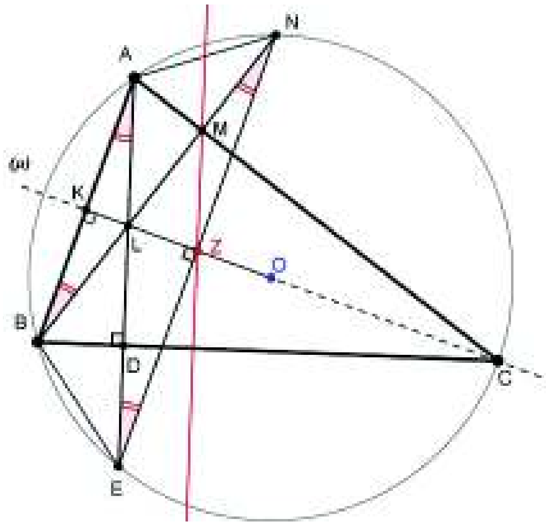
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ***ταυτίζεται με το σημείο*** O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$. Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Έστω ότι το τρίγωνο ABC ***είναι ισοσκελές*** **(**$CA = CB$**).** Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια ***το σημείο*** M ***είναι το μέσο του τμήματος*** LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

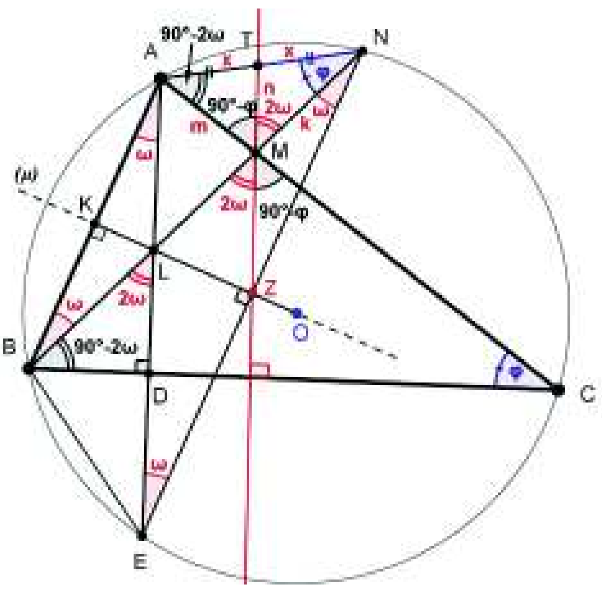
Το σημείο Z ***είναι το μέσο του τμήματος*** EN (διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ ***είναι κάθετη στην*** BC ***και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο*** ABC ***είναι ισοσκελές (***$CA = CB$***) ή το σημείο*** Z ***ταυτίζεται με το κέντρο*** O ***του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).***

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC. Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ \parallel AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ \parallel AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ \parallel AE$, προκύπτει η "μεταφορά" γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD \,//\, MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}mn\,\eta\mu(90-\varphi) = \frac{1}{2}mx\,\eta\mu(90-2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}kn\,\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}kx\,\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\,2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\,2\omega}{\eta\mu\,\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu\,2\varphi = \eta\mu\,4\omega\,.$$

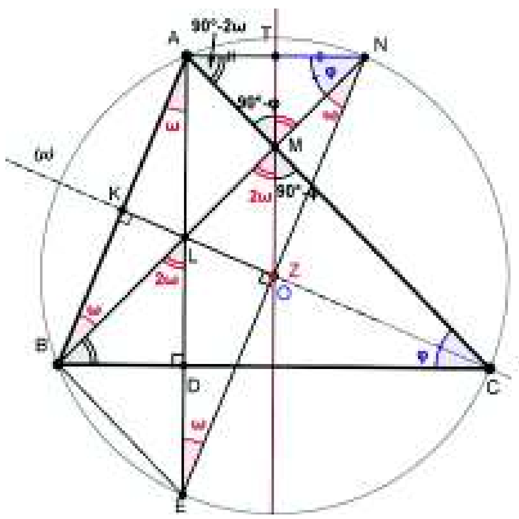
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \qquad (A) \quad ή \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \qquad (B)\,.$$

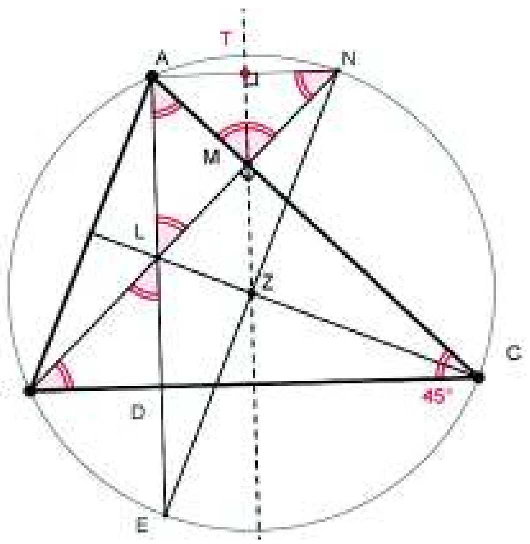
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM = TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N = 90^o$). Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T, δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC *είναι ισοσκελές με* $CA = CB$ *και* $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^o$, *τότε τα τρίγωνα* TMN, TMA *και* AMN *είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο* $ABCN$ *είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η* TM *είναι μεσοκάθετη της* BC.

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z *ταυτίζεται με το σημείο* O, *οπότε η διάζευξη των προτάσεων* $\left(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O\right)$ *είναι εγκλειστική.*

ΘΕΜΑΤΑ 2012

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB) τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι η πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

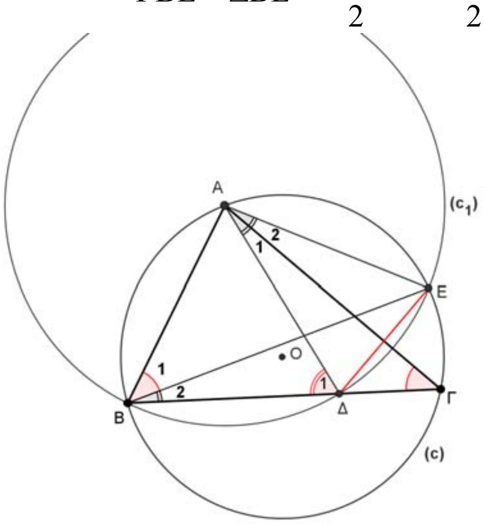
Λύση (1ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (σχήμα 1) και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{E}}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή έχουμε

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}. \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ που είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ και βάνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\mathrm{E}}$, ενώ η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$. Επομένως έχουμε

$$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}, \tag{3}$$

από την οποία προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

2ος τρόπος

Οι χορδές ΑΒ και ΑΕ του κύκλου *(c)* είναι ίσες μεταξύ τους, ως ακτίνες του κύκλου *(c_1)*, οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = A\hat{E}B. \tag{3}$$

Όμως οι γωνίες $A\hat{E}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O, R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή

$$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = \hat{\Gamma} \tag{5}$$

και επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \tag{6}$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}B = \hat{B}$ και επειδή η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \tag{7}$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2. \tag{8}$$

Επιπλέον, οι γωνίες $\hat{B}_2$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O, R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E = \hat{B}_2. \tag{9}$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) λαμβάνουμε την ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left| |x-4| - 2x + 8 \right| = ax + 4.$$

Λύση

Με σκοπό την απαλλαγή από την απόλυτη τιμή του $x - 4$, θεωρούμε τις περιπτώσεις:

I. $x \geq 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = x - 4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|x - 4 - 2x + 8| = ax + 4 \Leftrightarrow |-(x-4)| = ax + 4 \Leftrightarrow |x-4| = ax + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = ax + 4 \Leftrightarrow (1-a)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = 1$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.

- Για $a \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8}{1-a}$, μόνον όταν

  $\dfrac{8}{1-a} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1-a} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+a}{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) \leq 0, a \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 1$.

  Για $a < -1$ ή $a \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

II. $x < 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = -x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|-x+4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-3(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |3(x-4)| = ax+4$$

$$\Leftrightarrow -3x+12 = ax+4 \Leftrightarrow (a+3)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = -3$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.
- Για $a \neq -3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$, μόνον όταν

$$\frac{8}{a+3} < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{a+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-a-1}{a+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(a+1) > 0,\ a \neq -3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ ή } a > -1.$$

  Για $-3 < a \leq -1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μικρότερη του 4.

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

- Για $a < -3$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$.
- Για $-3 \leq a < -1$, η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Για $a = -1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{1-a}$.
- Για $-1 < a < 1$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = \dfrac{8}{1-a}$ και $x = \dfrac{8}{a+3}$.
- Για $a \geq 1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{ΕΚΠ}\{m,n\} + \text{ΜΚΔ}\{m,n\} = m+n. \qquad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m,n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

Λύση

(α) Έστω ότι $\text{ΜΚΔ}\{m,n\} = d$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a,b τέτοιοι ώστε:

$$m = ad,\ n = bd \text{ και } \text{ΜΚΔ}\{a,b\} = 1.$$

Τότε θα ισχύει ότι $\text{ΕΚΠ}\{m,n\} = \dfrac{mn}{d} = \dfrac{adbd}{d} = abd$ και η εξίσωση (*) γίνεται:

$$abd + d = ad + bd \Leftrightarrow d(ab+1-a-b) = 0,$$

από την οποία, αφού $d \geq 1$, προκύπτει ότι:

$$ab+1-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ή } b=1.$$

- Αν είναι $a=1,$ τότε $m=d$ και $n=bd \geq d=m,$ άτοπο.
- Αν είναι $b=1$, τότε $n=d$ και $m=ad$, οπότε προκύπτει ότι $n|m$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε $n=d$ και $m=ad$, με $a>1,$ αφού $m>n,$ οπότε

$$m-n=10 \Leftrightarrow ad-d=10 \Leftrightarrow (a-1)d=10.$$

Επειδή οι αριθμοί $a-1, d$ είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$(a-1,d) \in \{(1,10),(2,5),(5,2),(10,1)\} \Leftrightarrow (a,d) \in \{(2,10),(3,5),(6,2),(11,1)\},$$

οπότε λαμβάνουμε τα ζευγάρια

$$(m,n)=(20,10) \text{ ή } (15,5) \text{ ή } (12,2) \text{ ή } (11,1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε ,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε .

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

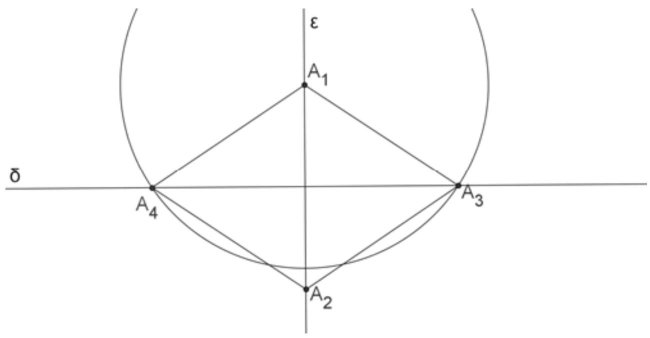
Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι από τέσσερα σημεία που ανά τρία είναι μη συνευθειακά, ορίζονται συνολικά $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$ διαφορετικά τρίγωνα. Επομένως, ο μέγιστος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων που μπορεί να οριστούν με κορυφές τρία από τα από τα τέσσερα σημεία είναι 4. Στη συνέχεια, για τις περιπτώσεις (α) και (β), θα προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, έτσι ώστε να ορίζονται τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα από τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4. Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις σε σχέση με τη βάση και τις ίσες πλευρές. Στη πρώτη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι βάση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι μία από τις ίσες πλευρές. Έχοντας στο νου μας αυτές τις δύο δυνατότητες, προσπαθούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4.

(α) *Τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε .*

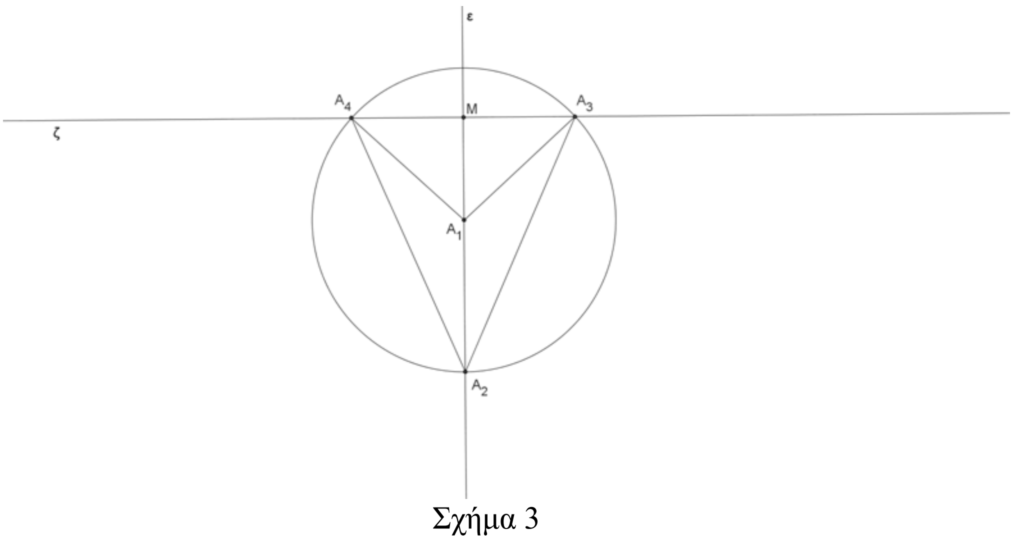
Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Η πρώτη περίπτωση είναι τα σημεία A_3 και A_4 να ανήκουν στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε. Τότε ορίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$. Αν επιπλέον το σημείο A_4 είναι η τομή της μεσοκάθετης δ με τον κύκλο $c\left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\right)$, τότε θα είναι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$, αλλά και $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$ (λόγω συμμετρίας), οπότε και τα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ και $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ είναι ισοσκελή, σχήμα 2.



Σχήμα 2

- Η δεύτερη περίπτωση είναι γενίκευση της πρώτης. Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, πάνω σε τυχούσα ευθεία ζ κάθετη προς την ευθεία ε, όχι στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$, αλλά και πάνω στον κύκλο $c\left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right)$, ώστε να εξασφαλίζονται οι ισότητες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ και $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4 = \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$, αφού η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη της χορδής $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$, σχήμα 3.



Σχήμα 3

- Στη περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι βάση στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και μία από τις ίσες πλευρές στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$, σχήμα 4. Τα ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3$, αλλά και τα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$ και $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, $\mathrm{A}_4\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3\mathrm{A}_2$ και $\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_4\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$. Άρα έχουμε και τις ισότητες των γωνιών:

$$\theta = \omega \text{ και } \varphi = x. \qquad (1)$$

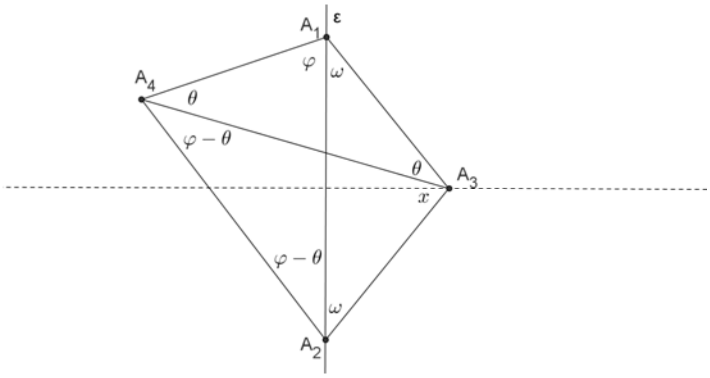
Από το τρίγωνο $\mathrm{A_1A_3A_4}$ προκύπτει η ισότητα:

$$\varphi+\omega+2\theta=180^0 \text{ ή } \varphi+3\theta=180^0, \qquad (2)$$

ενώ από το τρίγωνο $\mathrm{A_2A_3A_4}$ προκύπτει η ισότητα

$$2(\varphi-\theta)+x+\omega=180^0 \Rightarrow 3\varphi-\theta=180^0 \ . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) λαμβάνουμε: $\varphi=72^0$ και $\theta=36^0$.

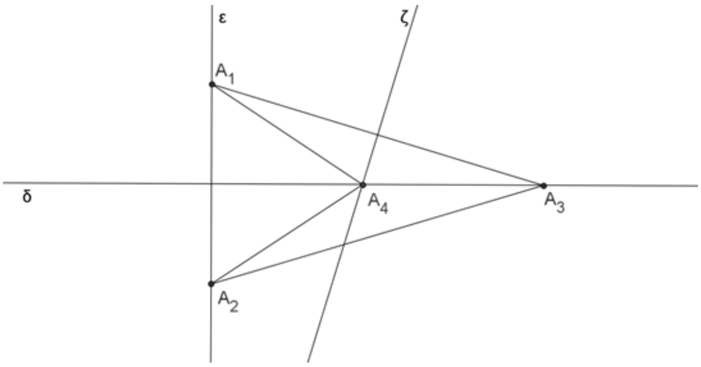


Σχήμα 4

(β) *Τα σημεία* $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$ *ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία* ε.

Έχουμε τρεις δυνατές περιπτώσεις:

- Το σημείο $\mathrm{A_3}$ ανήκει στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{A_1A_2}$ και το σημείο $\mathrm{A_4}$ λαμβάνεται ως η τομή των μεσοκάθετων δ και ζ των ευθύγραμμων τμημάτων $\mathrm{A_1A_2}$ και $\mathrm{A_1A_3}$, αντίστοιχα. Τότε και τα τέσσερα τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία $\mathrm{A_1, A_2, A_3}$ και $\mathrm{A_4}$ είναι ισοσκελή.



Σχήμα 5

Για να ανήκει το σημείο $\mathrm{A_4}$ στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο $\mathrm{A_3}$ θα πρέπει το τρίγωνο $\mathrm{A_1A_2A_3}$ να είναι οξυγώνιο, σχήμα 5.

- Τα σημεία $\mathrm{A_3}$ και $\mathrm{A_4}$ λαμβάνονται έτσι ώστε το τετράπλευρο $\mathrm{A_1A_2A_3A_4}$ να είναι ρόμβος (ή τετράγωνο), δηλαδή πρέπει για το τετράγωνο να ισχύουν

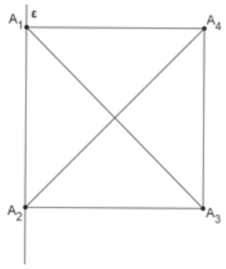
$\mathrm{A_1A_2 = A_1A_4 = A_2A_3}$ και $\mathrm{A_1A_2 \perp A_1A_4}$, $\mathrm{A_1A_2 \perp A_2A_3}$, σχήμα 6,

ενώ για το ρόμβο πρέπει να ισχύουν

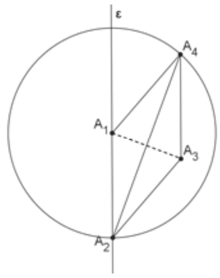
$\mathrm{A_1A_2 = A_1A_4 = A_2A_3 = A_2A_4}$, σχήμα 7.

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε πρώτα το σημείο $\mathrm{A_4}$ πάνω στο κύκλο $c(\mathrm{A_1, A_1A_2})$ έτσι ώστε $\mathrm{A_1A_2 = A_1A_4}$ και στη συνέχεια θεωρούμε το σημείο $\mathrm{A_3}$ συμμετρικό του $\mathrm{A_1}$ ως προς την ευθεία $\mathrm{A_2A_4}$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να θεωρηθούν τα σημεία A_3 και A_4 στο άλλο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

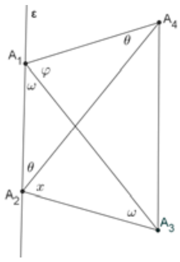


Σχήμα 6

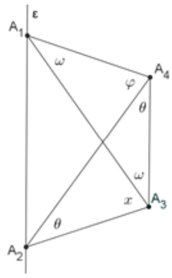


Σχήμα 7

- Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σημεία A_3 και A_4 σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, έτσι ώστε να σχηματίζονται από αυτά τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, σχήμα 8 και 9. Εργαζόμενοι όπως στην τρίτη υποπερίπτωση του (α), λαμβάνουμε τις ισότητες $\omega = \theta = 36^0$ και $\varphi = x = 72^0$.



Σχήμα 8

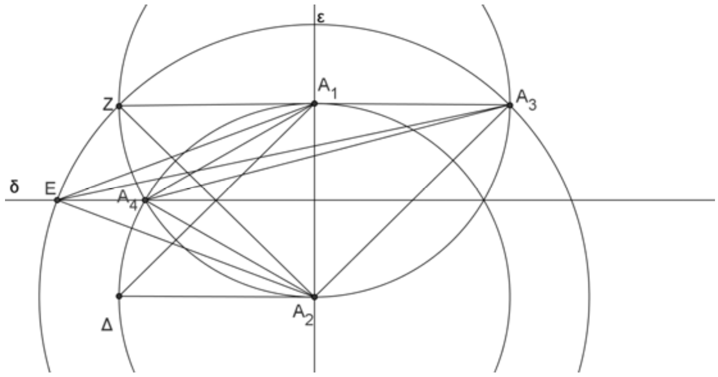


Σχήμα 9

Παρατηρήσεις

1. Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις έχουμε ισοσκελές τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$ του οποίου οι δύο ίσες πλευρές ισούνται με τη μικρή βάση του. Οι τρεις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου $A_1A_2A_3A_4$ αντιστοιχούν σε πλευρές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο που περνάει από τρεις κορυφές του, σχήματα 9 και 10. Αντίστοιχη παρατήρηση μπορεί να γίνει για την τρίτη υποπερίπτωση του (α), σχήμα 4.

2. Στην περίπτωση (α) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σημείο A_3 σε τέτοια θέση, ώστε να ισχύουν: $A_1A_3 = A_1A_2$ και $A_1A_3 \perp A_1A_2$, οπότε το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, σχήμα 10. Στη συνέχεια το σημείο A_4 πρέπει να τοποθετηθεί σε διαφορετικό ημιεπίπεδο σε σχέση με το A_3. Οι πιθανές θέσεις του φαίνονται στο σχήμα 10, αλλά στις τρεις περιπτώσεις ορίζονται τρία ακριβώς ισοσκελή τρίγωνα και στην τέταρτη με $A_4 \equiv \Delta$ μόνο δύο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν επιτυγχάνεται ο ορισμός του μέγιστου δυνατού αριθμού ισοσκελών τριγώνων.



Σχήμα 10

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q\,,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p,q).

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$q(q-1)=p\left[\left(n^2+1\right)p-1\right]. \tag{1}$$

Επειδή είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=1$, από την (1) έπεται ότι $p\,|\,q-1$, $q\,|\left(n^2+1\right)p-1$ και

$$\frac{q-1}{p}=\frac{\left(n^2+1\right)p-1}{q}=k, \tag{2}$$

όπου k θετικός ακέραιος. Από τις εξισώσεις (2) λαμβάνουμε

$$q=kp+1 \ \text{ και } \ p=\frac{k+1}{n^2+1-k^2}\,. \tag{3}$$

Επειδή ο p είναι θετικός ακέραιος, από την (3) έπεται ότι:

$$0<n^2+1-k^2\le k+1\Rightarrow k^2<n^2+1\le k^2+k+1$$

$$\Rightarrow k^2-1<n^2\le k^2+k\Rightarrow k^2\le n^2\le k^2+k<(k+1)^2\,,$$

οπότε προκύπτει ότι $k=n$. Έτσι από τις σχέσεις (3) λαμβάνουμε:

$$p=\frac{n+1}{n^2+1-n^2}=n+1 \text{ και } q=n(n+1)+1=n^2+n+1\,.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ζευγάρι $(p,q)=\left(n+1,\,n^2+n+1\right)$ επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση και ότι ισχύει: ΜΚΔ$\{p,q\}=1$. Πράγματι, αν είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=d$, τότε $d\,|\,(q-np)=1$, οπότε θα είναι $d=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P\left(x^2\right)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\,.$$

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους έχει μεταξύ των ριζών του τις ρίζες πέμπτης τάξεως της μονάδας: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, όπου $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\omega^5=1$ και $\omega^6=\omega,\ \omega^8=\omega^3$.

Από την (1) λαμβάνουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^4\right), P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^6\right)=P(\omega), P\left(\omega^4\right)=P\left(\omega^8\right)=P\left(\omega^3\right),$$

οπότε θα έχουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^4\right).$$

Αν b είναι η κοινή τιμή των $P(\omega), P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^3\right)$ και $P\left(\omega^4\right)$, τότε το πολυώνυμο $P(x)-b$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, οπότε θα ισχύει:

$$P(x)-b=(x-\omega)\left(x-\omega^2\right)\left(x-\omega^3\right)\left(x-\omega^4\right)R(x)$$
$$\Leftrightarrow P(x)=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)R(x)+b.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πολυώνυμο $R(x)$ και επίσης πρέπει $b\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έπεται ότι το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν είναι $R(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται ο βαθμός του, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\left(x^5-1\right)Q(x)=0$, από την οποία, δεδομένου ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, έπεται ότι $Q(x)=0$, που είναι μη αποδεκτό. Επομένως το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερό πολυώνυμο, έστω $R(x)=a\neq 0$. Τότε θα έχουμε

$$P(x)=a\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+b=a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)+c,$$

όπου $a\in\mathbb{R}^*$, $c=a+b\in\mathbb{R}$.

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται

$$P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^8+x^6+x^4+x^2\right)-a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^8-x^3+x^6-x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^3+x\right)\left(x^5-1\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow \left(x^5-1\right)\left[a\left(x^3+x\right)-Q(x)\right]=0.$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων έπεται ότι: $Q(x)=a\left(x^3+x\right),\ a\in\mathbb{R}^*$.

2ος τρόπος

Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου του δευτέρου μέλους της (1) είναι 5, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους είναι άρτιος, οπότε θα έχουμε

$$\min\deg Q(x)=1 \text{ και } \min\deg P(x)=3.$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\ a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},\ a_3\neq 0,$ τότε από τη δεδομένη ισότητα πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|P(x^2)-P(x)=a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3(x^6-x^3)+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3\left[x(x^5-1)+(x-x^3)\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3\left[x(x^5-1)\right]+a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0$, οπότε λαμβάνουμε $a_2=a_3=0,\ a_1-a_2=0,\ a_1-a_3=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$, άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύει η δεδομένη ισότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, με $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}, a_4\in\mathbb{R}^*$. Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|P(x^2)-P(x)=a_4x^8+a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_4\left[(x^5-1)x^3+x^3\right]+a_3\left[(x^5-1)x+x\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|(x^5-1)(a_4x^3+a_3x)+(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbb{R}^*,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_4(x^4+x^3+x^2+x)+a_0,a_4\in\mathbb{R}^*,a_0\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

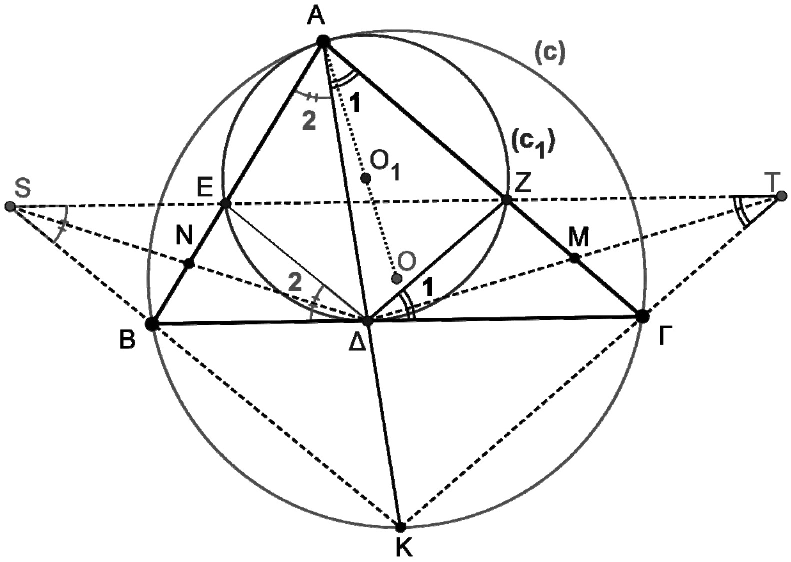
$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)(a_4x^3+a_4x)=(x^5-1)Q(x)\Rightarrow Q(x)=a_4(x^3+x),a_4\in\mathbb{R}^*.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

Λύση

Εφόσον το κέντρο του κύκλου c_1 βρίσκεται επάνω στην ΟΑ, οι κύκλοι c και c_1 θα εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Δηλαδή οι κύκλοι c και c_1 είναι ομοιόθετοι στη ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Α και λόγο λ (λ είναι ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων).



Σχήμα 1

Αν λοιπόν κάποια ευθεία περνάει από το σημείο Α και τέμνει τους κύκλους c και c_1 στα σημεία Θ και Θ_1 αντίστοιχα, τότε $\mathrm{A\Theta} = \lambda \mathrm{A\Theta_1}$.

Με βάση τις προηγούμενες σκέψεις έχουμε:

Η ΒΓ είναι ομοιόθετη της ΕΖ, οπότε $\mathrm{B\Gamma} // \mathrm{EZ}$. Η ΚΓ είναι ομοιόθετη της ΔΖ, οπότε $\mathrm{K\Gamma} // \Delta\mathrm{Z}$. Έστω Τ το σημείο τομής των ΕΖ και ΚΓ. Τότε το ΔΖΤΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα και η ΔΜ θα περνάει από το σημείο Τ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το ΔESB είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το σημείο S.

Εφόσον το Ο είναι το ομοιόθετο του $\mathrm{O_1}$ και Κ το ομοιόθετο του Δ, συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{O_1}\Delta // \mathrm{OK}$ και επειδή $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B\Gamma}$ (διότι Κ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ), συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{O_1}\Delta \perp \mathrm{B\Gamma}$.

Άρα η ΒΓ εφάπτεται του κύκλου $c_1(\mathrm{O_1}, R_1)$ στο σημείο Δ.

Εφόσον Δ είναι το σημείο επαφής έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

(οι γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη)

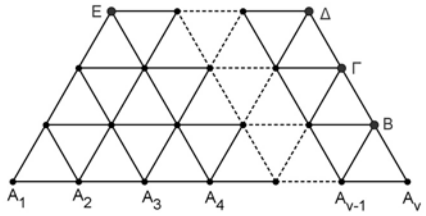
Σε συνδυασμό τώρα με τα παραλληλόγραμμα ΔESB και ΔΖΤΓ, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{T}} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

Άρα το τετράπλευρο ΒΓTS είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS (διότι είναι μεσοκάθετη της βάσης του ΒΓ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\mathrm{A_1E}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\mathrm{A_1A_\nu}$ έχει μήκος $\nu - 1$. Ξεκινάμε από το σημείο $\mathrm{A_1}$ και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).

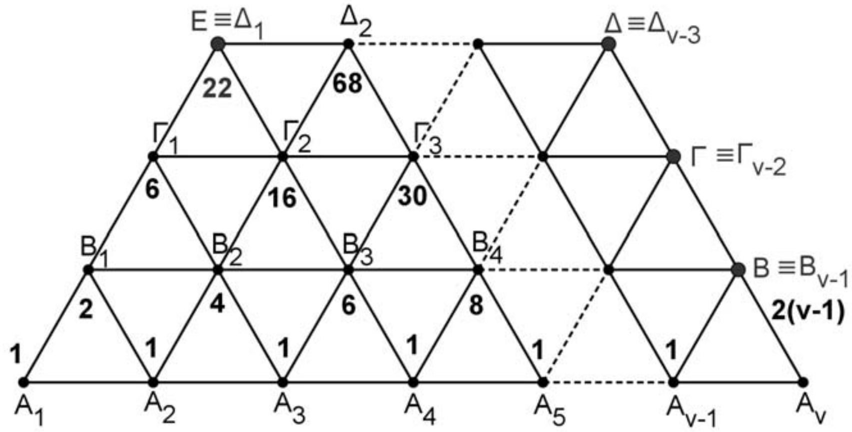


Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}$, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Λύση

Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\nu$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{\nu-1} \equiv \mathrm{B}$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{\nu-2} \equiv \Gamma$. Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{E} \equiv \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{\nu-3} \equiv \Delta$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα). Για παράδειγμα, με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.



Σχήμα 2

Προφανώς $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \cdots = \alpha_\nu = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + a_2 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3),$$

$$\beta_3 = \beta_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 2a_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4$$
$$= \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_4),$$

και γενικά λαμβάνουμε

$$\beta_k = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k+1}) - (\alpha_1 + \alpha_{k+1}) = 2(k+1) - 2 = 2k, \; ,$$

για $k = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 1)$.

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\beta = \beta_{\nu-1} = 2(\nu - 1)}.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_{i+1}) - (\beta_1 + \beta_{i+1}) = \\ &= 2(2 + 4 + \cdots + 2(i+1)) - (2 + 2i + 2) = \\ &= 4(1 + 2 + \cdots + (i+1)) - (4 + 2i) = \\ &= 2(i+1)(i+2) - 2(i+2) = \\ &= 2i(i+2), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 2).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\gamma = \gamma_{\nu-2} = 2\nu(\nu - 2)}.$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{m+1}) - (\gamma_1 + \gamma_{m+1}) = \\ &= 4\underbrace{\big(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + (m+1)(m+3)\big)}_{S} - 2\big(1\cdot 3 + (m+1)(m+3)\big) = \\ &= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6} - 2\big(1\cdot 3 + (m+1)(m+3)\big) = \ldots\ldots.. \\ &= \frac{2}{3}m(2m^2 + 12m + 19), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 3)..\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\delta = \delta_{\nu-3} = \frac{2}{3}(\nu - 3)(2\nu^2 + 1)}.$$

Απ’ ευθείας μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: $\varepsilon = 22$.

<u>Υπολογισμός του αθροίσματος</u>: $S = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + (m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2) = x^2 + 2x$ για $x = 1, x = 2. \ldots, x = m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot 3 &= 1^2 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 4 &= 2^2 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 5 &= 3^2 + 2\cdot 3 \\ &\vdots \\ m(m+2) &= m^2 + 2m \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + 2\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.

ΘΕΜΑΤΑ 2013

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A}=k^4+4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}k^4+4&=\left(k^2\right)^2+4k^2+2^2-4k^2=\left(k^2+2\right)^2-(2k)^2\\&=\left(k^2+2-2k\right)\left(k^2+2+2k\right)=\left[(k-1)^2+1^2\right]\left[(k+1)^2+1^2\right].\end{aligned}$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος επί $\left(2^4\right)^n$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}&=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n)^4+\frac{1}{4}\right]}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n-1)^4+\frac{1}{4}\right]}\\&=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\cdots\left[(4n)^4+4\right]}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\cdots\left[(4n-2)^4+4\right]}\\&=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\left(13^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}\\&=\frac{(4n+1)^2+1}{1^2+1}=8n^2+4n+1=4n^2+4n^2+4n+1=(2n)^2+(2n+1)^2.\end{aligned}$$

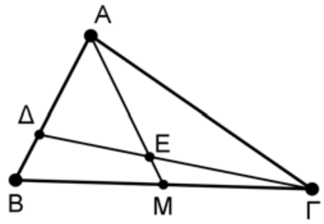
Παρατήρηση. Για το ερώτημα (β) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την παραγοντοποίηση

$$k^4+\frac{1}{4}=\left(k^2+\frac{1}{2}\right)^2-k^2=\left(k^2+\frac{1}{2}-k\right)\left(k^2+\frac{1}{2}+k\right)=\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Για την απλοποίηση του κλάσματος εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

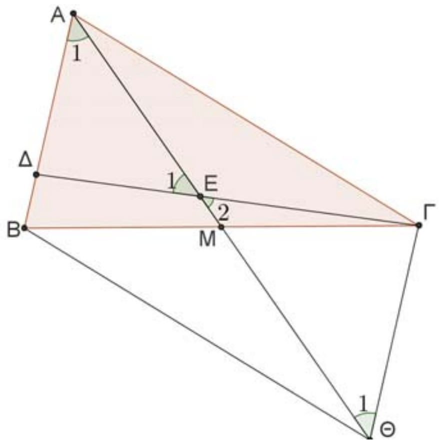
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$. Στην πλευρά $ΑΒ$ θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $ΓΔ$ τέμνει τη διάμεσο $ΑΜ$ στο σημείο $Ε$, τότε ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΓΕ$.



Λύση (1ος τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο $ΑΜ$ κατά τμήμα $ΜΘ = ΑΜ$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΑΒΘΓ$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $ΑΒ \parallel ΓΘ$ και $\hat{Α}_1 = \hat{Θ}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $ΑΔ = ΔΕ$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$ και επιπλέον $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{Θ}_1 = \hat{Ε}_2$, οπότε το τρίγωνο $ΕΓΘ$ είναι ισοσκελές με $ΓΕ = ΓΘ$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $ΑΒΘΓ$ έχουμε ότι $ΑΒ = ΓΘ$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $ΑΒ = ΓΕ$.

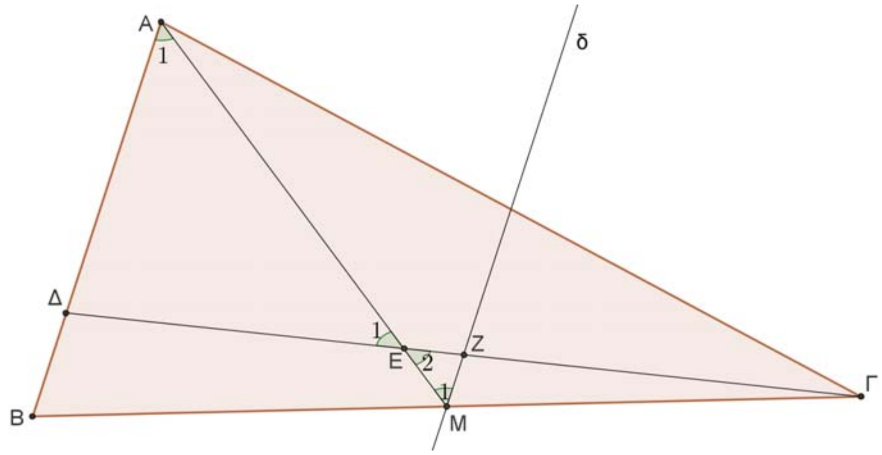
2ος τρόπος

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ, άρα και προς την πλευρά ΒΔ του τριγώνου ΒΓΔ, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, έστω στο σημείο Ζ. Τότε το Ζ θα είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, δηλαδή

$$ΓΖ = ΖΔ \qquad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$ΒΔ = 2\cdot ΜΖ. \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{M}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές με

$$ZM = EZ. \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma E &= \Gamma Z + ZE \\ &= \Delta Z + ZE && \text{(λόγω της (1))} \\ &= \Delta E + 2\cdot ZM && \text{(λόγω της (3))} \\ &= A\Delta + \Delta B = AB. && \text{(λόγω της υπόθεσης και της (2))} \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A+B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττούς ακέραιους, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$A + B = (a+d)\cdot 10^3 + (b+c)\cdot 10^2 + (b+c)\cdot 10 + (a+d).$$

Από την υπόθεση, όλα τα ψηφία του ακέραιου $A+B$ είναι περιττοί ακέραιοι. Όμως για την εύρεση των ψηφίων του ακεραίου $A+B$ πρέπει να ξέρουμε αν οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$ είναι μικρότεροι του 10. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε:

$$a + d = 10 + k, k = 0,1,2,...,5,$$
$$b + c = 10 + \ell,\ \ \ell = 0,1,2,...,5.$$

Έτσι ο αριθμός $A+B$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} A + B &= (10+k)\cdot 10^3 + (10+\ell)\cdot 10^2 + (10+\ell)\cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + (k+1)\cdot 10^3 + (\ell+1)\cdot 10^2 + (\ell+1)\cdot 10 + k, \end{aligned}$$

δηλαδή έχει ψηφία $1, k+1, \ell+1, \ell+1, k$, τα οποία πρέπει να είναι περιττοί ακέραιοι, που είναι άτοπο, λόγω της ύπαρξης των διαδοχικών ακέραιων k και $k+1$.

(β) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c<10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $a+d=10+k, k=0,1,2,\ldots,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (10+k)\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c)\cdot 10+(10+k)\\ &=10^4+k\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c+1)\cdot 10+k,\end{aligned}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b+c=9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφίο δεκάδων το 0, που είναι άρτιος, άτοπο.
- Αν $b+c<9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφία τους ακέραιους $b+c$ και $b+c+1$ που δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δύο περιττοί.

(γ) Έστω $a+d<10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $b+c=10+\ell, \ell=0,1,2,\ldots,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (a+d)\cdot 10^3+(10+\ell)\cdot 10^2+(10+\ell)\cdot 10+(a+d)\\ &=(a+d+1)\cdot 10^3+(\ell+1)\cdot 10^2+\ell\cdot 10+(a+d),\end{aligned}$$

οπότε οι ακέραιοι ℓ και $\ell+1$ είναι ψηφία του $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, άτοπο.

(δ) Έστω $a+d<10$ και $b+c<10$. Τότε τα ψηφία του αριθμού $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ είναι οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$, οι οποίοι πρέπει να είναι περιττοί. Λόγω των περιορισμών $a>b>c>d>0$ και $a \geq 7$, έπεται ότι $a+d=9$ και επίσης $5 \geq c \geq 2, 6 \geq b \geq 3$, οπότε $10>b+c \geq 5$, δηλαδή $b+c \in \{5,7,9\}$ Επομένως, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=9$ με $b=7$, $c=2$ ή $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$
  Επομένως, προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8721}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8631}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8541}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=9$ με $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{7632}$, $\mathrm{A}=\mathbf{7542}$
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=7$ με $b=5$, $c=2$ ή $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8521}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8431}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=7$ με $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{7432}$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=5$ με $b=3$, $c=2$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{8321}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1$$

Λύση

Αν είναι $x \geq 3$ και $y \geq 3$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z} \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{z}=1-\frac{4}{z}<1,$$

οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Επομένως θα είναι: $x \leq 2$ ή $y \leq 2$, οπότε πρέπει να ισχύει ένα από τα επόμενα: $x=1$ ή $x=2$ ή $y=1$ ή $y=2$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{y}-\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=2y \Leftrightarrow y=k,\ z=2k,$ όπου k θετικός ακέραιος, οπότε έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(1,k,2k), k\in\mathbb{Z}$ θετικός.
- Για $x=2$ η εξίσωση γίνεται:
$$\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{8+z}{2z} \Leftrightarrow y=\frac{4z}{z+8} \Leftrightarrow y=\frac{4(z+8)-32}{z+8} \Leftrightarrow y=4-\frac{32}{z+8}.$$
Επειδή ο y πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο $z+8$ πρέπει να είναι θετικός διαιρέτης του 32 και μεγαλύτερος του 8. Άρα οι δυνατές τιμές του $z+8$ είναι 16 ή 32, οπότε $z=8$ ή $z=24$. Για $z=8$ λαμβάνουμε $y=2$, ενώ για $z=24$ λαμβάνουμε $y=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(2,2,8) \text{ ή } (x,y,z)=(2,\,3,24).$$
- Για $y=1$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{z}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{z}=\dfrac{1+x}{x} \Leftrightarrow z=\dfrac{4x}{1+x}=4-\dfrac{4}{1+x}.$
Επειδή πρέπει ο z να είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο $1+x$ να είναι θετικός διαιρέτης του 4 και μεγαλύτερος του 1, δηλαδή πρέπει $1+x=2$ ή $1+x=4$ $\Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=3$ Για $x=1$ λαμβάνουμε $z=2,$ ενώ για $x=3$ λαμβάνουμε $z=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(1,1,2) \text{ ή } (x,y,z)=(3,\,1,3).$$
- Για $y=2$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=4x \Leftrightarrow x=\ell,\ z=4\ell,$ όπου ℓ θετικός ακέραιος. Άρα, στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(\ell,2,4\ell)$, όπου ℓ θετικός ακέραιος.

Συνολικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις επικαλύψεις των λύσεων που βρήκαμε, έχουμε τις λύσεις:
$$(x,y,z)=(1,k,2k), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(\ell,2,4\ell), \text{ όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(3,1,3) \text{ και } (x,y,z)=(2,\,3,24).$$

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n = 1,2,3,...$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{1}\cdot a_1 = 3\cdot 2, a_3 = \frac{4}{2}\cdot(a_1 + a_2) = \frac{4}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4\cdot 2^2,$$

$$a_4 = \frac{5}{3}\cdot(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{5}{3}\cdot 24 = 5\cdot 2^3 a_5 = \frac{6}{4}\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \frac{6}{4}\cdot 64 = 6\cdot 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_n = (n+1)\cdot 2^{n-1}$, για κάθε $n = 1,2,3,...,k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για $n = k+1$, δηλαδή ότι ισχύει: $a_{k+1} = (k+2)\cdot 2^k$.

Πράγματι, έχουμε

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k) = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right)$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2\cdot 2^0 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right) \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί 2, λαμβάνουμε

$$2a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + (k+1)\cdot 2^k\right), \qquad (2)$$

οπότε με αφαίρεση της (1) από τη (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^{k-1} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-1 - \frac{1-2^k}{1-2} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$= \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2^k + (k+1)\cdot 2^k\right) = (k+2)\cdot 2^k.$$

Άρα έχουμε: $a_{2013} = 2014\cdot 2^{2012}$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τις σχέσεις

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),\ n \geq 2, \qquad (3)$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),\ n \geq 1, \qquad (4)$$

από τις οποίες λαμβάνουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n, n \geq 2 \qquad (5)$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)a_{n+1},\ n\geq 1. \qquad (6)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (5) από τη σχέση (6) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)a_{n+1}-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n \Rightarrow a_{n+1}=\left(\frac{2(n+2)}{n+1}\right)a_n,\ n\geq 1 \qquad (7)$$

Επομένως έχουμε

$$a_n=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)a_{n-1}=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right)a_{n-2}=\ldots$$

$$=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{2\cdot 4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)a_1=(n+1)\cdot 2^{n-2}\cdot a_1=(n+1)\cdot 2^{n-1},$$

αφού είναι $a_1=2$. Άρα έχουμε $a_{2013}=2014\cdot 2^{2012}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:

$$y=2x^2+5xy+3y^2.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y=2x^2+2xy+3xy+3y^2 \Leftrightarrow y=(x+y)(2x+3y)\ . \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $x+y=z$, τότε πρέπει $z\in\mathbb{Z}$ και η εξίσωση (1) γίνεται

$$y=z(2z+y)\Leftrightarrow y=2z^2+yz\Leftrightarrow (z-1)y=-2z^2. \qquad (2)$$

Για $z=1$ η εξίσωση (2) γίνεται $0\cdot y=-2$ (αδύνατη).

Για $z\neq 1$η εξίσωση γίνεται

$$y=-\frac{2z^2}{z-1}=-\frac{2(z^2-1)+2}{z-1}=-2(z+1)-\frac{2}{z-1}\ . \qquad (3)$$

Για να είναι ο y ακέραιος πρέπει ο $z-1$ να είναι διαιρέτης του 2, δηλαδή πρέπει

$$z-1\in\{-1,1,-2,2\}\Leftrightarrow z\in\{0,2,-1,3\}.$$

- Για $z=0$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $z=2$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y)=(10,-8)$.
- Για $z=-1$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y)=(-2,1)$.
- Για $z=3$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y)=(12,-9)$.

2ος τρόπος

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y=2x^2+2xy+3xy+3y^2\Leftrightarrow (x+y-1)(2x+3y+2)=-2 \qquad (4)$$

Επειδή ζητάμε λύσεις στους ακέραιους, οι δύο παράγοντες στο πρώτο μέρος πρέπει να είναι ακέραιοι, οπότε από την εξίσωση (4) έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\left\{\begin{matrix} x+y-1=-1 \\ 2x+3y+2=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ 2x+3y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

- $\left.\begin{cases} x+y-1=1 \\ 2x+3y+2=-2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(10,-8)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=2 \\ 2x+3y+2=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=-3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(12,-9)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x+3y+2=1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-2,1)$

3^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2x^2+5yx+3y^2-y=0\text{,} \qquad (5)$$

δηλαδή είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ακέραιους συντελεστές. Για να έχει η εξίσωση αυτή ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου , δηλαδή πρέπει $\Delta = y^2+8y = y(y+8)=\rho^2$, όπου ρ ακέραιος .

- Αν είναι $\rho=0$, τότε θα είναι $\Delta=0$ και $y=0$ ή $y=-8$. Για $y=0$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=0$, δηλαδή είναι $(x,y)=(0,0)$. Για $y=-8$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=10$, οπότε έχουμε τη λύση $(x,y)=(10,-8)$.
- Αν είναι $\rho \neq 0$, τότε **πρέπει** η εξίσωση

$$y^2+8y-\rho^2=0, \qquad (6)$$

να έχει ακέραιες λύσεις ως προς y για κατάλληλες τιμές του ρ. Άρα, πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης (6) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Άρα πρέπει να είναι $\Delta' = 64+4\rho^2 = 8^2+(2\rho)^2 = w^2$, οπότε η τριάδα $(8,2\rho,w)$ πρέπει να είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα. Όμως όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής $\left(k\cdot(m^2-n^2), k\cdot 2mn, k\cdot(m^2+n^2)\right)$, όπου k,m,n θετικοί ακέραιοι, $m>n$. Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

$$k\cdot(m^2-n^2)=8,\ k\cdot 2mn=2\rho \qquad (7)$$

$$\text{ή } k\cdot 2mn=8,\ k\cdot(m^2-n^2)=2\rho. \qquad (8)$$

Για $k=1$ η σχέση (7) μπορεί να αληθεύει με $(m,n)=(3,1)$, οπότε $\rho=3$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-9$, δηλαδή έχει ακέραιες λύσεις Από την εξίσωση (5) λαμβάνουμε τις λύσεις $x=-2$, για $y=1$ και $x=12$, για $y=-9$, οπότε έχουμε τις λύσεις: $(x,y)=(-2,1)$ και $(x,y)=(12,-9)$. Για $k\geq 2$, από το σύστημα (7) δεν προκύπτει ακέραια τιμή για το ρ. Ομοίως, από το σύστημα (8) δεν προκύπτουν ακέραιες τιμές για το ρ.

Εναλλακτικά, όταν φθάσουμε στην αναγκαία συνθήκη $\Delta' = 64+4\rho^2 = w^2$ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta' = 64+4\rho^2 = w^2 \Leftrightarrow w^2-4\rho^2=64 \Leftrightarrow (w-2\rho)(w+2\rho)=64.$$

Στη συνέχεια, για την επιλογή των ακέραιων παραγόντων του πρώτου μέλους, παρατηρούμε ότι:

$$(w+2\rho)+(w-2\rho)=2w = \text{πολλαπλάσιο του } 2$$

$$(w+2\rho)-(w-2\rho)=4\rho = \text{πολλαπλάσιο του } 4.$$

Επομένως οι περιπτώσεις που οδηγούν σε θετικές ακέραιες λύσεις για τα w και ρ είναι μόνον οι εξής:

- $\left.\begin{cases} w+2\rho=16 \\ w-2\rho=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(10,3)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:
  $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=-9$ ή $y=1$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(12,-9)$ και $(x,y)=(-2,1)$.
- $\left.\begin{cases} w+2\rho=8 \\ w-2\rho=8 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(8,0)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:
  $y^2+8y=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=-8$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(0,0)$ και $(x,y)=(10,-8)$.

Μπορούμε ακόμη να θεωρήσουμε την εξίσωση ως τριώνυμο μεταβλητής y και να εργαστούμε ανάλογα, όπως στη παραπάνω περίπτωση . Τότε καταλήγουμε στην αναγκαία συνθήκη να είναι τέλειο η διακρίνουσα $\Delta=x^2-10x+24=(x-5)^2-1$, δηλαδή $(x-5)^2-1=\omega^2 \Leftrightarrow (x-5)^2-\omega^2=1 \Leftrightarrow (x-5-\omega)(x-5+\omega)=1$, από την οποία προκύπτουν τελικά οι ακέραιες λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i|=i,\ i=1,2,...,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,...,\mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3,...,\mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

Λύση

Υποθέτουμε ότι κατά το πρώτο βήμα αφαιρούμε από όλα τα επιλεγμένα σύνολα k_1 στοιχεία, κατά το δεύτερο βήμα αφαιρούμε k_2 στοιχεία και ομοίως κατά το $n-$στό βήμα αφαιρούμε k_n στοιχεία. Όταν εξαντληθούν τα στοιχεία όλων των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$, τότε θα πρέπει το κάθε $i=|\mathrm{A}_i|,\ i=1,2,...,160$, να είναι άθροισμα κάποιων όρων από τους $k_1,k_2,...,k_n$. Όμως τα δυνατά αθροίσματα που δημιουργούνται από όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{k_1,k_2,...,k_n\}$ είναι 2^n, αφού για τη δημιουργία τέτοιων αθροισμάτων για κάθε όρο υπάρχουν δύο επιλογές, δηλαδή μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο στο άθροισμα ή όχι. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι $2^n \geq 160$, οπότε πρέπει $n \geq 8$ και η ελάχιστη πιθανή τιμή του n είναι το 8.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για $n=8$ μπορούμε να επιτύχουμε την εξάντληση των στοιχείων των δεδομένων συνόλων με την προβλεπόμενη διαδικασία, οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του n θα είναι 8.

Στο πρώτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $\mathrm{A}_{81},...\mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από το καθένα από αυτά 80 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_1 θα έχει $80\cdot 80=6400$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 80 στοιχείων ως $\mathrm{A}^1_{81},...,\mathrm{A}^1_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i και A^1_{80+i}, $i=1,2,...,80$ έχουν από i στοιχεία. Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $\mathrm{A}_{41},...,\mathrm{A}_{80}$, $\mathrm{A}^1_{121},...,\mathrm{A}^1_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 40 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_2 θα έχει $80\cdot 40=3200$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 40 στοιχείων ως $\mathrm{A}^1_{41},...,\mathrm{A}^1_{80}$ και $\mathrm{A}^2_{121},...,\mathrm{A}^2_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i, $\mathrm{A}^1_{40+i},\mathrm{A}^1_{80+i}$ και $\mathrm{A}^2_{120+i}, i=1,2,...,40$ έχουν το καθένα από i στοιχεία. Στο τρίτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $\mathrm{A}_{21},...,\mathrm{A}_{40}$, $\mathrm{A}^1_{60+i},...,\mathrm{A}^1_{100+i}$, $\mathrm{A}^2_{140+i}, i=1,2,...,20$ αφαιρούμε από καθένα από αυτά 20 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_3 θα έχει $80\cdot 20=1600$ στοιχεία.

Συνεχίζουμε ομοίως με ανάλογους συμβολισμούς, θεωρώντας στο τέταρτο βήμα τα σύνολα $\mathrm{A}_{10+i},\mathrm{A}^1_{30+i},\mathrm{A}^2_{50+i},\mathrm{A}^2_{70+i},\mathrm{A}^2_{90+i},\mathrm{A}^2_{110+i},\mathrm{A}^3_{130+i},\mathrm{A}^3_{150+i}, i=1,2,...,10$, και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 10 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_4 θα έχει $80\cdot 10=800$ στοιχεία. Τα σύνολα που απομένουν έχουν το καθένα το πολύ 10 στοιχεία. Στο πέμπτο βήμα επιλέγουμε τα μισά από αυτά, δηλαδή τα $\mathrm{A}^{\ell}_{5+i(\mathrm{mod}10)}, i=1,2,3,4,5$ με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell=1,2,3,4$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 5 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_5 θα έχει $80\cdot 5=400$ στοιχεία. Έτσι έχουν απομείνει 32 ομάδες συνόλων που έχουν από ένα μέχρι πέντε στοιχεία. Στο έκτο βήμα επιλέγουμε από αυτά τα $\mathrm{A}^{\ell}_{2+i(\mathrm{mod}5)}, i=1,2,3$, συνολικά 96 σύνολα, με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell=1,2,...,5$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 3 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_6 θα έχει $96\cdot 3=288$ στοιχεία. Τότε τα 32 σύνολα $\mathrm{A}^{\ell}_{3(\mathrm{mod}5)}$ γίνονται κενά , τα σύνολα A_1, $\mathrm{A}^{\ell}_{1(\mathrm{mod}3)}$ έχουν από ένα στοιχείο, ενώ τα σύνολα A_2, $\mathrm{A}^{\ell}_{2(\mathrm{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell=1,2,...,6$ έχουν από δύο στοιχεία. Στο έβδομο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_2, $\mathrm{A}^{\ell}_{2(\mathrm{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell=1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από δύο στοιχεία, οπότε γίνονται κενά, ενώ στο όγδοο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_1, $\mathrm{A}^{\ell}_{1(\mathrm{mod}3)}, \ell=1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από ένα στοιχείο, οπότε γίνονται κενά.

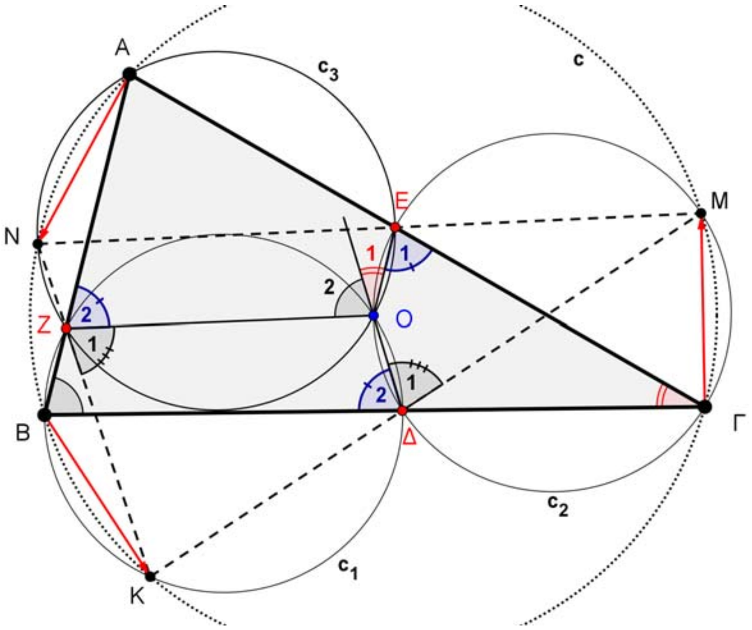
Έτσι το σύνολο M_7 θα έχει 128 στοιχεία, ενώ το σύνολο M_8 θα έχει 64 στοιχεία.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη απόδειξη για ότι ο αριθμός των βημάτων μπορεί να είναι 8, δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να πάρουμε τα 81 σύνολα $\mathrm{A}_{80},\mathrm{A}_{81},...,\mathrm{A}_{160}$ και να τους αφαιρέσουμε από 80 στοιχεία με ανάλογη συνέχεια στα επόμενα βήματα. Τότε θα αφαιρούσαμε στο πρώτο βήμα $81\cdot 80=6480$ στοιχεία που είναι και το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να αφαιρεθούν στο πρώτο βήμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ (διαφορετικό από το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{BO\Delta}$ (έστω c_1) τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Gamma O\Delta$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M και την $A\Gamma$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KMN είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 1

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος c_3 περνάει από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε: $\hat{O}_2 = \hat{B}$.

Από τη πρόσθεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων ισοτήτων γωνιών λαμβάνουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow E\hat{O}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o - \hat{A},$$

οπότε το τετράπλευρο $AEOZ$ είναι εγγράψιμο (άθροισμα απέναντι γωνιών 180^o).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 είναι ίσοι μεταξύ τους.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε; $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$.

Επομένως έχουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2 = \hat{E}_1$. Οι τρεις αυτές ίσες γωνίες βαίνουν στις ίσες χορδές $OB, O\Gamma$ και OA των κύκλων c_1, c_2 και c_3 αντίστοιχα. Άρα οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 έχουν ίσες ακτίνες, οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

Στους ίσους κύκλους c_1 και c_2, οι γωνίες $\hat{Z}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ βαίνουν στις ίσες χορδές OK και OM ($OK = OM = R$), οπότε θα είναι: $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα σημεία K, Δ, M είναι συνευθειακά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία M, E, N και τα σημεία N, Z, K είναι επίσης συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{N}$ (που είναι κατά κορυφή) προκύπτει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{AN} = \mathrm{BK} = \Gamma\mathrm{M}$ (τα οποία είναι χορδές του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma$ και KMN έχουν κοινό περίκεντρο O και το KMN είναι η εικόνα του $\mathrm{AB}\Gamma$ στη στροφή με κέντρο το σημείο O και γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \hat{\omega}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Το περίκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, ταυτίζεται με το σημείο Miquel που αντιστοιχεί στα σημεία $\Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ των πλευρών του τριγώνου. Έτσι μπορεί να προκύψει άμεσα ότι το τετράπλευρο AEOZ είναι εγγράψιμο.

ΘΕΜΑΤΑ 2014

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p, m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.

Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

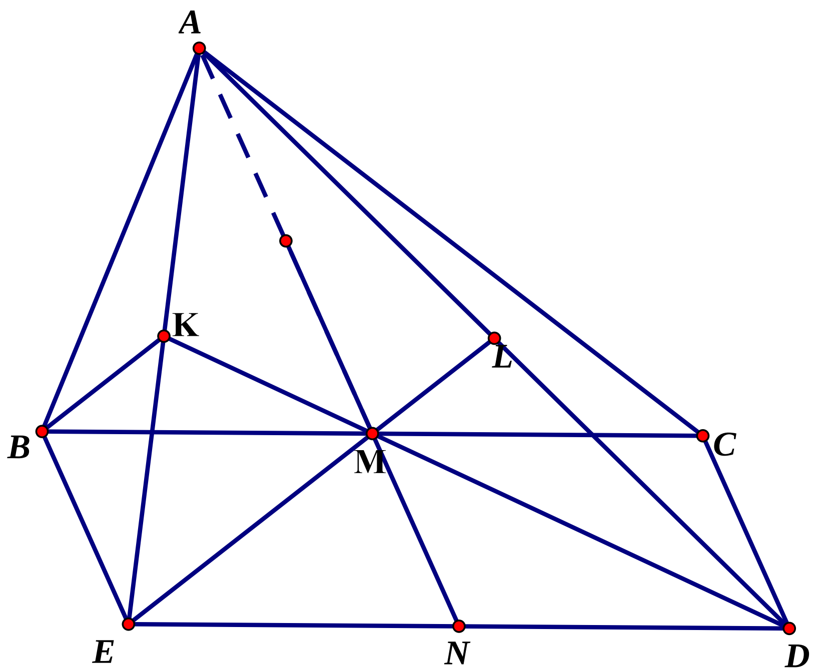
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Λύση

Προεκτείνουμε την AM μέχρι να τμήσει την ED στο σημείο N. Τότε το τετράπλευρο $BMNE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $EN = BM = MC = ND$. Άρα το N είναι το μέσον του ED. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\frac{AM}{MN} = 2$ και το M είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου EAD, οπότε το M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AED. Επομένως η ευθεία EM είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου AED που άγεται από την κορυφή E, οπότε θα τέμνει την πλευρά AD στο μέσο της.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$p(p+m+1)=(m+1)^3\ , \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πρώτος αριθμός p είναι διαιρέτης του $(m+1)^3$. Επομένως, αφού p πρώτος, έπεται ότι $p\,|(m+1)$, οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $m+1=kp$. Τότε, από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$p(p+kp)=(kp)^3 \Leftrightarrow k+1=k^3p \Rightarrow k^3\,|(k+1) \Rightarrow k\,|(k+1) \Rightarrow k=1.$$

Άρα είναι $p=2,\ m=1$ και $(p,m)=(2,1)$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Λύση

Για $x,y,z\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την συνθήκη $xyz\neq 0$, το σύστημα γράφεται:

$$x^3yz=z^2-2y^2 \qquad (1)$$

$$y^3zx=x^2-2z^2 \qquad (2)$$

$$z^3xy=y^2-2x^2 \qquad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)(xyz+1)=0.$$

Επειδή είναι $xyz\neq 0$ έχουμε $x^2+y^2+z^2>0$, οπότε από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι :

$$xyz=-1 \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) στο σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$x^2=-z^2+2y^2 \qquad (5)$$

$$y^2=-x^2+2z^2 \qquad (6)$$

$$z^2=-y^2+2x^2 \qquad (7)$$

Από τις (5) και (6) λαμβάνουμε $y^2=z^2$, ενώ από τις (6) και (7) λαμβάνουμε $x^2=z^2$, οπότε:

$$x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow x=y=\pm z \text{ ή } x=-y=\pm z. \qquad (8)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (8) και (4) έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(-1,-1,-1),\ (x,y,z)=(1,1,-1),\ (x,y,z)=(1,-1,1),\ (x,y,z)=(-1,1,1).$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Λύση
Το 1 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Το 2 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Τώρα όλοι οι άρτιοι πρέπει να πάρουν το χρώμα του 2, οπότε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2.
Επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς παίρνουν το χρώμα του 2, δηλαδή οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2.
Οι αριθμοί που απέμειναν (που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10, δηλαδή οι 11,13,17,19) μπορούν να βαφούν με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Επομένως, συνολικά ο χρωματισμός μπορεί να γίνει με $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6=64$ τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε και τις δύο περιπτώσεις που τους βάφουμε όλους μαύρους ή όλους άσπρους. Άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2
Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\dots n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R<AB<2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση
Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή

$$(x-2)(x-4)\mathrm{P}(x)=x(x+2)\mathrm{P}(x-2),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

οπότε, για $x=0,-2$ και 4 προκύπτουν οι ισότητες: $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(-2)=\mathrm{P}(2)=0$.
Επομένως το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντες τους $x, x+2$ και $x-2$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x), \qquad (2)$$

όπου το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.
Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:

$$(x-2)(x-4)^2x(x+2)Q(x)=x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2), \quad (3)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(x+2)(x-2)(x-4)\left[(x-2)Q(x)-xQ(x-2)\right]=0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο $x(x-2)(x+2)(x-4)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:

$$(x-2)Q(x)-xQ(x-2)=0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Από την τελευταία σχέση για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $Q(0)=0$, οπότε $Q(x)=xR(x)$, όπου $R(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:

$$(x-2)xR(x)-x(x-2)R(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)\left[R(x)-R(x-2)\right]=0,$$

από την οποία, αφού $x(x-2)\neq 0(x)$, προκύπτει ότι:

$$R(x)=R(x-2),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $R(x)=R(x+2k),\ k\in\mathbb{Z},$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο $R(x)$ παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για παράδειγμα ισχύει $c=R(0)=R(2k), k\in\mathbb{Z}$. Άρα είναι $R(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-2)xR(x)=cx^2\left(x^2-4\right).$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Έστω $p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0,$ με $(p,q)=1$ και τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{A}=\frac{8n-25}{n+5}=\left(\frac{p}{q}\right)^3. \qquad (1)$$

Τότε θα είναι και $(p^3,q^3)=1$, ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3(8n-25)=p^3(n+5), \qquad (2)$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3\,|\,(8n-25) \text{ και } q^3\,|\,(n+5) \Rightarrow \text{υπάρχει } k\in\mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25=kp^3 \text{ και } n+5=kq^3. \qquad (3)$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $8n-25=kp^3,\ k\in\mathbb{Z},$ τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$8(n+5)-(8n-25)=k\left(8q^3-p^3\right)$$

$$\Rightarrow k(2q-p)\left(4q^2+2qp+p^2\right)=65.$$

Επομένως οι αριθμοί $k,\ 2q-p$ και $4q^2+2qp+p^2$ είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\equiv 1(\bmod 3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13 \Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2+2qp+p^2=13,\ k=\pm 1,\ 2q-p=\pm 5.$ Τότε έχουμε:

  $p=2q\mp 5$ και $4q^2+2q(2q\mp 5)+(2q\mp 5)^2=13 \Leftrightarrow p=2q\mp 5,\ 2q^2\mp 5q+2=0$

  $\Leftrightarrow p=2q\mp 5,\ q=\pm 2 \Leftrightarrow p=\mp 1,\ q=\pm 2$. Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

  $\left(\dfrac{p}{q}\right)^3=-\dfrac{1}{8}$, οπότε θα είναι: $\dfrac{8n-25}{n+5}=-\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 8(8n-25)=-(n+5) \Leftrightarrow n=3$.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς n, οπότε λαμβάνουμε:

$$n=\frac{5\left(5q^3+p^3\right)}{8q^3-p^3}. \qquad (4)$$

Έστω $d=\left(5q^3+p^3,8q^3-p^3\right)$. Τότε $d\,|\,5q^3+p^3+8q^3-p^3=13q^3$ και αφού $(p,q)=1$ έπεται ότι $d\,|\,13$. Επομένως

$$\frac{8q^3-p^3}{d}\,\Big|\,5 \Rightarrow \left(8q^3-p^3\right)\big|\,5\cdot 13 \Rightarrow (2q-p)\left(4q^2+2pq+p^2\right)\big|\,65.$$

Παρατηρούμε ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\equiv 1(\bmod 3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13. \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $|q|\leq 2$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|q|=0$ ή $|q|=1$, οπότε $(p+q)^2=13$ ή $(p+q)^2=10$, αδύνατες με $p,q\in\mathbb{Z}$.
- Αν $|q|=2$, τότε $(p+q)^2=1$, από την οποία προκύπτουν οι λύσεις :

  $$(p,q)=(-1,2) \text{ ή } (p,q)=(1,-2) \text{ ή } (p,q)=(-3,2) \text{ ή } (p,q)=(3,-2).$$

  Επειδή $(2q-p)|65$, δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $(p,q)=(-1,2)$ ή $(p,q)=(1,-2)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $n=3$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots,n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $S_1=\frac{39}{103}(S_1+S_2)$. Παρατηρούμε ότι :

$$S_1+S_2=1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Επειδή ο S_1 είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι $103\left|\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)\right.$. Όμως ο 103 είναι πρώτος της μορφής 4κ+3, οπότε ο 103 δεν διαιρεί τον n^2+1. Επομένως πρέπει να διαιρεί τον n^2 και αφού είναι πρώτος, πρέπει $103|n$. Αφού επιπλέον ο n είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει: $n=206k, k\in\mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του S_1 είναι:

$$1+2+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{\frac{n^2}{2}\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}{2}=A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\cdots+n^2=B.$$

Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}\left(S_1 + S_2\right) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το S_1 μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα A, B Πράγματι, ο αριθμός $A+1$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+1$. Ο αριθμός $A+2$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+2$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,n^2$, για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2},n^2$, και στον επόμενο τους $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2}+1,n^2$, και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το *A*, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το *B*.

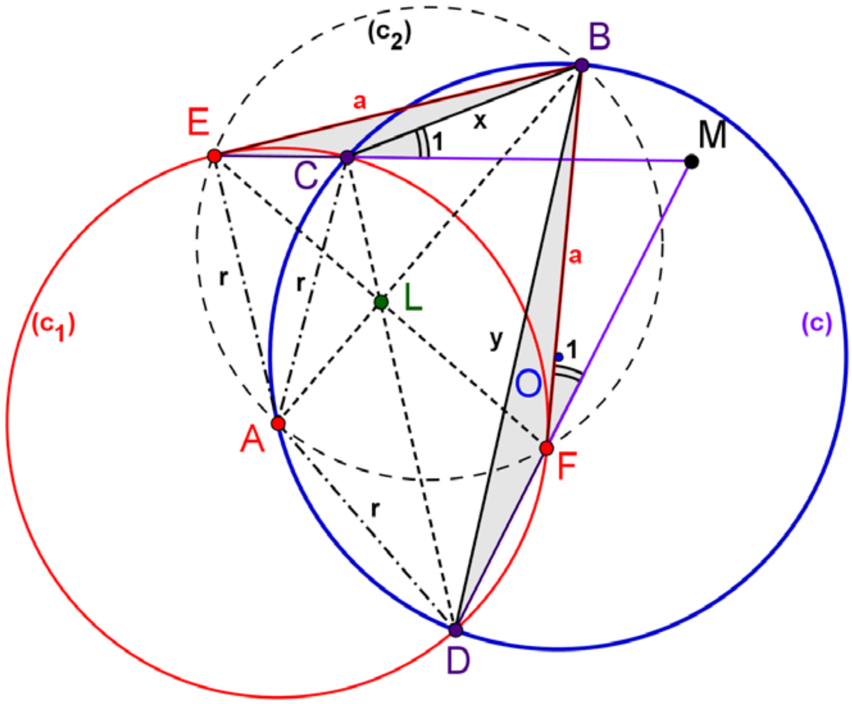
Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Το τετράπλευρο $AEBF$ είναι εγγράψιμο (διότι οι BE και BF είναι εφαπτόμενες, οπότε: $A\hat{E}B = A\hat{F}B = 90^o$) και έστω c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα CD είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_1). Το τμήμα AB είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_2). Το τμήμα EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2). Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω L, των τριών κύκλων.

Η AB είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}F$ (διότι BE και BF είναι εφαπτόμενες του κύκλου $c_1(A,r)$**).** Η AB είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας $C\hat{B}D$, γιατί οι γωνίες $A\hat{B}C$ και $A\hat{B}D$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AC}$ και $\overset{\frown}{AD}$. Άρα οι γωνίες $E\hat{B}C$ και $F\hat{B}D$ είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας $E\hat{B}C = F\hat{B}D$, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάριν συντομίας): $BE = BF = a$, $BC = x$ και $BD = y$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCB και LAD έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \qquad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCA και LBD, έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \qquad (\mathrm{A}).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE, το τμήμα AL είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \qquad (\mathrm{B}).$$

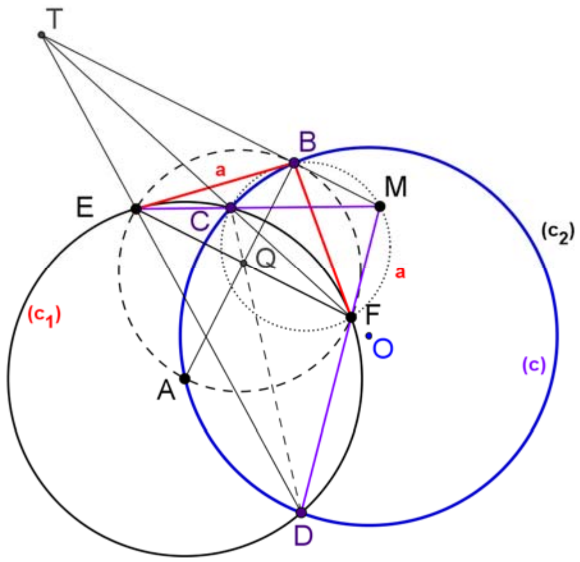
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε: $xy = a^2$.

Άρα τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει η ισότητα: $\hat{C} = \hat{F}$. Άρα το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

2ος τρόπος.

Σημειώνουμε με Q το σημείο τομής των EF, CD Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο $EEDFFC$ παίρνουμε ότι, αν T είναι το σημείο τομής των

ED, CF, τότε τα σημεία T, B, M είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο $ECFD$, τα σημεία T, M είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το Q είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία TM είναι η **πολική** του Q, οπότε η AQ είναι κάθετη στην πολική (αφού Α κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι $A\hat{B}T = 90^\circ$. Έτσι, έπεται ότι $EF \parallel TM$ αφού $AB \perp EF$, οπότε έχουμε ότι $B\hat{M}C = M\hat{E}F = C\hat{F}B$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο $BEDM$ είναι εγγράψιμο.

ΘΕΜΑΤΑ 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2+(\alpha-2)x-(\alpha-1)(2\alpha-3)=0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta=(\alpha-2)^2+4(\alpha-1)(2\alpha-3)=9\alpha^2-24\alpha+16=(3\alpha-4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{2-\alpha\pm(3\alpha-4)}{2}\Leftrightarrow x_1=\alpha-1,\ x_2=-2\alpha+3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1=x_2^2 \text{ ή } x_2=x_1^2 \Leftrightarrow \alpha-1=(-2\alpha+3)^2 \text{ ή } -2\alpha+3=(\alpha-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=4\alpha^2-12\alpha+9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha+3=\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-13\alpha+10=0 \text{ ή } \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=\frac{5}{4} \text{ ή } \alpha=\sqrt{2} \text{ ή } \alpha=-\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m\geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A}=(m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$.

.

Λύση

Έστω $\mathrm{A}=(m+n)^3, \mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$. Επειδή $(m+n)^3 \mid 2n(3m^2+n^2)+8$ πρέπει να είναι:

$$(m+n)^3\leq 2n(3m^2+n^2)+8 \Leftrightarrow m^3+3m^2n+3mn^2+n^3\leq 6m^2n+2n^3+8$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2n+3mn^2-n^3\leq 8 \Leftrightarrow (m-n)^3\leq 8 \overset{m\geq n}{\Longleftrightarrow} m-n\leq 2 \Leftrightarrow m-n\in\{0,1,2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m-n=0\Leftrightarrow m=n.$ Τότε $\mathrm{A}=8m^3, \mathrm{B}=8m^3+8$, οπότε
  $$\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\Leftrightarrow 8m^3 \mid 8m^3+8 \Leftrightarrow 8m^3 \mid 8 \Leftrightarrow m=1, \text{ αφού } m>0 \Rightarrow (m,n)=(1,1).$$
- $m-n=1$. Τότε έχουμε

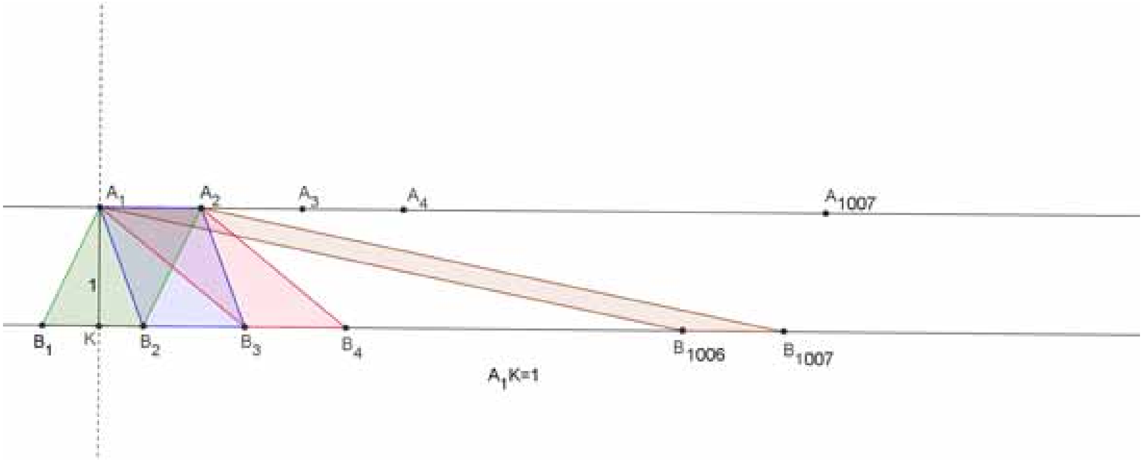
$$A=(2n+1)^3, B=2n\left(3(n+1)^2+n^2\right)+8=8n^3+12n^2+6n+8=(2n+1)^3+7.$$

Επομένως, $A \mid B \Leftrightarrow (2n+1)^3 \mid 7 \Rightarrow 2n+1=1 \Leftrightarrow n=0,\ m=1$ και $(m,n)=(1,0)$.

- $m-n=2$. Τότε $A=8(n+1)^3=B$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2,k)$, με $k\geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006\cdot 1006=1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ \leq ΑΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, να αποδείξετε ότι $ΓΔ=\frac{ΒΓ}{2}$.

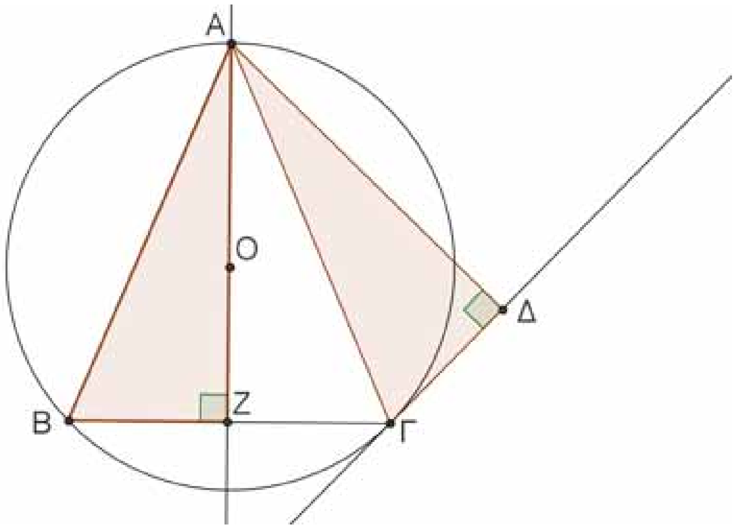
(β) Αν ισχύει ότι $ΓΔ=\frac{ΒΓ}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

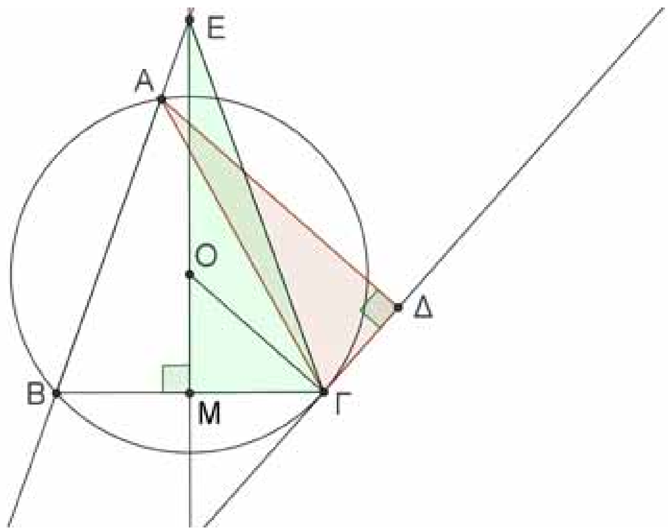
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $E\hat{A}\Gamma = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $EA\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις που δίνονται παρακάτω δεν είναι μοναδικές. Στα περισσότερα προβλήματα έχουν δοθεί και άλλες λύσεις από τους μαθητές που είναι τεκμηριωμένες και ως εκ τούτου αποδεκτές.

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Λύση

Έστω $d = (x, y)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών x, y. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε

$$x = da,\ y = db,\ (a,b) = 1.$$

Με αντικατάσταση στη δεδομένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{d^3ab^3}{a+b} = p. \qquad (1)$$

Όμως, από τη σχέση $(a,b)=1$, έχουμε ότι $(a, a+b) = 1$ και $(b^3, a+b) = 1$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $a+b \mid d^3$. Γράφουμε

$$\frac{d^3}{a+b} = k, \qquad (2)$$

όπου k θετικός ακέραιος. Τότε η (1) γίνεται: $kab^3 = p$, οπότε $b^3 \mid p$. Επομένως πρέπει $b = 1$ και $ka = p$. Επομένως , έχουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $k = p, a = 1$, τότε η (2) γίνεται $\frac{d^3}{2} = p$, οπότε $2p = d^3$, οπότε $2 \mid d$ άρα $8 \mid d^3$ και έπεται ότι $8 \mid 2p$, άτοπο.

(ii) $k = 1, a = p$. Τότε η (2) γίνεται $d^3 = p+1 \Rightarrow d^3 - 1 = p \Rightarrow (d-1)(d^2+d+1) = p$.
Επομένως, έχουμε ότι $d-1 = 1, d^2+d+1 = p$ (αφού $d^2+d+1 > d-1$), $\Leftrightarrow d = 2, p = 7$, από όπου έχουμε: $(x, y, p) = (14, 2, 7)$.

Πρόβλημα 2

Έστω $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ και $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a, b, c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και

$b>0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $abc>28$.

(β) Αν a,b,c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b>0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Λύση

(α) Επειδή το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με 0 έπεται ότι μία ρίζα του είναι το 1, οπότε έχουμε

$$P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c=(x-1)(ax^2+bx-c)$$

Αν θέσουμε $x_0=1$, από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ και } x_1x_2=-\frac{c}{a}\neq 0, \qquad (1)$$

οπότε θα είναι $x_1, x_2 \neq 0$.

Επιπλέον, από την υπόθεση έπεται ότι οι x_0, x_1, x_2 θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} F(x)=Q(x)-P(x)&=x^4+(b-a-1)x^3+2(a-b)x^2+(b-a)x \\ &=x\left(x^3+(b-a-1)x^2+2(a-b)x+b-a\right) \\ &=x\left[x^3-x^2+(b-a)(x^2-x)+(a-b)(x-1)\right] \\ &=x(x-1)\left[x^2+(b-a)x+(a-b)\right]. \end{aligned}$$

Επειδή $F(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x^2+(b-a)x+(a-b)=0$ και $x_0, x_1, x_2 \neq 0$, έπεται ότι:

$$x_0=1,\ x_1+x_2=a-b,\ \ x_1x_2=a-b\ . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a-b=-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}\Rightarrow$$

$$b=c \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad a^2-ab=-b \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$a^2=b(a-1)\Rightarrow a>1 \text{ (αφού } b>0\text{) και } b=c=\frac{a^2}{a-1}.$$

Έχουμε ότι

$$abc=a\left(\frac{a^2}{a-1}\right)^2=\frac{a^5}{(a-1)^2}\overset{x=a-1>0}{=}\frac{(x+1)^5}{x^2}=\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}{x^2}$$

$$\Rightarrow abc=x^3+\left(5x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(10x+\frac{5}{x}\right)+10. \qquad (5)$$

Όμως ισχύουν:

- $x^3>0,\ 5x^2+\dfrac{1}{x^2}>4\Leftrightarrow 5x^4-4x^2+1>0\Leftrightarrow x^4+(2x^2-1)^2>0,$ ισχύει,
- $10x+\dfrac{5}{x}>14\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}10x^2-14x+5>0,$ ισχύει αφού $\Delta=-4<0.$

Άρα από τη σχέση (5) έχουμε: $abc>28$.

(β) Από το ερώτημα (α) και τη σχέση $b = a + 1 + \dfrac{1}{a-1}$, επειδή οι αριθμοί $b,\ a+1$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι και ο αριθμός $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z}$, οπότε πρέπει:

$$a - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow a = 0\,(\text{απορρίπτεται, γιατί } a \neq 0) \quad \text{ή} \quad a = 2.\ \text{Τότε } b = c = \frac{a^2}{a-1} = 4.$$

Για τις τιμές αυτές το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 4 = 2(x-1)(x^2 + 2x - 2)$$

έχει ρίζες $x_0 = 1,\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$F(x) = Q(x) - P(x) = x(x-1)\left(x^2 + (b-a)x + (a-b)\right) = x\left(x^2 + 2x - 2\right),$$

οπότε θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x) = F(x) + P(x)$.

Πρόβλημα 3

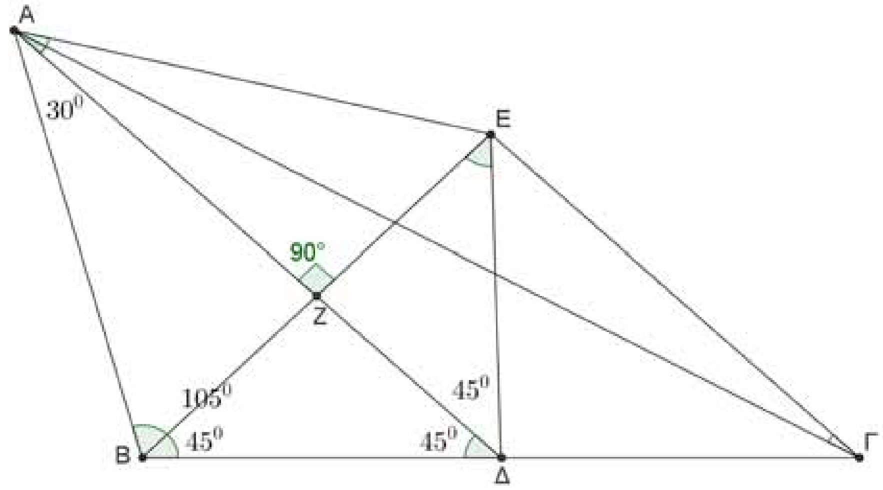
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}} = 105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

(β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Λύση (1ος τρόπος)

Ευθύ. Έστω ότι το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι: $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΒΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{AE}$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 2 \cdot \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BE} = \mathrm{AE} \qquad (1)$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta\mathrm{BZ} = 45^\circ$.

Επιπλέον, στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε, λόγω συμμετρίας, ότι η διάμεσος ΕΔ ισούται με

$$E\Delta = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{B}\Gamma = 45^\circ \text{ και } BE = E\Gamma. \qquad (3)$$

Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$. Επειδή είναι και $A\hat{Z}E = 90^\circ$, έπεται ότι: $A\Delta \parallel E\Gamma$. Τότε προκύπτει η ισότητα των γωνιών

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \qquad (4)$$

Επιπλέον, από τις ισότητες (1) και (3) λαμβάνουμε ότι $AE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{\Gamma}A = E\hat{A}\Gamma \qquad (5)$$

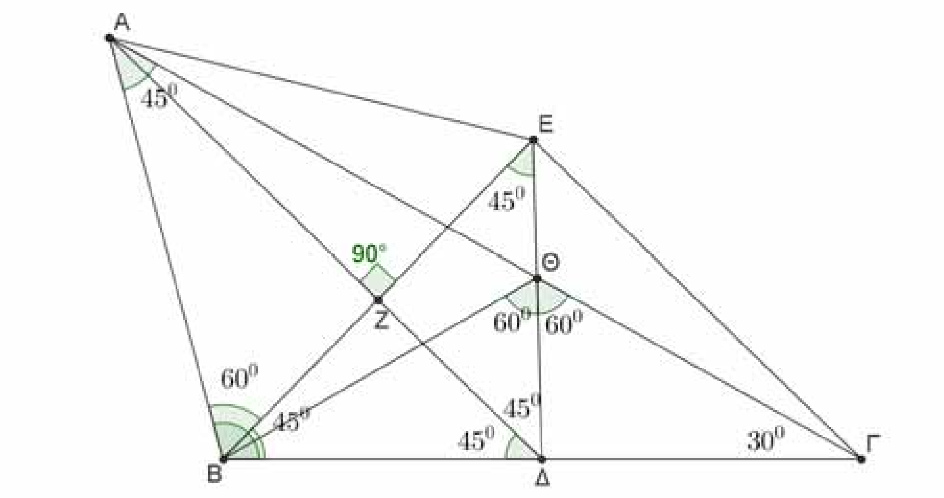
Από τις σχέσεις (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma = \frac{\Delta\hat{A}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \left(B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Gamma\right) = 180^\circ - 105^\circ - \left(30^\circ + 15^\circ\right) = 30^\circ.$$

Αντίστροφο. Έστω ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι το μέσο της ΒΓ.



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι $B\hat{A}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Gamma = 45^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΑΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και $B\hat{A}E = 2\cdot B\hat{A}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$AB = BE = AE \qquad (1)$$

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = B\hat{A}E = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{Z}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta BZ = 45^\circ$.
Επιπλέον, λόγω συμμετρίας έχουμε

$$B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{B}Z = 45^\circ, \qquad (3)$$

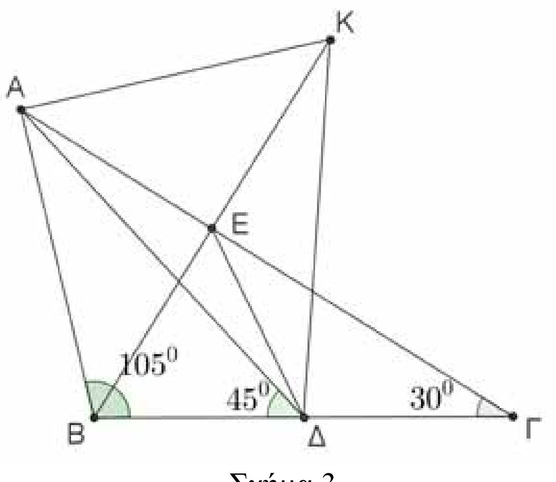
$$E\hat{\Delta}B = 2\cdot Z\hat{\Delta}B = 90^\circ. \qquad (4)$$

Έστω Θ το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΓ. Τότε, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το ΘΔ είναι **ύψος** του τριγώνου ΒΘΓ.

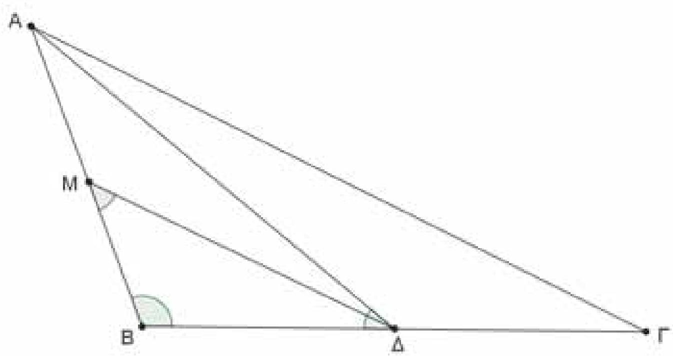
Επιπλέον, από τη σχέση (3) λαμβάνουμε $B\hat{E}\Theta = B\hat{E}\Delta = 45^\circ = B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Theta$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΘΕ είναι εγγράψιμο. Άρα έχουμε $B\hat{\Theta}\Delta = B\hat{A}E = 60^\circ$ και $\Delta\hat{\Theta}\Gamma = A\hat{\Theta}E = A\hat{B}E = 60^\circ$. Επομένως είναι $B\hat{\Theta}\Delta = \Delta\hat{\Theta}\Gamma = 60^\circ$, οπότε η ΘΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Theta}\Gamma$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ΘΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΘΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και θα έχει τη ΘΔ διάμεσο, δηλαδή το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

2^{ος} τρόπος

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\hat{\Gamma} = 30°$ (σχήμα 3). Θεωρούμε το συμμετρικό Κ του Β ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω ότι η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Τότε έχουμε ότι $K\hat{B}\Gamma = 60°$, οπότε $A\hat{B}E = 45°$, επομένως $A\hat{K}B = 45°$ και το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Ισχύει επομένως ότι $A\hat{\Delta}B = A\hat{K}B = 45°$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΚ είναι εγγράψιμο. Αν η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε ισχύει $EA = EB = EK$, άρα το Ε είναι το κέντρο του κύκλου, άρα $E\Delta = EB$, και αφού $K\hat{B}\Gamma = 60°$, το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $EB = E\Delta$ (1). Επιπλέον, θα είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 30°$, άρα το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\Delta E = \Delta\Gamma$ (2). Από τις (1),(2) έχουμε ότι $\Delta B = \Delta\Gamma$.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι Δ μέσον του ΒΓ (σχήμα 4). Θεωρούμε σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = 45°$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$, αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30°$, οπότε το σημείο Μ είναι μέσον του ΑΒ, οπότε $\Delta\mathrm{M} // \mathrm{A}\Gamma$. Επομένως $\hat{\Gamma} = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$

3ος τρόπος (τριγωνομετρικά):

Έστω ότι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = x$. Από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\eta\mu 30°} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu 105°} \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°}.$$

Όμοια από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\Delta\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x}$.

Επομένως, το Δ είναι μέσο αν και μόνο αν:

$$\frac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°} \Leftrightarrow 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu 105°\eta\mu 45°\sigma\upsilon\nu x = (1 + 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°)\eta\mu x$$

Όμως ισχύει ότι:

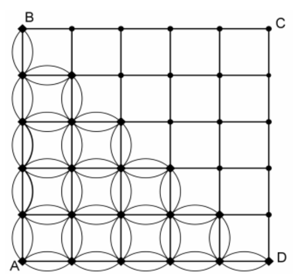
$$2\eta\mu 45°\eta\mu 105° = 2\eta\mu 45°\eta\mu\left(60^\circ + 45^\circ\right) = (\eta\mu 45°)^2(\eta\mu 60° + \sigma\upsilon\nu 60°) = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{x<45°}{\Leftrightarrow} x = 30°.$$

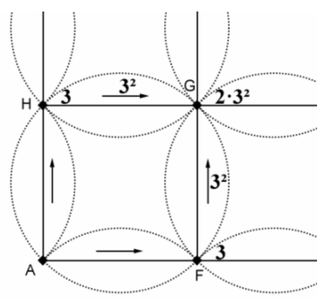
Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



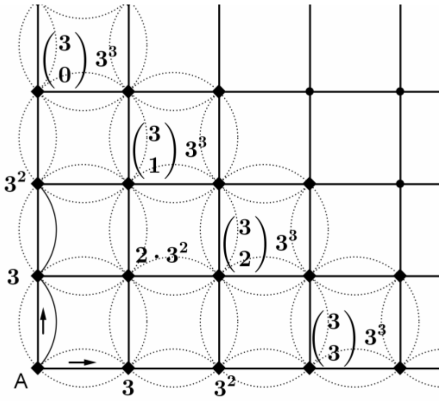
Λύση

Υποθέτουμε ότι το τετράγωνο είναι τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και τους άξονες να ταυτίζονται



Σχήμα 5

με τις πλευρές AB και AD. Τότε όλα τα σημεία του πλέγματος θα έχουν θετικές ακέραιες συντεταγμένες.
Παρατηρούμε (Σχήμα 1) ότι το σημείο $F(1,0)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι και το σημείο $H(0,1)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $H(0,1)$) με 3 τρόπους. Άρα το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$) με 3^2 τρόπους (πολλαπλασιαστική αρχή), ακλουθώντας τη διαδρομή A, H, G.
Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ (ακλουθώντας τη διαδρομή A, F, G) είναι 3^2 τρόποι.
Άρα τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ είναι $2 \cdot 3^2$.



Σχήμα 6

Κάθε λοιπόν σημείο του πλέγματος $M(i,j)$ (που βρίσκεται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD) μπορούμε να το προσεγγίσουμε με $\binom{i+j}{i} \cdot 3^{i+j} = \binom{i+j}{j} \cdot 3^{i+j}$ τρόπους (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$).
Τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο BD (δηλ τα σημεία $(0,n), (1,n-1)$), $(2,n-2)$,...., $(n-1,1), (n,0)$ μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\binom{n}{0} \cdot 3^n, \binom{n}{1} \cdot 3^n, \binom{n}{2} \cdot 3^n, \ldots, \binom{n}{n-1} \cdot 3^n, \binom{n}{n} \cdot 3^n$ τρόπους αντίστοιχα.
Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος (δηλαδή τα σημεία του πλέγματος που δεν βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD), συνδέονται μεταξύ τους μόνο με ευθύγραμμα τμήματα. Η μετακίνηση από το σημείο (i,j) στο σημείο $(i+k, j+m)$ του πλέγματος (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω), μπορεί να γίνει με $\binom{k+m}{k} = \binom{k+m}{m}$ τρόπους.

Άρα η μετακίνηση από το σημείο $(0,n)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{0}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(1, n-1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(2, n-2)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

. . . .

Η μετακίνηση από το σημείο $(n-1,1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(n,0)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n}$ τρόπους.

Άρα το σημείο $C(n,n)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο A με:

$$3^n\left(\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2\right)=3^n\binom{2n}{n} \text{ τρόπους.}$$

2^{ος} τρόπος

Αν δεν υπήρχαν τα τόξα των κύκλων, έχουμε $\binom{n+n}{n}$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από το A στο C.

Πράγματι, από τα συνολικά $2n$ βήματα που πρέπει να κάνουμε είτε δεξιά είτε πάνω, σε ακριβώς n πρέπει να πάμε δεξιά και σε ακριβώς n πρέπει να πάμε πάνω. Αν επομένως σταθεροποιήσουμε τα βήματα στα οποία πάμε δεξιά, τότε προσδιορίζεται όλη η διαδρομή. Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τα n βήματα από τα συνολικά $2n$. Αυτό γίνεται με $\binom{2n}{n}$ τρόπους.

Τώρα, κάθε σημείο της διαγωνίου BD είναι της μορφής $(k, n-k)$, οπότε για να φτάσουμε σε καθένα από αυτά χρειαζόμαστε ακριβώς $k+n-k=n$ βήματα.

Με τα τόξα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι στα πρώτα n βήματα, δηλαδή ακριβώς στα βήματα πριν τη διαγώνιο, έχω 3 επιλογές για τη μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο. Δηλαδή για κάθε διαδρομή χωρίς τόξα, έχω 3^n διαδρομές με τμήματα και τόξα. Επομένως αφού οι διαδρομές χωρίς τόξα είναι $\binom{2n}{n}$, με τμήματα και τόξα είναι $3^n \cdot \binom{2n}{n}$.

ΘΕΜΑΤΑ 2016

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p,q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους $p,\ q$ κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+1)(q+1)r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ pqr+(p+q)r+r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+q+1)r=138 \end{array}\right\}.$$

Από την εξίσωση

$$(p+q+1)r=138=2\cdot 3\cdot 23 \qquad (1)$$

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p,q,r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr=n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n.

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p,q,r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2$, τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

  $$(p,q)=(7,61),\ (p,q)=(61,7),\ (p,q)=(31,37),(p,q)=(37,31).$$

  Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές:

  $$n=7\cdot 61\cdot 2=\mathbf{854} \quad \text{ή} \quad n=31\cdot 37\cdot 2=\mathbf{2294}.$$

- Αν $r=3$, τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

  $(p,q)=(2,43),\ (p,q)=(43,2)$ και η τιμή $n=2\cdot 43\cdot 3=\mathbf{258}$.

- Αν $r=23$, τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p,q)=(2,3)$ ή $(p,q)=(3,2)$, οπότε θα είναι $n=2\cdot 3\cdot 23=\mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z, με $x\neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x+y)^2+(2-xy)=9,$$
$$(y+z)^2-(3+yz)=4.$$
Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:
$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:
$$x^2+y^2+xy=7, \quad (1)$$
$$y^2+z^2+yz=7, \quad (2)$$
από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:
$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z)+y(x-z)=0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z+y)=0.$$
Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z\neq 0$, έπεται ότι:
$$x+y+z=0. \quad (3)$$
Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A. Έχουμε
$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2y}, \frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}=\frac{x^3+y^3+z^3}{y^2z},$$
$$\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}=\frac{x^3+y^3+z^3}{z^2x}, \text{ οπότε η παράσταση γίνεται:}$$
$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{(xyz)^3}. \quad (4)$$
Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z=-x-y$, οπότε
$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+(-x-y)^3=x^3+y^3-(x+y)^3$$
$$=-3xy(x+y)=-3xy(-z)=3xyz. \quad (5)$$
Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.
Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε
$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{(xyz)^3}=\frac{(3xyz)^3}{(xyz)^3}=27.$$

Πρόβλημα 3

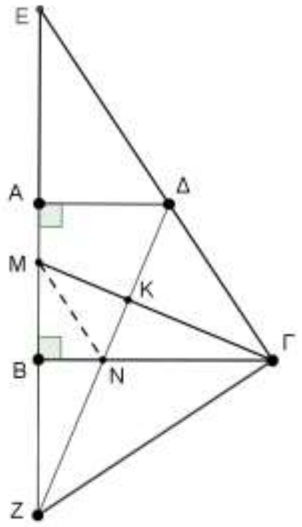
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Λύση

Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τις ΓΜ, ΒΓ στα Κ, Ν αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο ΑΔΖ, έχουμε ότι Β μέσον του ΑΖ και ΒΝ // ΑΔ, οπότε έχουμε ότι Ν μέσον του ΖΔ.
Επομένως στο τρίγωνο ΖΕΔ η ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:
$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{E\Delta} \quad (1)$$
Επιπλέον στο τρίγωνο ΜΓΖ, τα ΓΒ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο Ν είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές $0,1$ και 2 και το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος.

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6, αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4 \cdot \binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2 \cdot \binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε: $2^6 + 2^4 \cdot \binom{6}{2} + 2^2 \cdot \binom{6}{4} + 1 = 64 + 16 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 1 = 365$ εξάδες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $z = 0$, τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 80$.

Τότε πρέπει οι x, y να είναι πολλαπλάσια του 4, δηλαδή $x = 4a,\ y = 4b,\ 0 \le a \le b$, και η εξίσωση γίνεται $a^2 + b^2 = 5$ οπότε $(a,b) = (1,2)$, δηλαδή $(x, y) = \mathbf{(4,8)}$.

Αν $z > 0$, τότε $7 \mid 2016^z$ (επειδή $7 \mid 2016$) και $7 \mid 77$, επομένως το 7 πρέπει να διαιρεί και το αριστερό μέλος, δηλαδή $7 \mid x^2 + y^2$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου με το 7 είναι τα ίδια με τα υπόλοιπα των $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ που είναι $0,1,2,4$. Οπότε, για να ισχύει $7 \mid x^2 + y^2$ πρέπει $7 \mid x,\ 7 \mid y$ και γράφουμε $x = 7x_1$ και $y = 7y_1$, με $0 \le x_1 \le y_1$.

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Αν $z \ge 2$, τότε $49 \mid 2016^z$, οπότε αφού διαιρεί και το αριστερό μέλος, θα πρέπει $49 \mid 77$, που είναι άτοπο.

Αν $z = 1$, τότε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 7 \cdot 288 + 77 = 7(3 \cdot 288 + 11) = 7 \cdot 7 \cdot 125$. Δηλαδή πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 125$. Αφού $x_1 \le y_1$, έχουμε ότι $2y_1^2 \ge 125 \Rightarrow y_1 \ge 8$. Για $y_1 = 8,9,10,11$, βρίσκουμε τις λύσεις $(x_1, y_1) \in \{(5,10),(2,11)\}$

Τελικά οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{\mathbf{(4,8)}, \mathbf{(35,70)}, \mathbf{(14,77)}\}.$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \ P(1) = 1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Λύση

Έστω $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$ προέρχεται από το ανάπτυγμα των μεγιστοβάθμιων όρων $\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)^n - \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^n$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του τελευταίου ισούται με

$$\frac{2nx^{2n-1}}{2^n} + \frac{2nx^{2n-1}}{2^n} = \frac{4n}{2^n}x^{2n-1} \qquad (1).$$

Όμως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου στο αριστερό μέλος ισούται με 2, οπότε πρέπει $\frac{4n}{2^n} = 2 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 4n$. Όμως $2^{n+1} > 4n$ για $n \geq 3$, οπότε $n = 1$ ή $n = 2$ και από την (1) ο βαθμούς του P είναι $2-1=1$ ή $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Για $x = 0$ στην αρχική σχέση παίρνουμε $2P(0) = Q(1/2) - Q(1/2) = 0$, άρα $P(0) = 0$.

- Αν τώρα $n = 1$, τότε $P(x) = ax$ και αφού $P(1) = 1$, θα είναι
$$P(x) = x \text{ και } Q(x) = x + a_0,\ a_0 \in \mathbb{R}.$$
- Αν $n = 2$, τότε αν $Q(x) = x^2 + bx + c$, έχουμε:
$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left((x+1)^4 - (x-1)^4\right) + \frac{b}{2}\left((x+1)^2 - (x-1)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(8x^3 + 8x) + \frac{b}{2}(4x) = 2x^3 + 2(1+b)x.$$

Επομένως, $P(x) = x^3 + (1+b)x$. Επειδή επιπλέον $P(1) = 1$, πρέπει $b = -1$, οπότε
$$P(x) = x^3 \text{ και } Q(x) = x^2 - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΓΔ. Ο κύκλος $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ, την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο $c_1(B, B\Delta)$ στο σημείο Ε. Η ΔΖ τέλος τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\hat{\Delta}E = 45^0$, **(β)** Τα σημεία Ε, Μ και Κ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,

(γ) Η ευθεία ΒΜ είναι παράλληλη με την ευθεία ΕΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = 90^0 - \hat{B}$.

Η διάκεντρος ΒΓ των κύκλων c_1 και c_2 είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους ΔΕ.

Αν λοιπόν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΕ,

τότε (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΤΔ) έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90^0$, δηλαδή

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma}. \qquad (1)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΖ έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$ και $\hat{\Gamma}_2 = 2\hat{\Delta}_1 = 90^0 - \hat{A}$, οπότε

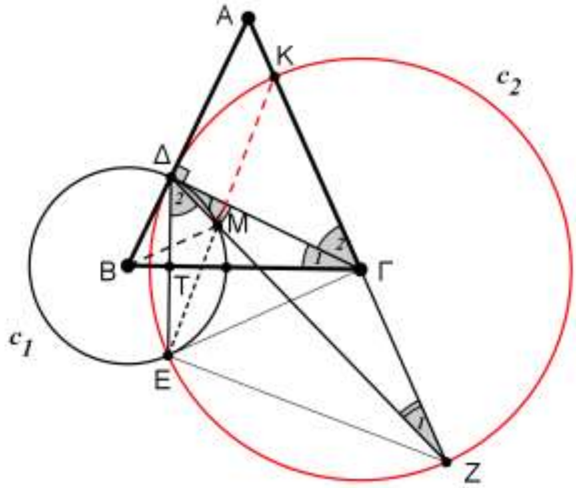
$$\hat{\Delta}_1 = 45^0 - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (2)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{B} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{B} - \hat{\Delta}_1 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} - \left(45^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 45^0.$$



Σχήμα 1

(β) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από την χορδή ΔM και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ του κύκλου c_1, άρα $\Delta\hat{E}M = \hat{\Delta}_1$. Ισχύει επίσης $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{Z}K = \hat{Z}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c_2 και βαίνουν στο τόξο ΔK). Επειδή όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, θα ισχύει $\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{E}K$, οπότε τα σημεία E, M, K είναι συνευθειακά.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\hat{B}M = 90^0 - \hat{A}$.
Ισχύει: $\Delta\hat{B}M = 2\Delta\hat{E}M = 2\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90 - \hat{A}$, οπότε $BM \perp A\Gamma$.
Επιπλέον, ισχύει $E\hat{K}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 = 45^0$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο EZK είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $E\Gamma$ είναι και ύψος, δηλαδή $E\Gamma \perp KZ$.
Άρα $BM // E\Gamma$ (ως κάθετες στην ευθεία AZ).

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε "*καλό*", όταν:

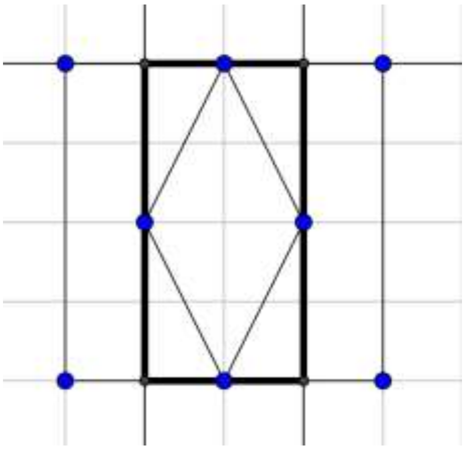
- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "*καλών*" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Λύση

Από τις κορυφές του ρόμβου φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τους πλέγματος, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το ρόμβο. Λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο του ρόμβου, θα πρέπει το ορθογώνιο αυτό να έχει άρτια μήκη πλευρών.

Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα ορθογώνια με άρτια μήκη πλευρών $2s\times 2t$ για τα οποία ισχύει $s\neq t$. Για το σκοπό αυτό θα μετρήσουμε όλα τα ορθογώνια $2s\times 2t$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$.


Σχήμα 2

- Έστω ότι $n=2k$

Αριθμούμε τις κάθετες ευθείες του πλέγματος από αριστερά προς τα δεξιά $1,2,3,...,2k+1$ και τις γραμμές του πλέγματος, από κάτω προς τα πάνω $1,2,3,...,2k+1$. Ένα ορθογώνιο $2s\times 2t$ προσδιορίζεται από δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος και δύο οριζόντιες που έχουν άρτια απόσταση. Για να έχουν άρτια απόσταση πρέπει και οι δύο να έχουν άρτιο αριθμό ή και οι δύο περιττό αριθμό. Για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτιο αριθμό έχουμε $\binom{k}{2}$ επιλογές, ενώ για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με περιττό αριθμό έχουμε $\binom{k+1}{2}$ επιλογές. Οπότε για να επιλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτια απόσταση έχουμε $\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=k^2$ επιλογές.

Όμοια, έχουμε k^2 επιλογές για τις στήλες. Οπότε συνολικά έχουμε $k^2\cdot k^2=k^4$ ορθογώνια $2s\times 2t$. Μένει τώρα να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$. Τα 2×2 τετράγωνα είναι $(n-2+1)^2=(2k-2+1)^2$. Τα 4×4 είναι $(n-4+1)^2=(2k-4+1)^2$. Γενικά τα $2s\times 2s$ είναι $(n-2s+1)^2=(2k-2s+1)^2$. Άρα όλα μαζί είναι

$$\sum_{s=1}^{k}(2k-2s+1)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+1)^2-4s(2k+1)+4s^2=$$
$$k(2k+1)^2-2(2k+1)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως οι ρόμβοι είναι: $k^4-\dfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3}=\dfrac{k(k-1)(3k^2-k-1)}{3}$.

- Όταν $n=2k+1$, εντελώς όμοια με παραπάνω έχουμε $\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{2}=k(k+1)$

επιλογές για την επιλογή των δύο κάθετων γραμμών και $k(k+1)$ επιλογές για την επιλογή των οριζόντιων. Επομένως έχουμε συνολικά $(k(k+1))^2$ ορθογώνια $2s\times 2t$ και πρέπει να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$ που είναι $(n-2s+1)^2=(2k+1-2s+1)^2=(2k+2-2s)^2$. Δηλαδή συνολικά

$$\sum_{s=1}^{k}(2k+2-2s)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+2)^2-4(2k+2)s+4s^2$$
$$=k(2k+2)^2-2(2k+2)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

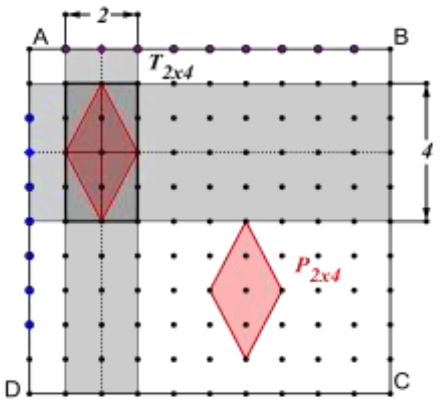
Επομένως, οι ρόμβοι είναι συνολικά:

$$(k(k+1))^2-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{3}$$

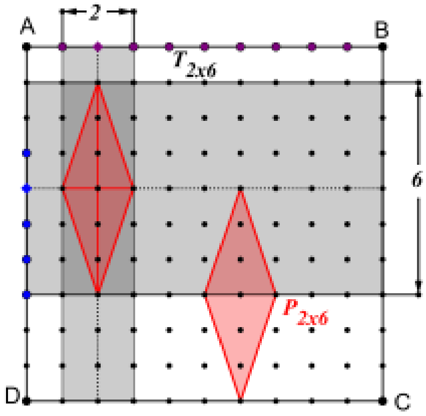
2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι το μήκος των πλευρών των στοιχειωδών τετραγώνων είναι 1.

Αν οι διαγώνιες του ρόμβου είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου, τότε οι κορυφές του θα είναι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη πολλαπλάσια του 2 και είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στα δύο παραπάνω σχήματα βλέπουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$).

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x4} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x4}.

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x6} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x6} …

Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{(2m)x(2k)}$, όπου m,k ακέραιοι με $1 \le m < k \le l$, όταν $n = 2l$.

Για $m = 1$ και $k = 2$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x4} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x2}) είναι $(n-1)(n-3)$.

Για $m = 1$ και $k = 3$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x2}) είναι $(n-1)(n-5)$.

…………

Για $m = 1$ και $k = l$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{2x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x2}$) είναι $(n-1)(n-2l+1)=(n-1)\cdot 1$.

Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 2, είναι: $S_2 = 2\big((n-1)(n-3)+(n-1)(n-5)+\cdots+(n-1)\cdot 1\big)=$

$$= 2(n-1)\big((n-3)+(n-5)+\cdots+1\big)=$$

$$=2(n-1)\frac{1+(n-3)}{2}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}.$$

Για $m=2$ και $k=3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x4}) είναι $(n-3)(n-5)$.
Για $m=2$ και $k=4$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 8, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-7$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x8} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{8x4}) είναι $(n-3)(n-7)$.
…………
Για $m=2$ και $k=l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{4x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x4}$) είναι $(n-3)(n-2l+1)=(n-3)\cdot 1$.
Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 4, είναι: $S_4=2\big((n-3)(n-5)+(n-3)(n-7)+\cdots+(n-3)\cdot 1\big)=$

$$=2(n-3)\big((n-5)+(n-7)+\cdots+1\big)=$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας και επεκτείνοντας τη διαδικασία έχουμε:

$$S_2=2(n-1)(n-l-1)(l-1)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-3)(n-1)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_4=2(n-3)(n-l-2)(l-2)=\begin{cases}\dfrac{(n-3)(n-4)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-5)(n-3)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_6=2(n-5)(n-l-3)(l-3)=\begin{cases}\dfrac{(n-5)(n-6)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-7)(n-5)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

………………………………………………

$$S_{2l-4}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot 4^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{6\cdot 8^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l-2}=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{4\cdot 6^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l}=\begin{cases}0, & n=2l\\ \dfrac{2\cdot 4^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}+\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}+\cdots+\frac{5\cdot 4^2}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2}.$$

$$=\frac{(n-2)^3+(n-2)^2}{2}+\frac{(n-4)^3+(n-4)^2}{2}+\ldots+\frac{4^3+4^2}{2}+\frac{2^3+2^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S=\frac{8(l-1)^3+4(l-1)^2}{2}+\frac{8(l-2)^3+4(l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{8\cdot 2^3+4\cdot 2^2}{2}+\frac{8+4}{2}=$$

$$=4((l-1)^3+(l-2)^3+\ldots+1)+2((l-1)^2+\ldots+1)=$$

$$=\big(l(l-1)\big)^2+2\cdot\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}=l(l-1)\left(l(l-1)+\frac{2l-1}{3}\right)=\frac{l(l-1)(3l^2-l-1)}{3}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l+1$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S'=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}+S_{2l}=\frac{(n-3)(n-1)^2}{2}+\frac{(n-5)(n-3)^2}{2}+\cdots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l+1$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S'=\frac{(2l-2)(2l)^2}{2}+\frac{(2l-4)(2l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}=$$

$$=4(l^3-l^2)+4((l-1)^3-(l-1)^2)+\ldots+4(3^3-2^3)+4(2^3-2^2)+4(1^3-1^2)=$$

$$=4((l^3+(l-1)^3+\ldots+1)-(l^2+(l-1)^2+\ldots+1))=$$

$$=(l(l+1))^2-2\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}=\frac{l(l+1)(3l^2-l-2)}{3}.$$

Τους δύο τύπους μπορούμε να τους συνοψίσουμε με τη βοήθεια του ακεραίου μέρους ως:

$$\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\right)}{3}.$$

ΘΕΜΑΤΑ 2017

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

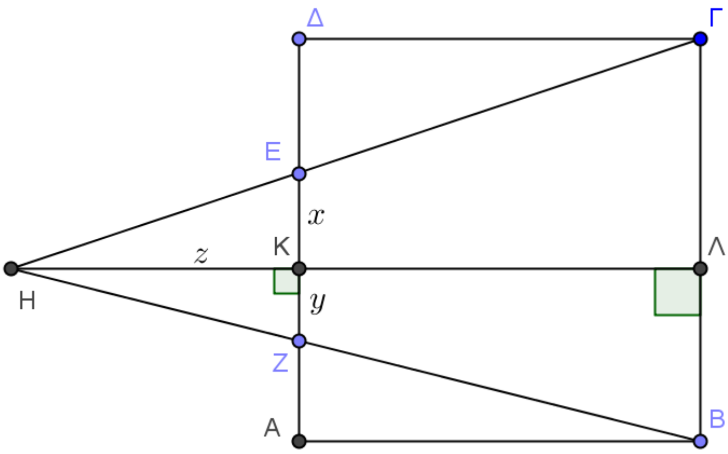
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta E = \frac{\alpha}{3}$ και $AZ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = x, ΚΖ = y και ΚΗ = z. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot H\Lambda = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + z) \quad . \qquad (1)$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\Gamma\hat{\Delta}E = E\hat{K}H = 90^o$ και $\Delta\hat{E}\Gamma = K\hat{E}H$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{KH}{\Gamma\Delta} = \frac{KE}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \qquad (2)$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{AZ}}\Leftrightarrow\frac{z}{\alpha}=\frac{y}{\frac{\alpha}{4}}\Leftrightarrow z=4y\qquad.\qquad(3)$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x+y=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AZ}-\mathrm{\Delta E}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}\qquad(4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x+y=\frac{5\alpha}{12}\Leftrightarrow\frac{z}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5\alpha}{12}\Leftrightarrow z=\frac{5\alpha}{7}\ ,$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+\frac{5\alpha}{7}\right)=\frac{12\alpha^2}{14}=\frac{6\alpha^2}{7}.$$

2^ος^ τρόπος. Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\mathrm{ZE}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{Z E \Gamma B}$ είναι:

$$(\mathrm{ZE\Gamma B})=\frac{\frac{5\alpha}{12}+\alpha}{2}\cdot a=\frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΖΗΕ και ΒΗΓ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{ZHE})}=\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{ZE}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-(\mathrm{BZE\Gamma})}=\left(\frac{12}{5}\right)^2\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-\frac{17\alpha^2}{24}}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς $(\mathrm{BH\Gamma})$ παίρνουμε ότι $(\mathrm{BH\Gamma})=\frac{6\alpha^2}{7}$.

Πρόβλημα 2

Αν x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}..$$

Λύση (1^ος^ τρόπος)

Επειδή είναι $x,y,z>0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0<x<6,\ 0<y<6,\ 0<z<6.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(6-x)(6-y)(6-z)=9^3\Leftrightarrow x(6-x)y(6-y)z(6-z)=9^3.\quad(1)$$

Όμως ισχύει ότι

$$0<x(6-x)=6x-x^2=9-(3-x)^2\leq 9.\qquad(2)$$

Η ισότητα ισχύει για $x=3$. Ομοίως ισχύουν και οι σχέσεις

$$0\leq y(6-y)\leq 9\qquad(3)$$

$$0 \le z(6-z) \le 9 \qquad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3) και (4), λαμβάνουμε

$$0 < x(6-x)y(6-y)z(6-z) \le 9^3, \qquad (5)$$

οπότε σε σύγκριση με την (1) προκύπτει ότι οι σχέσεις (2), (3) και (4) πρέπει να ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $x = y = z = 3$.

Εναλλακτικά οι σχέσεις (2) , (3) και (4) μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου. Για παράδειγμα, αφού $x, 6-x > 0$, έχουμε

$$0 < \sqrt{x(6-x)} \le \frac{x+6-x}{2} = 3 \Rightarrow 0 < x(6-x) \le 9.$$

2ος τρόπος: Επειδή είναι $x, y, z > 0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0 < x < 6,\ 0 < y < 6,\ 0 < z < 6.$$

Από τους τρεις αριθμούς κάποιος είναι ο μικρότερος, έστω $x \le y$ και $x \le z$. Τότε έχουμε

$$9 = x(6-y) \le x(6-x) \le z(6-x) = 9,$$

οπότε έπεται ότι

$$x(6-x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $y = 3$ και $z = 3$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους a, b, p, όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2 + b^2\right) = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Επειδή p πρώτος, από την (1) προκύπτει ότι: $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Υποθέτουμε ότι $p \mid a$, οπότε $a = pa_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow b^2 > p \Rightarrow b^2 \ge p+1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 a_1^2} \ge \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2+p} \ge \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 \le 2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a = p.$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p\left(p^2 + b^2\right) = p^2 b^2 \Leftrightarrow p^2 + b^2 = pb^2 \Leftrightarrow p^2 = (p-1)b^2 \Leftrightarrow p^2 - 1 = (p-1)b^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) = (p-1)b^2 - 1 \Rightarrow (p-1) \mid 1 \overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow} p-1 = 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

Επομένως, έχουμε $a = p = 2$ και από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $b = 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν υποθέσουμε ότι $p \mid b$.

2ος τρόπος. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς a^2 έχουμε ότι

$$a^2=\frac{pb^2}{b^2-p}=\frac{p(b^2-p)+p^2}{b^2-p}=p+\frac{p^2}{b^2-p}. \qquad (2)$$

Αφού ο a^2 είναι ακέραιος, θα πρέπει $b^2-p\mid p^2$, επομένως

$$b^2-p=1, \quad \acute{\eta} \quad b^2-p=p, \quad \acute{\eta} \quad b^2-p=p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $b^2-p=1 \Leftrightarrow p=b^2-1=(b-1)(b+1)$ και αφού p πρώτος, θα πρέπει $b-1=1$, άρα $b=2$ και $p=3$. Τότε είναι $a^2=12$, άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $b^2=2p$. Τότε b άρτιος, έστω $b=2b_1$, οπότε $4b_1^2=2p$, άρα $2\mid p$, άρα και πάλι $p=2$ και $b=2$, οπότε και $a=2$. Στην τρίτη περίπτωση η (2) δίνει $a^2=p+1 \Leftrightarrow p=a^2-1=(a-1)(a+1)$, οπότε αφού p πρώτος, θα πρέπει $a-1=1$, άρα $a=2$ και $p=3$, οπότε προκύπτει $b^2=3$, άτοπο.

Πρόβλημα 4.
Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα
(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους
(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

Λύση
Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2}=3$. Επομένως όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από n γύρους, θα έχουν παίξει μαζί $3n$ δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το $3n$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{n}{2}$. Δηλαδή, πρέπει:

$$\binom{n}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}\le 3 \Leftrightarrow n\le 7.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $n=7$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Πράγματι, για $n=7$ είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21=3\cdot 7$$

και αν υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι οι : Α,Β,.Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δύο να έχουν παίξει ένα παιγνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μία τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες:

(Α, Β, Γ), (Α, Δ, Ε), (Α, Ζ, Η), (Β, Δ, Η), (Β, Ε, Ζ), (Γ, Δ, Ζ), (Γ, Ε, Η).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

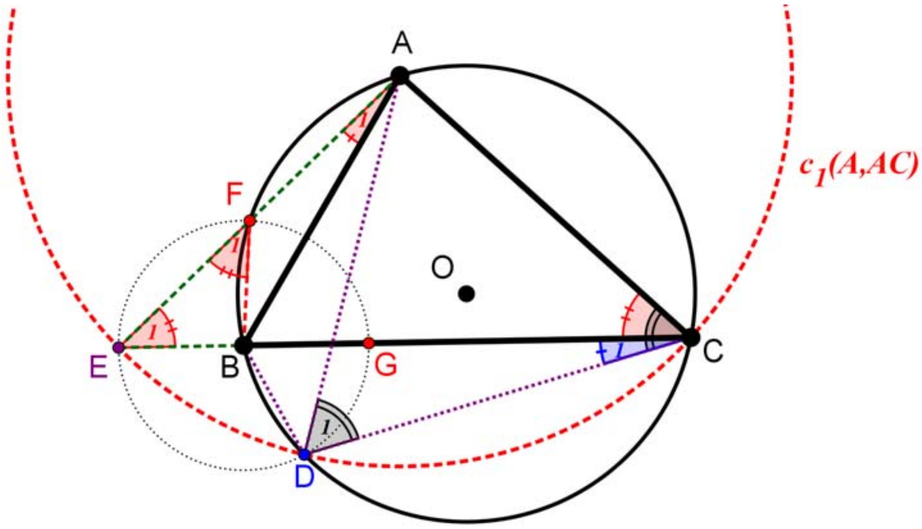
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα: $\hat{\mathrm{F}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}}$.

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad (1).$$

Ονομάζουμε $\hat{\mathrm{C}}_1 = x$ και από τον κύκλο (c_1) θα έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D} = 2x$, (ως επίκεντρη), οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}+\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=2x \qquad (2)$$

Επιπλέον, από τον κύκλο (c) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=\hat{\mathrm{C}}_1=x \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=x$, οπότε η AB είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο EAD. Συνεπώς είναι μεσοκάθετος της ED, άρα

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}. \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (1) και (4), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

2^{ος} τρόπος. Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα:

$$\hat{\mathrm{F}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{C}}.$$

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{C}}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1=\hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad (5).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABDC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}=\hat{\mathrm{B}}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{D}$ Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, έχουμε ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{D}=\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια

$$\hat{\mathrm{C}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από το τρίγωνο ABE έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{E}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}}$, οπότε: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{C}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}}$ και επειδή οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}_1, \hat{\mathrm{C}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c), θα ισχύει:

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BF} \qquad (6).$$

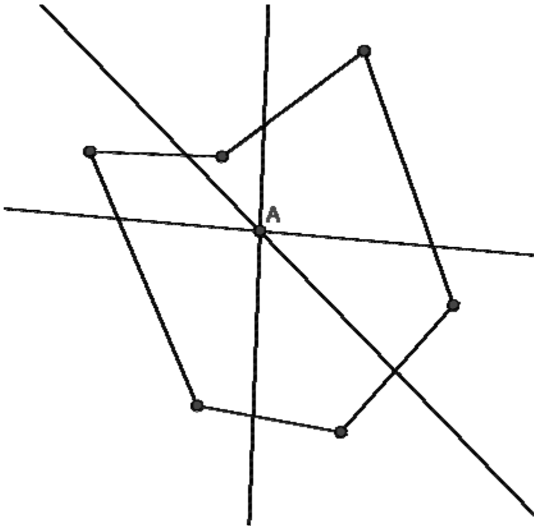
Από τις ισότητες (5) και (6), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

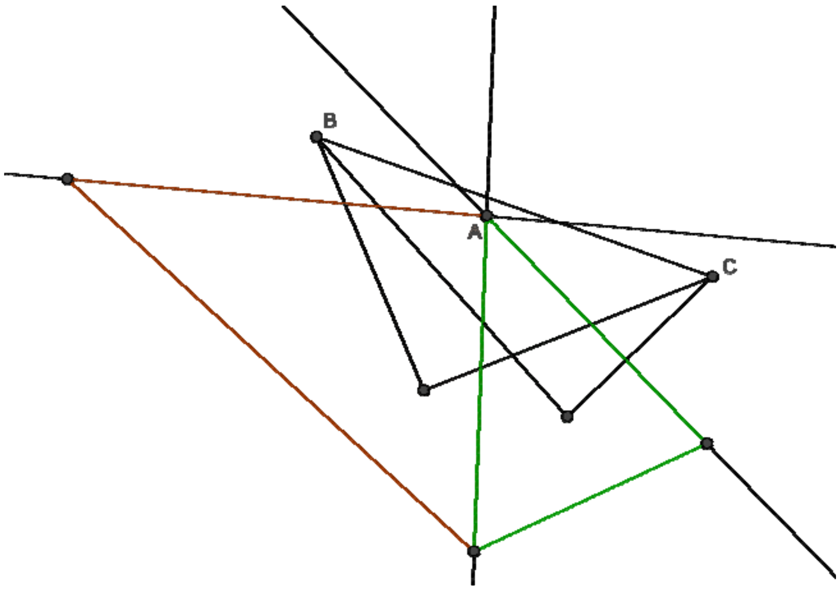
Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι οποιαδήποτε για οποιαδήποτε επιλογή 6 σημείων, ένα από κάθε τομέα, δημιουργείται ένα εξάγωνο (κυρτό ή μη κυρτό) το οποίο περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 2

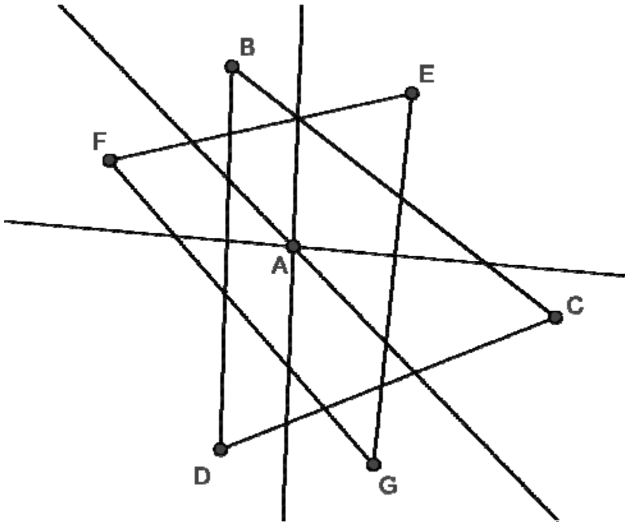
Από τα 6 αυτά σημεία δημιουργούνται $\binom{6}{3}=20$ τρίγωνα σε σύνολο. Θα υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά περιέχουν το σημείο Α. Αν έχω δύο σημεία από κατά κορυφή τομείς, τότε παρατηρώ ότι έχω επιλογή για την τρίτη κορυφή του τριγώνου από δύο τομείς. Για παράδειγμα, για τα σημεία B, C του παρακάτω σχήματος, όποιο σημείο και πάρουμε από τον κόκκινο ή τον πράσινο τομέα έχουμε τρίγωνο που περιέχει το σημείο Α.



Σχήμα 3

Υπάρχουν 3 ζεύγη κατά κορυφή τομέων, επομένως και έχουμε $5\cdot 5$ επιλογές για τη βάση BC και η τρίτη κορυφή επιλέγεται με $2\cdot 5$ τρόπους. Επομένως έχουμε συνολικά τουλάχιστον $3\cdot 2\cdot 5^3=6\cdot 5^3$ τέτοια τρίγωνα που περιέχουν το Α .

Αν τώρα έχω κορυφές σε εναλλάξ τομείς (όπως φαίνεται παρακάτω), τότε πάλι έχω τρίγωνο που περιέχει το σημείο A. Αυτά μπορεί να είναι είτε σαν το CBD είτε σαν το EFG.



Σχήμα 4

Σαν το CBD υπάρχουν $5\cdot5\cdot5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A και σαν το EFG υπάρχουν επίσης $5\cdot5\cdot5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A. Συνολικά σε αυτή την περίπτωση έχουμε $2\cdot5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A.

Αθροίζοντας, έχουμε τουλάχιστον $6\cdot5^3+2\cdot5^3=8\cdot5^3=1000$ τρίγωνα τα οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε πάνω στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a>0>b>c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N}=2017-a^3b-b^3c-c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού $a+b+c=0$, έχουμε ότι

$$a^3b+b^3c+c^3a=a^3b+b^3(-a-b)+(-a-b)^3a=-b^4-2b^3a-3a^2b^2-2a^3b-a^4=$$
$$=-(a^2+ab+b^2)^2 \qquad (1)$$

Επομένως, αν $2017-a^3b-b^3c-c^3a=k^2$, τότε

$$2017+(a^2+ab+b^2)^2=k^2 \Leftrightarrow (k-a^2-ab-b^2)(k+a^2+ab+b^2)=2017 \qquad (2)$$

Αφού ο 2017 είναι πρώτος, θα πρέπει

$$\begin{cases}k-a^2-ab-b^2=1\\ k+a^2+ab+b^2=2017\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k-a^2-ab-b^2=1\\ 2k=2018\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+ab+b^2=1008\\ k=1009\end{cases} \qquad (3)$$

Για να ισχύει

$$a^2+ab+b^2=1008 \qquad (4)$$

πρέπει οι a,b να είναι και οι δύο άρτιοι, διαφορετικά, το αριστερό μέλος είναι περιττός. Επιπλέον, έχουμε ότι $9|1008$, άρα $9|a^2+ab+b^2$, οπότε πρέπει $3|a$ και $3|b$. Επομένως. οι a,b διαιρούνται από 6, οπότε γράφουμε $a=6m$ και $b=6n$, οπότε η (1) γίνεται

$$m^2+mn+n^2=28 \qquad (5)$$

Ομοίως, οι m,n πρέπει να είναι άρτιοι, οπότε $m=2x$ και $n=2y$. Τότε η (7) γίνεται

$$x^2+xy+y^2=7 \qquad (6)$$

Για να έχει ακέραιες λύσεις η τελευταία πρέπει η διακρίνουσα ως προς y να είναι μη αρνητική και τέλειο τετράγωνο. Όμως $\Delta=x^2-4(x^2-7)=28-3x^2$, οπότε:

$$x^2=1 \text{ ή } x^2=4 \text{ ή } x^2=9.$$

Επειδή, $a>0$ θα έχουμε $x>0$, οπότε $x\in\{1,2,3\}$. Επειδή $y<0$, παίρνουμε τα ζεύγη $(x,y)\in\{(1,-3),(2,-3),(3,-2),(3,-1)\}$, οπότε, αφού $a=12x,\ b=12y$ έχουμε ότι

$$(a,b)\in\{(12,-36),\ (24,-36,),\ (36,-24),(36,-12)\}$$

Λόγω του ότι $a+b+c=0$ και του περιορισμού $a>0>b>c$, έχουμε τη μοναδική λύση

$$(a,b,c)=(36,-12,-24).$$

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+...+a_n\equiv 1(\bmod 2)$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+...+a_n$.

Λύση

(i) Επειδή ο αριθμός $\xi=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ είναι άρρητος και το πολυώνυμο $F(x)=P(x)-2017$ έχει ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό ξ, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, οπότε θα διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2+x-4$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)+\kappa x+\lambda,$$

Από την οποία για $x=\xi$ λαμβάνουμε $\kappa\xi+\lambda=0$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa=\lambda=0,$ αφού ο αριθμός ξ είναι άρρητος.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0-2017=(x^2+x-4)Q(x) \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) για $x=1$ λαμβάνουμε:

$$a_0+a_1+\ldots+a_n-2017=-2Q(1)$$
$$\Rightarrow a_0+a_1+\ldots+a_n=2017-2Q(1)\equiv 1(\bmod 2)$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(α) $a_n\xi^n+a_{n-1}\xi^{n-1}+\ldots+a_1\xi+a_0=2017$

(β) το άθροισμα $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αληθεύει η σχέση:
$$0\le a_i\le 3,\ \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,n-2.$$
Πράγματι, αν ήταν διαφορετικά για κάποιο $i=1,2,\ldots,n-2$, τότε το σύνολο
$$\{a_0,\ldots,a_{i-1},a_i-4,a_{i+1}+1,a_{i+2}+1,a_{i+3},\ldots a_n\}$$
θα είχε στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους, θα ικανοποιούσε τη σχέση (α), ενώ θα είχε άθροισμα στοιχείων μικρότερο από αυτό του συνόλου $\{a_0,\ a_1,\ldots,a_n\}$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα $Q(x)=b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$. Τότε από την ταυτότητα
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-2017=\left(x^2+x-4\right)\left(b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0\right)$$
προκύπτουν οι ισότητες:
$$\left\{\begin{array}{ll} a_0-2017 & =-4b_0\\ a_1 & =-4b_1+b_0\\ a_2 & =-4b_2+b_1+b_0\\ a_3 & =-4b_3+b_2+b_1\\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ a_{n-2} & =-4b_{n-2}+b_{n-3}+b_{n-4}\\ a_{n-1} & =b_{n-2}+b_{n-3}\\ a_n & =b_{n-2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} a_0-2017 & =-4b_0\\ a_1-b_0 & =-4b_1\\ a_2-b_1-b_0 & =-4b_2\\ a_3-b_2-b_1 & =-4b_3\\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ a_{n-2}-b_{n-3}-b_{n-4} & =-4b_{n-2}\\ a_{n-1}-b_{n-2} & =b_{n-3}\\ a_n & =b_{n-2}\end{array}\right\}$$
Γενικά ισχύει ότι: $a_{i+2}-b_{i+1}-b_i=-4b_{i+2}$, για κάθε $i=0,1,\ldots,n-4$

Επειδή είναι $0\le a_i\le 3$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n-2,$ από την πρώτη εξίσωση από τις παραπάνω προκύπτει ότι $a_0=1$ και $b_0=504$. Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε $a_1=0$ και $b_1=126$. Από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε $a_2=2$ και $b_2=157$. Συνεχίζοντας ομοίως λαμβάνουμε τα σύνολα
$$\{b_0,b_1,b_2,\ldots b_{14}\}=\{504,126,157,70,56,31,21,13,8,5,3,2,1,0,0\}$$
$$\{a_0,a_1,a_2,\ldots a_{14}\}=\{1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1\}$$
Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι **23.**

ΘΕΜΑΤΑ 2018

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Λύση

(α) Έστω $x+\sqrt{3}=q,\ x^2+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$x=q-\sqrt{3}\Rightarrow x^2=q^2-2q\sqrt{3}+3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^2-2q\sqrt{3}+3\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(2q-1\right)=p-q^2-3$$

Τότε πρέπει $2q-1=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p=q^2+3\Rightarrow q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$ και $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

(β) Έστω $y+\sqrt{3}=q,\ y^3+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$y=q-\sqrt{3}\Rightarrow y^3=q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(3q^2+2\right)=p-q^3-9q\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}=\frac{q^3+9q-p}{3q^2+2}\in\mathbb{Q}$$

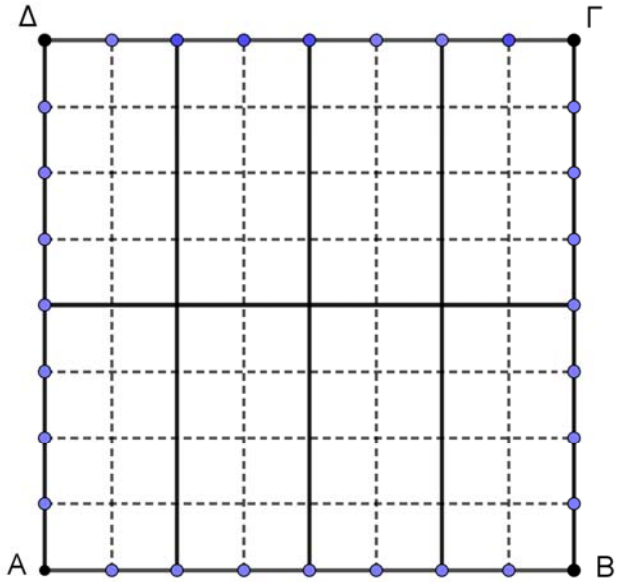
που είναι άτοπο.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

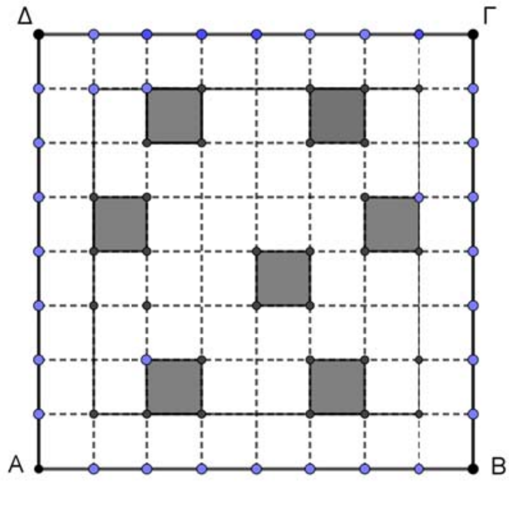
Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια 4×2. Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά 4×2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4×2 ορθογώνιο εμβαδού $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$. Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6×6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 2

Σημείωση: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχείρημα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Έστω $\dfrac{(a+b)^2+4a}{ab} = \kappa \in \mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2+4a = \kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο a είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2 \mid a$, τότε θα πρέπει $2 \mid (a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο b να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς b, στη μορφή:

$$b^2 + b(2-\kappa)a + a^2 + 4a = 0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta = a^2(\kappa-2)^2 - 4(a^2+4a) = a(a(\kappa-2)^2 - 4a - 16)$. Επομένως το γινόμενο των a, $a(\kappa-2)^2 - 4a - 16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο a είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

2ος τρόπος:

Έστω $d = (a,b)$ και γράφουμε $a = dx, b = dy$, με $(x,y) = 1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d \mid b$ και ο b είναι περιττός, θα πρέπει d περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \frac{d^2(x+y)^2+4dx}{d^2xy} = \frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x \mid d(x+y)^2+4x \Rightarrow x \mid dy^2$ και επειδή $(x,y)=1$, πρέπει $x \mid d$. Επίσης, $d \mid d(x+y)^2+4x \Rightarrow d \mid 4x$ και αφού d περιττός, $d \mid x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d = x$, άρα $a = d^2$.

Πρόβλημα 4

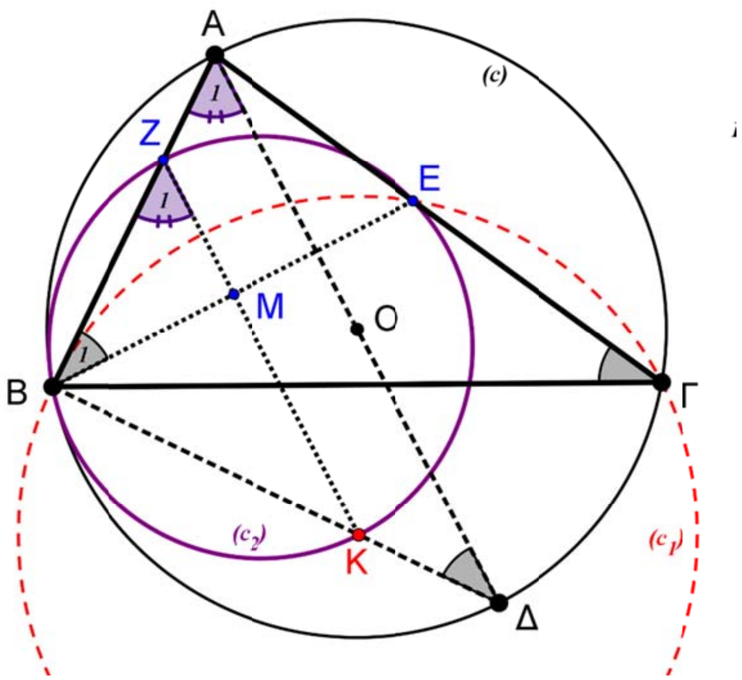
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΚΕ, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Λύση (1ος Τρόπος)

Έστω Ζ η τομή του κύκλου c_2 με την ΑΒ και Μ η τομή της ΚΖ με την ΒΕ. Η γωνία $\hat{ΑΒΔ}$ (άρα και η γωνία $\hat{ΖΒΚ}$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο ΑΔ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $\hat{ΖΒΚ} = 90°$, η ΖΚ είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ΖΚ θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΒΕ των κύκλων c_1 και c_2. Η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο c_1, άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΖ έχουμε:

$$\widehat{Z_1} = 90° - \widehat{Β_1} = 90° - \hat{Γ} \quad . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{Δ}, \hat{Γ}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{Δ} = \hat{Γ}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε: $\hat{Α}_1 = 90° - \hat{Δ} = 90° - \hat{Γ} \quad (2)$.

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{Α_1} = \widehat{Z_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΚΖ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $A\Delta KZ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το O είναι το μέσο της $A\Delta$, συμπεραίνουμε ότι η OB θα διέρχεται από το μέσο της KZ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2. Άρα τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο B.

Εφόσον τα τμήματα $A\Delta$ και KZ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το B και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

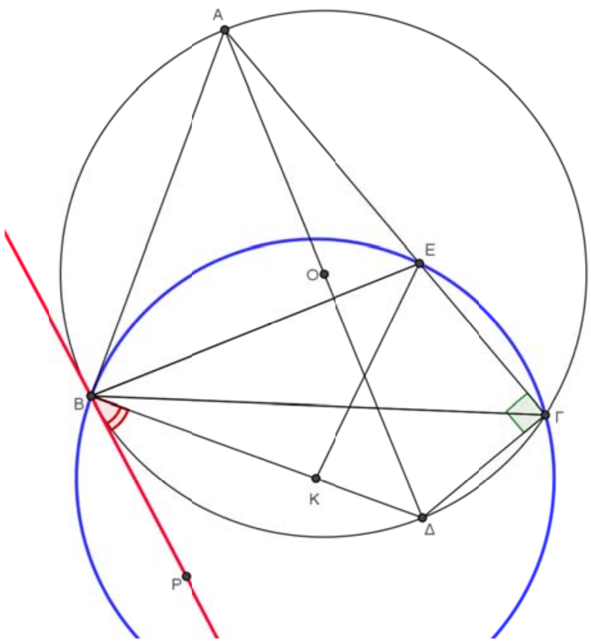
Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο B. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B. Έστω BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο B και ονομάζουμε $\widehat{KBP}=\omega$. Για να δείξουμε ότι η BP είναι εφαπτομένη του c_2 στο B, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{BEK}=\omega\ . \qquad (1)$$

Επειδή η BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{\Delta\Gamma B}=\omega$. Επιπλέον η $A\Delta$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{A\Gamma\Delta}=90^\circ$, οπότε $\widehat{E\Gamma B}=90^\circ-\omega$. Όμως

$$\widehat{BKE}=2\widehat{B\Gamma E}=2(90^\circ-\omega)=180^\circ-2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1. Όμως το τρίγωνο BKE είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{KBE}=\widehat{KEB}=\omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n),\ n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \dfrac{a}{b}$, όπου a,b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1} = \dfrac{p}{q}$ όπου ο q δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p,q) = 1$. Τότε

$$x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1} = \frac{3p^3 + pq^2}{q^3} = \frac{p(3p^2 + q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p,q) = 1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m . Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2 + q^2)$, q^3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s \mid q^3 \Rightarrow s \mid q$ και $s \mid 3p^2 + q^2$ τότε $s \mid 3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p , θα έχουμε $s \mid 3 \Rightarrow s = 3$, $3 \mid q$, άτοπο από την (*).

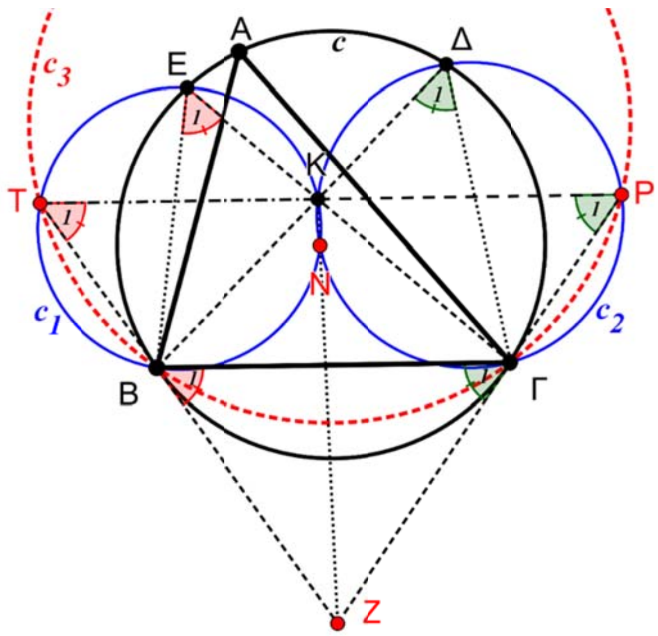
Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.
Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q = a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2 + q^2) = \kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι. Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2 + q^2$, τότε $t \mid q$, που είναι άτοπο αφού $(p,q) = 1$.

Έτσι $p = b^2$, $2p^2 + q^2 = c^2$. Επομένως $x_{m-1} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο

τετράγωνο ρητού.
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα $ΑΓ$ και $ΑΒ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Έστω $Κ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $ΒΚΕ$, έστω c_1, και $ΓΚΔ$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $Α, Κ, Ν$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο $Κ$ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $ΑΒΓ$, που αντιστοιχεί στην κορυφή $Α$.
Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Λύση



Σχήμα 1

1ος Τρόπος
Έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη $Ζ$ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $Β, Γ$ του κύκλου c. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $Κ, Ν, Ζ$ είναι συνευθειακά.
Σημειώνουμε με $Τ$ τη τομή της $ΒΖ$ με τον c_1 και $Ρ$ τη τομή της $ΖΓ$ με τον c_2, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{Ε}_1 = \hat{Τ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_1 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΒΚ$)

$\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_1$: (η $\hat{Β}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτομένη $ΒΖ$ στο κύκλο c)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Ρ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΓΚ$)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$: (η $\hat{Γ}_1$ είναι γωνία της χορδής $ΒΓ$ και την εφαπτομένης $ΓΖ$ στο κύκλο c)

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (οι ZB και $Z\Gamma$ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο c)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{B}_1 = \hat{T}_1 \text{ , άρα } KT // B\Gamma \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1 \text{, άρα } KP // B\Gamma .$$

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3).

Άρα η κοινή χορδή KN των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Z των κύκλων c_1, c_2, c_3.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N, T είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία A, K, N θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο AT.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο AT , τότε τα σημεία A, K, T θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

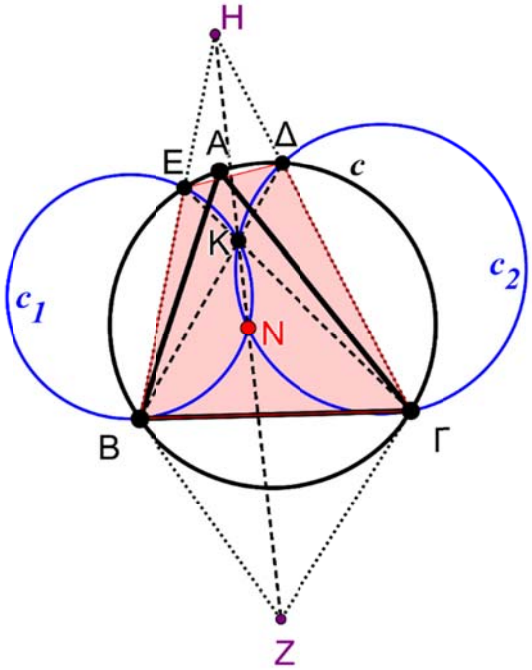
2^{ος} Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c. Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία H, K, Z είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c. Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$.

Άρα τα σημεία K, N, H είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ.

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n<m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i)-P(a_j)|=|a_i-a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \leq i<j \leq m$.

(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n<m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|<|a_i-a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \leq i<j \leq m$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1>a_2>\ldots>a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i=P(a_i)-P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
& |d_1|+|d_2|+\ldots+|d_{m-1}|= \\
& =|P(a_1)-P(a_2)|+|P(a_2)-P(a_3)|+\ldots+|P(a_{m-1})-P(a_m)| \\
& =|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{m-1}-a_m| \\
& =a_1-a_2+a_2-a_3+\ldots+a_{m-1}-a_m \\
& =a_1-a_m=|a_1-a_m| \\
& =|P(a_1)-P(a_m)|=|P(a_1)-P(a_2)+P(a_2)-P(a_3)+\ldots+P(a_{m-1})-P(a_m)| \\
& =|d_1+d_2+\ldots+d_{m-1}|
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1)-P(a_2)=a_1-a_2 \Rightarrow P(a_1)-a_1=P(a_2)-a_2$. Όμοια $P(a_2)-a_2=P(a_3)-a_3, \ldots, P(a_{m-1})-a_{m-1}=P(a_m)-a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1)-a_1=P(a_2)-a_2=\ldots=P(a_m)-a_m=k \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-x-k$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

2η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$.Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n , έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \ P(p) - P(r) = r - p \ .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r \ . (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$| a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b | = | a_i - a_j | \Leftrightarrow | a | = 1$$

οπότε $P(x) = x + b,$ ή $P(x) = -x + b$.

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$, τότε είτε $P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = ... = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $| a_i | < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\,(1)$$

και

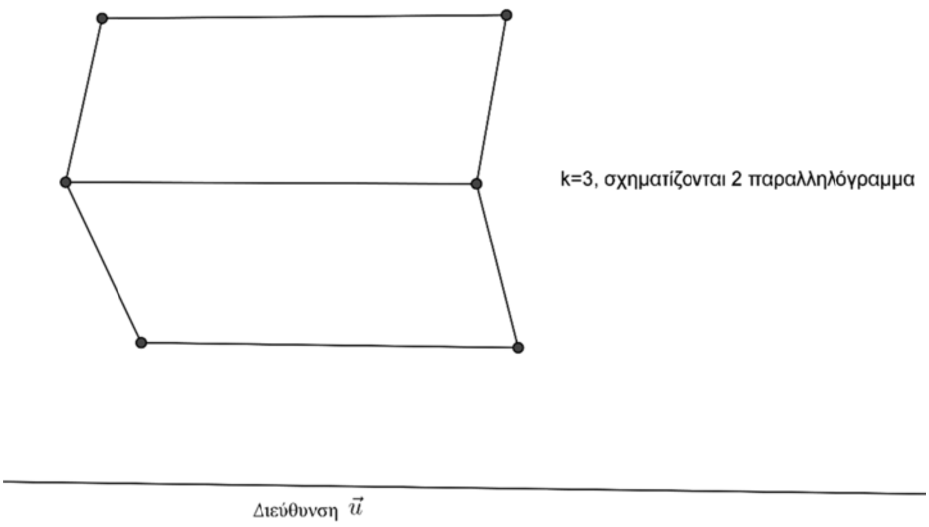
$$|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\le|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n}{n^{n-1}}<1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.
Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n \ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n) \le \dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n \ge 4$.

Λύση
Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.



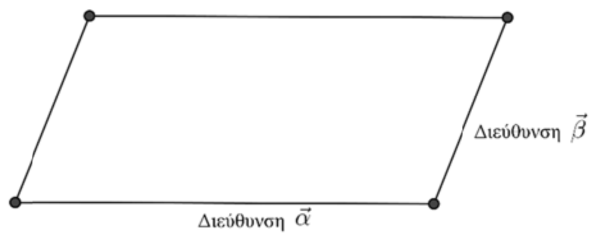
Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\dbinom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2}-s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

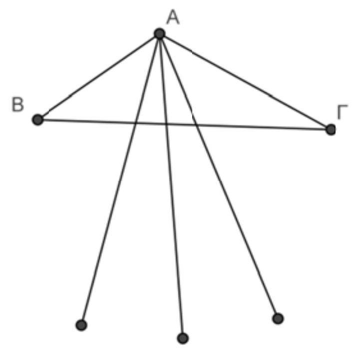


Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο A συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το A, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-n}{2}=\frac{n^2-3n}{4}.$$

ΘΕΜΑΤΑ 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2+25z^2=6xz+8yz \\ 3x^2+2y^2+z^2=240 \end{Bmatrix}$$

Λύση
Η πρώτη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$x^2-6xz+9z^2+y^2-8yz+16z^2=0 \Leftrightarrow (x-3z)^2+(y-4z)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-3z=0 \text{ και } y-4z=0 \Leftrightarrow x=3z \text{ και } y=4z.$$

Επομένως, όλες οι τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση είναι της μορφής:

$$(x,y,z)=(3t,\ 4t,\ t),\ t\in\mathbb{R}.$$

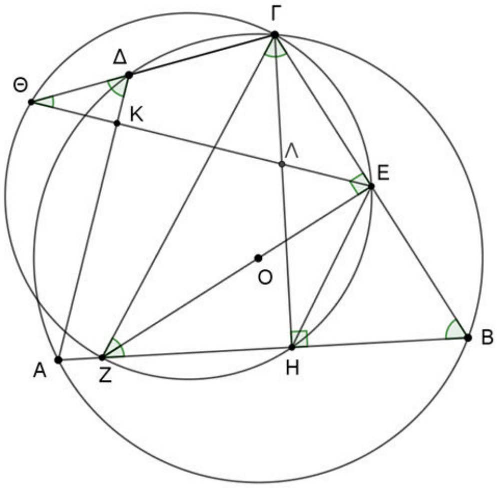
Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$3\cdot 9t^2+2\cdot 16t^2+t^2=240 \Leftrightarrow 60t^2=240 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2.$$

Για $t=2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(6,8,2)$, ενώ για $t=-2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(-6,-8,-2)$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$, έπεται ότι $A\hat{H}\Lambda = 90^\circ$ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. Επειδή $\Delta\hat{K}\Theta = A\hat{K}\Lambda$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο ΔΘΚ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή: $\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = 90^\circ$.

Όμως έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Theta}K = \Gamma\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}E$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)

$\Gamma\hat{Z}E = E\hat{Z}B$ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ)

Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K = E\hat{Z}B \qquad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\Theta\hat{\Delta}K = Z\hat{B}E \qquad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ)
Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = E\hat{Z}B + Z\hat{B}E = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ορθογώνιο στο Ε.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Λύση
Έστω κ το πλήθος των ψηφίων του ακέραιου Α ο οποίος ισούται με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων του. Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος με κ ψηφία είναι ο $10^{\kappa-1}$, ενώ το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων του είναι 9κ. Επομένως, για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος θα πρέπει:

$$10^{\kappa-1} \le 13\cdot 9\kappa = 117\kappa \ . \qquad (1)$$

Για $\kappa \ge 4$ θα αποδείξουμε ότι: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (1).

Πράγματι, για $\kappa = 4$ έχουμε: $10^{4-1} = 10^3 > 117\cdot 4 = 468$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, για το τυχόν $\kappa > 4$, τότε προκύπτει ότι:

$$10^{(\kappa+1)-1} = 10^{\kappa} = 10\cdot 10^{\kappa-1} > 10\cdot 117\kappa = 117\cdot 10\kappa > 117\cdot(\kappa+1).$$

Επομένως το πλήθος κ των ψηφίων του Α πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του 3.

- Η περίπτωση με $\kappa = 1$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = \alpha < 13\alpha$, με $0 < \alpha \le 9$.
- Η περίπτωση με $\kappa = 2$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = 10\alpha + \beta < 13(\alpha+\beta)$.
- Έστω $\kappa = 3$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, με $0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta,\gamma \le 9$. Τότε πρέπει:

$$100\alpha + 10\beta + \gamma = 13\cdot(\alpha+\beta+\gamma), \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta,\gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 87\alpha = 3\beta + 12\gamma, \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta,\gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 29\alpha = \beta + 4\gamma,\ 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta,\gamma \le 9$$

Επειδή ισχύει: $0 \le \beta + 4\gamma \le 45 \Rightarrow 29\alpha \le 45 \Rightarrow \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha = 1$ (αφού $\alpha \ne 0$), οπότε έχουμε:

$$\beta + 4\gamma = 29 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma \ge 0 \Rightarrow 0 \le \beta = 29 - 4\gamma \le 9$$

$$\Rightarrow -29 \le -4\gamma \le -20 \Rightarrow 5 \le \gamma \le \frac{29}{4} \Rightarrow \gamma \in \{5,6,7\}$$

- Για $\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 9$ και $\mathrm{A} = 195$.
- Για $\gamma = 6 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 5$ και $\mathrm{A} = 156$.
- Για $\gamma = 7 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 1$ και $\mathrm{A} = 117$.

Πρόβλημα 4

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3,…,2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:

Επιλέγουν δύο αριθμούς α, β από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς $5\alpha - 2\beta$ και $3\alpha - 4\beta$.

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9,…, 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα μεταβάλλεται όσο η διαφορά:

$$(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha - 4\beta) - (\alpha + \beta) = 7\alpha - 7\beta = 7(\alpha - \beta) = \pi o\lambda.7$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάθε εφαρμογή της παραπάνω κίνησης η διαφορά του αθροίσματος $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μείον το άθροισμα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ των αριθμών που ήταν αρχικά γραμμένοι στον πίνακα είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 7, δηλαδή

$$\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o} - \Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = \pi o\lambda.7 \ .$$

Επομένως τα αθροίσματα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ και $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ διαιρούμενα με το 7 πρέπει να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Όμως $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = 1+2+3+...+2018 = \dfrac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019 \equiv 1 \cdot 3 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$.

Επιπλέον, αν μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων φθάσουμε στους αριθμούς 3,6,9,…,6054, τότε το άθροισμα τους θα είναι

$$\Sigma_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}} = 3+6+9 = ...+6054 = 3 \cdot \Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} \equiv 3 \cdot 3 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

Επειδή τα υπόλοιπα των αθροισμάτων $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ και $\Sigma_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}}$ όταν διαιρούνται με το 7 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να προκύψουν στον πίνακα οι αριθμοί 3,6,9,…,6054 και επομένως έχει δίκιο η Μαρία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία α_ν έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1},\ \nu \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο α_ν και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο a_k, όπου $k = 2^{2019}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ακολουθίας έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 1\\ \alpha_2 &= 5\alpha_1 + 3\\ \alpha_3 &= 5\alpha_2 + 3^2\\ \alpha_4 &= 5\alpha_3 + 3^3\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{\nu-1} &= 5\alpha_{\nu-2} + 3^{\nu-2}\\ \alpha_\nu &= 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 5^{\nu-1}\alpha_1 &= 5^{\nu-1}\\ 5^{\nu-2}\alpha_2 &= 5^{\nu-1}\alpha_1 + 5^{\nu-2}\cdot 3\\ 5^{\nu-3}\alpha_3 &= 5^{\nu-2}\alpha_2 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2\\ 5^{\nu-4}\alpha_4 &= 5^{\nu-3}\alpha_3 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3\\ &\dots\dots\dots\dots\\ 5\alpha_{\nu-1} &= 5^2\alpha_{\nu-2} + 5\cdot 3^{\nu-2}\\ \alpha_\nu &= 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{aligned}\right\} \overset{\substack{\text{πρόσθεση}\\ \text{κατά μέλη}}}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1} + 5^{\nu-2}\cdot 3 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 + \dots + 5\cdot 3^{\nu-2} + 3^{\nu-1} = \frac{5^\nu - 3^\nu}{5-3} = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),$$

για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1}\cdot\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1}\right] = 5^{\nu-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^\nu}{1-\frac{3}{5}}$$

$$= 5^{\nu-1}\cdot\frac{5}{2\cdot 5^\nu}\left(5^\nu - 3^\nu\right) = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),\ \text{για κάθε } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Επομένως έχουμε: $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Για την εύρεση του γενικού όρου, εναλλακτικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Από τον ορισμό της ακολουθίας διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{2}(5-3),\ \alpha_2 = 5\cdot 1 + 3 = 8 = \frac{1}{2}\left(5^2 - 3^2\right),\ \alpha_3 = 5\cdot 8 + 3^2 = 49 = \frac{1}{2}\left(5^3 - 3^3\right),..$$

Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1,2,3,\ldots$, το οποίο αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα για $k = 2^{2019}$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων, έχουμε

$$2a_k = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}} = 2\cdot(5+3)(5^2+3^2)\ldots(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}),$$

οπότε

$$a_k = (5+3)(5^2+3^2)\ldots(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}).$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι εκτός από την πρώτη παρένθεση που διαιρείται από 8, όλες οι άλλες παρενθέσεις διαιρούνται από το 2 αλλά όχι από το 4.

Πράγματι, ισχύει ότι: $5^{2^\nu} \equiv 1 \pmod 4$ και $3^{2^\nu} \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^{2^\nu} + 3^{2^\nu} \equiv 2 \pmod 4$, για κάθε $\nu \geq 1$.

Οι παρενθέσεις από το $5^2 + 3^2$ μέχρι το $(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}})$, είναι συνολικά 2018, οπότε η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό είναι $2^3 \cdot \underbrace{2^1 \cdot \ldots \cdot 2^1}_{2018 \text{ το πλήθος}} = 2^{2021}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μία ειδική μορφή του λήμματος ανύψωσης του εκθέτη (Lifting the Exponent Lemma) το οποίο αφορά το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του 2 που διαιρεί μία διαφορά δυνάμεων με βάσεις ακέραιους. Σημειώνουμε με $\upsilon_p(\alpha)$ το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του πρώτου θετικού ακέραιου p που διαιρεί τον ακέραιο α, δηλαδή ισχύει ότι: $p^{\upsilon_p(a)} \mid \alpha$ *και* $p^{\upsilon_p(a)+1}$ δεν διαιρεί το α.

Λήμμα: Έστω α, β δύο περιττοί ακέραιοι και ν ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει ότι:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2(\alpha - \beta) + \upsilon_2(\alpha + \beta) + \upsilon_2(\nu) - 1$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το τετράγωνο περιττού ακέραιου είναι της μορφής $4\kappa + 1$, οπότε ο ακέραιος 4 διαιρεί τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$. Αν ο ν γράφεται στη μορφή $\nu = \mu \cdot 2^\kappa$, τότε:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2\left(\alpha^{\mu\cdot 2^\kappa} - \beta^{\mu\cdot 2^\kappa}\right) = \upsilon_2\left(\left(\alpha^2\right)^{2^\kappa} - \left(\beta^2\right)^{2^\kappa}\right) =$$

$$\ldots = \upsilon_2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \kappa - 1 = \upsilon_2(\alpha - \beta) + \upsilon_2(\alpha + \beta) + \upsilon_2(\nu) - 1.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τον ακέραιο $2a_{2^{2019}} = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}$ λαμβάνουμε:

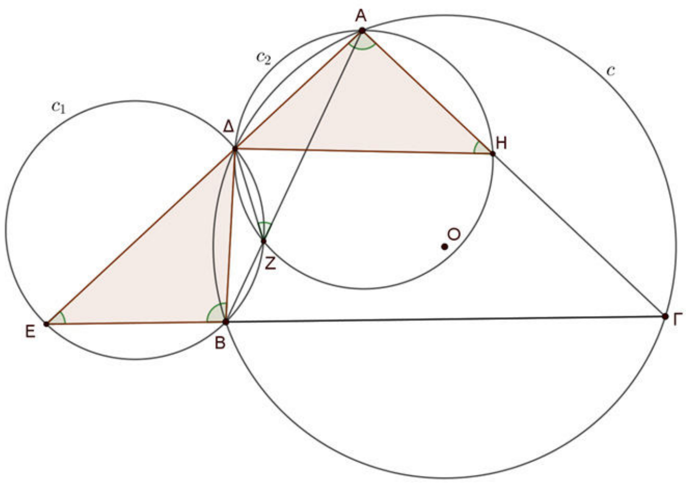
$$\upsilon_2\left(2a_{2^{2019}}\right) = \upsilon_2\left(5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}\right) = \upsilon_2(5-3) + \upsilon_2(5+3) + \upsilon_2\left(2^{2019}\right) - 1 = 1 + 3 + 2019 - 1 = 2022,$$

οπότε τελικά έχουμε: $\upsilon_2(a_k) = 2021$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ (έστω c_1) τέμνει την ΑΒ (για δεύτερη φορά) στο σημείο Ζ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΖ (έστω c_2) τέμνει (για δεύτερη φορά) την ΑΓ στο σημείο Η να αποδείξετε ότι $BE = AH$.

Λύση (1^ος^ τρόπος)



Σχήμα 1

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΓ έχουμε ότι:

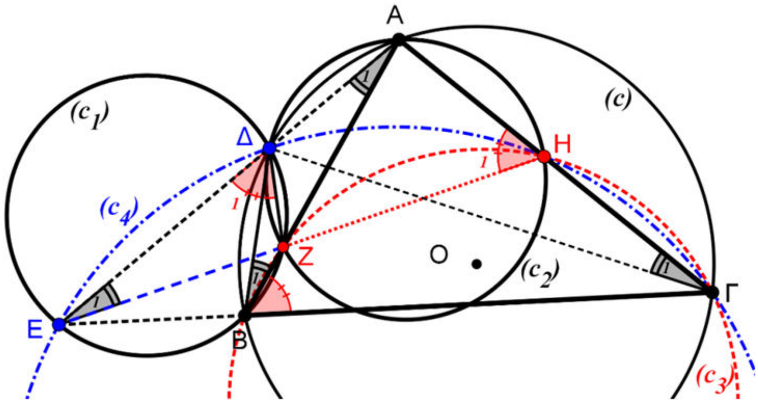
$$\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{B}E \qquad (1)$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΒΖ και ΑΔΖΗ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{E}B = \Delta\hat{Z}A = A\hat{H}\Delta \qquad (2)$$

Επειδή το Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, έπεται ότι: $A\Delta = \Delta B$. Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) και την ισότητα $A\Delta = \Delta B$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΔΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΕ και ΑΗ ίσες.

2^ος^ τρόπος



Σχήμα 2

Εφόσον το σημείο Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους διότι η (κοινή) χορδή ΔΖ φαίνεται υπό ίσες γωνίες $(\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1)$.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι τα τμήματα ΒΕ, ΑΗ (που είναι χορδές των ίσων κύκλων (c_1) και (c_2)) είναι ίσα μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες, δηλαδή ότι $\widehat{BZE} = \widehat{AZH}$ ή ότι τα σημεία Ε, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Ζ είναι το σημείο Miquel του τριγώνου, ως σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων ΒΕΔ, ΑΗΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Αυτό προκύπτει εύκολα και από ισότητες γωνιών.

Θεωρούμε τώρα τους κύκλους (c), (c_2) και (c_3). Οι κοινές χορδές τους συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο. Οι κοινές χορδές τους όμως είναι οι ΑΔ, ΖΗ, ΒΓ, οπότε αυτές συντρέχουν. Έπεται ότι η ΖΗ περνά από το σημείο Ε, που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση του σημείου Miquel ως εξής. Έχουμε

$$Z\widehat{B}\Gamma \overset{\text{εξωτερική στο } BZ\Delta E}{\overbrace{=}} E\widehat{\Delta}Z \overset{\text{εξωτερική στο } A\Delta ZH}{\overbrace{=}} A\widehat{H}Z,$$

οπότε το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Από το θεώρημα της δύναμης σημείου Ε ως προς κύκλο (c) έχουμε $EB\cdot E\Gamma = E\Delta\cdot EA$

Όμως το αριστερό μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_3) και το δεξί μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_2). Έπεται ότι το Ε ανήκει στον ριζικό άξονα αυτών των δύο κύκλων, που είναι η κοινή τους χορδή ΖΗ, δηλαδή το Ε ανήκει ΖΗ, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y+1$$

Λύση

Θέτουμε $y=\dfrac{p}{q}$, σε ανάγωγη μορφή με $p,q\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p},$$

Και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην $\dfrac{q}{p}$ παίρνουμε:

$$x = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^q}{p^q}}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ρητός, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επιπλέον $(p+q,p)=1$, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι τέλειες p δυνάμεις. Άρα πρέπει

$$p+q=a^p \quad \kappa\alpha\iota \quad p=b^p\ , \quad a,b\in\mathbb{N}^*, a>1$$

Αν όμως $b\geq 2$, έχουμε ότι $b^p\geq 2^p>p$, οπότε πρέπει $b=1$, άρα $p=1$ και $q=a-1$. Επομένως τα ζεύγη λύσεων δίνονται παραμετρικά

$$(x,y)=\left(a^{a-1},\ \frac{1}{a-1}\right),\ a\in\mathbb{N}^*, a>1\ .$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu\times\mu$, με $\nu\leq\mu,$ το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε N μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

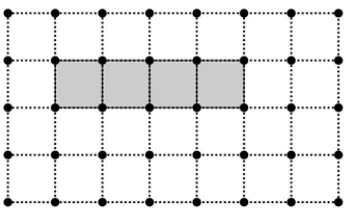
Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού N των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

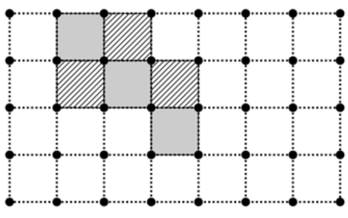
Λύση

Αριθμούμε τις γραμμές του ορθογωνίου από το 1 μέχρι το ν και τις στήλες από το 1 μέχρι το μ .

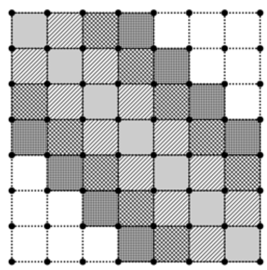
Για $\nu=\mu$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο $\nu\times\nu$, ενώ για $\nu<\mu$ το ορθογώνιο αποτελείται από ένα τετράγωνο $\nu\times\nu$ και από ένα ορθογώνιο $\nu\times(\mu-\nu)$. Παρατηρούμε ότι δύο διπλανά τετράγωνα της ίδιας γραμμής ή της ίδιας στήλης με μαύρα πιόνια δεν δίνουν την δυνατότητα πλήρωσης κάποιου άλλου μοναδιαίου τετραγώνου. Όταν όμως είναι διαδοχικά στην ίδια μεγάλη ή μικρή διαγώνιο τότε δίνουν τη δυνατότητα πλήρωσης δύο μοναδιαίων τετραγώνων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2(α)



Σχήμα 2(β)



Σχήμα 2(γ)

Έτσι για την περίπτωση με $\nu=\mu$, αν τοποθετήσουμε στη κύρια διαγώνιο του τετραγώνου ν μαύρα πιόνια, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με διαδοχικές κινήσεις μπορούμε να γεμίσουμε το τετράγωνο με μαύρα πιόνια.

Αν υποθέσουμε ότι $\nu < \mu$, τότε στο $\nu \times \nu$ τετράγωνο τοποθετούνε ξανά στη διαγώνιο τα ν μαύρα πιόνια, οπότε μπορούμε να γεμίσουμε το $\nu \times \nu$ τετράγωνο με μαύρα πιόνια. Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu - \nu$ περιττός, δηλαδή αν οι μ, ν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+1-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι. Με αυτό το τετράγωνο μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια. Κάνουμε το ίδιο και για τα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+3), \ldots, (\nu, \nu+2\kappa-1)$ και σταματάμε όταν: $\nu+2\kappa-1=\mu \Leftrightarrow \mu-\nu=2\kappa-1$. Έτσι έχουμε τοποθετήσει μαύρα πιόνια στα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+2\kappa-1)$, για $\kappa = 1, 2 \ldots, \frac{\mu-\nu+1}{2}$ Τότε είναι εύκολο να γεμίσουμε τα ενδιάμεσα τετράγωνα της $\nu-$οστής γραμμής με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu + \frac{\mu-\nu+1}{2} = \frac{\mu+\nu+1}{2}.$$
- Αν $\mu - \nu$ άρτιος, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+2\kappa-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι, για $\kappa = 1, 2, \ldots, \frac{\mu-\nu}{2}$. Με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu + \frac{\mu-\nu}{2} = \frac{\mu+\nu}{2}.$$

 Για τις δύο περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των μαύρων πιονιών που χρησιμοποιήσαμε στην ενιαία μορφή
$$\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor.$$
 Επομένως ο ελάχιστος δυνατός αριθμός Ν πιονιών που απαιτείται για το γέμισμα του πίνακα με μαύρα πιόνια είναι:
$$\mathrm{N} \leq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αριθμός Ν είναι και αναγκαίος για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor \qquad (2)$$

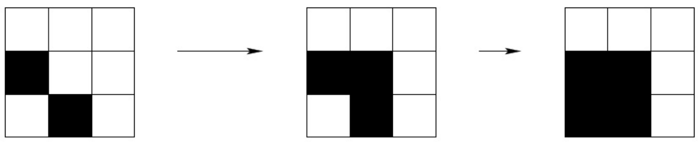
Ονομάζουμε μία πλευρά ενός μοναδιαίου τετραγώνου **ασπρόμαυρη**, αν είναι πλευρά ενός μόνο μοναδιαίου τετραγώνου που έχει μαύρο πιόνι. Για παράδειγμα ασπρόμαυρες είναι όλες οι πλευρές μοναδιαίων τετραγώνων που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του δεδομένου ορθογωνίου. Υποθέτουμε ότι μία αρχική τοποθέτηση μαύρων πιονιών στα μοναδιαία τετράγωνα περιέχει Ν μαύρα πιόνια. Τότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ασπρόμαυρων πλευρών είναι 4Ν.

Σε κάθε κίνηση που εκτελούμε, αν το μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με $\kappa \geq 2$ μοναδιαία τετράγωνα που έχουν μαύρα πιόνια, τότε στο τετράγωνο αυτό τοποθετείται μαύρο πιόνι και δημιουργούνται $4-\kappa$ ασπρόμαυρες πλευρές. Επειδή $4-\kappa \leq \kappa$, ο αριθμός των ασπρόμαυρων τετραγώνων δεν αυξάνει. Όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τα ασπρόμαυρες πλευρές του ορθογωνίου που υπάρχουν στις πλευρές του ορθογωνίου, ακόμα και όταν όλα τα μοναδιαία τετράγωνα αποκτήσουν μαύρο πιόνι, και συνολικά είναι $2(\nu+\mu)$, δηλαδή πρέπει: $4\mathrm{N} \geq 2(\nu+\mu) \Rightarrow \mathrm{N} \geq \dfrac{\mu+\nu}{2}$. Επειδή ο Ν είναι ακέραιος, πρέπει $\mathrm{N} \geq \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

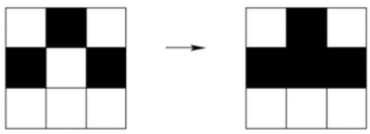
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{N} = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

2ος τρόπος:

Θα ονομάζουμε το σύνολο όλων των μαύρων τετραγώνων «μαύρη περιοχή». Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ένα λευκό τετράγωνο έχει τουλάχιστον δύο μαύρα γειτονικά τετράγωνα, τότε μετά την επιτρεπόμενη κίνηση η περίμετρος της μαύρης περιοχής δεν μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Στο παραπάνω σχήμα αυτό η περίμετρος της μαύρης περιοχής παραμένει ίσο με 8 μετά τις δύο κινήσεις.



Στο παραπάνω σχήμα η περίμετρος στην αρχή είναι 12 και στη συνέχεια γίνεται 10, δηλαδή μειώνεται κατά 2.

Αν λοιπόν έχουμε στην αρχή N μαύρα τετράγωνα, τότε η αρχική περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι το πολύ $4\mathrm{N}$. (Είναι ακριβώς $4\mathrm{N}$ όταν δεν υπάρχουν γειτονικά μαύρα τετράγωνα). Αν λοιπόν στο τέλος το ορθογώνιο έχει μόνο μαύρα τετράγωνα, η περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, δηλαδή $2\mu+2\nu$.

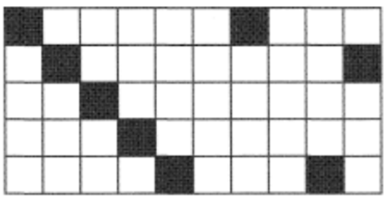
Οπότε από τη βασική παρατήρηση στην αρχική θα έχουμε:

$$4\mathrm{N} \geq \textit{αρχική περίμετρος} \geq \textit{τελική περίμετρος} = 2\mu+2\nu$$

Έπεται ότι, $\mathrm{N} \geq \frac{\mu+\nu}{2}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε $\mathrm{N} \geq \left\lceil \frac{\mu+\nu}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$. Θα αποδείξουμε ότι πάντα γίνεται με $\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε αυτή θα είναι και η ελάχιστη τιμή.

Για το παράδειγμα, τοποθετούμε ν μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του $\nu\times\nu$ τετραγώνου πάνω αριστερά. Στο ορθογώνιο που μένει αφήνουμε την πρώτη στήλη άδεια, στη δεύτερη βάζουμε κάπου ένα μαύρο τετράγωνο, αφήνουμε την επόμενη στήλη άδεια κοκ, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη όπου βάζουμε οπωσδήποτε ένα μαύρο τετράγωνο. Τοποθετούμε με αυτόν τον τρόπο άλλα $\left\lfloor \frac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά $\nu + \left\lfloor \frac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$, που είναι το ζητούμενο πλήθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα σε ένα ορθογώνιο 5×10, όπου τοποθετήσαμε 5 μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του 5×5 τετραγώνου, αφήσαμε μία στήλη κενή, στην επόμενη βάλαμε ένα μαύρο και στην συνέχεια τοποθετήσαμε και στην τελευταία.



Μένει να δικαιολογήσουμε ότι με την παραπάνω τοποθέτηση που προτείναμε, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, όλο το ορθογώνιο θα έχει μαύρα τετράγωνα. Πράγματι, στην αρχή η κύρια διαγώνιος του $\nu\times\nu$, βήμα-βήμα κάνει μαύρα όλα τα τετράγωνα του $\nu\times\nu$ τετραγώνου και στη συνέχεια με τη βοήθεια των μαύρων που έχουμε τοποθετήσει σε στήλη παρά στήλη, κάνουν όλες τις υπόλοιπες στήλες μαύρες.