ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ – ΜΚΔ & ΕΚΠ

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το ένα και ο οποίος έχει μόνο δύο διαιρέτες (το ένα και τον εαυτό του) θα λέγεται πρώτος. Ένας αριθμός που έχει περισσότερους από δυο διαιρέτες θα λέγεται σύνθετος.

Κριτήρια διαιρετότητας

Πολλές φορές χρειάζεται να διακρίνουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο. Για να κάνουμε αυτή τη διάκριση έχουμε κανόνες, στους οποίους υπακούουν όλοι οι φυσικοί αριθμοί. Είναι τα κριτήρια διαιρετότητας:

- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 2, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 3, αν το άθροισμα όλων των ψηφίων του είναι το 3, το 6 ή το 9.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 4, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 5, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 6, αν είναι άρτιος και το άθροισμα όλων των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 9, αν το άθροισμα όλων των ψηφίων του είναι το 9.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 10, αν τελειώνει σε ένα μηδενικό.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 25, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 25 (τελειώνει δηλαδή ο αριθμός σε 00, 25, 50 ή 75).
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 100, αν τελειώνει σε δύο μηδενικά.
- ✓ **Ένας αριθμός θα διαιρείται με το** 1000, αν τελειώνει σε τρία μηδενικά.

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

«Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο ή και περισσοτέρων, όχι απαραίτητα διαφορετικών, πρώτων αριθμών κατά ένα και μοναδικό τρόπο (γινόμενο πρώτων παραγόντων)».

Η προηγούμενη πρόταση καλείται «Θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής» και είναι ένα από τα πιο σημαντικότερα θεωρήματα στα μαθηματικά.

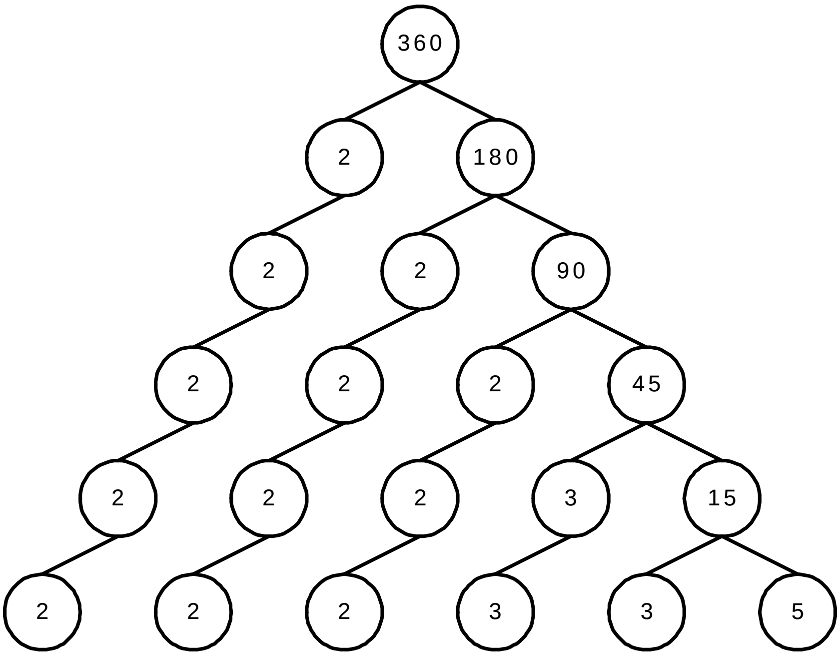
Ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- ➢ Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δενδρογράμματα.

Εφαρμογή 1^{η} - **Ανάλυση σε γινόμενο με χρήση δενδρογράμματος**.

Εκφράστε τον αριθμό 360 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση



Ελέγχουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 360. Βρίσκουμε ότι είναι το 2 και έτσι από κάτω του θα έχουμε το γινόμενο 2x180.

Στην επόμενη γραμμή αφού γράψουμε τον πρώτο παράγοντα 2, συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 180. Διαιρείται με το 2 και έτσι από κάτω του θα έχουμε το γινόμενο 2x90. Στην επόμενη γραμμή αφού γράψουμε τους πρώτους παράγοντες 2, 2 θα αναλύσουμε το 90. Διαιρείται με το 2 και έχουμε το γινόμενο 2x45. Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες 2, 2, 2 όπως είναι και αναλύουμε το 45. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι θα έχουμε το γινόμενο 3x15.

Γράφουμε τους πρώτους παράγοντες 2, 2, 2, 3 όπως είναι και αναλύουμε το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και θα έχουμε το γινόμενο 3x5.

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί πλέον όλοι οι παράγοντες, στην τελευταία γραμμή, είναι πρώτοι αριθμοί. Οπότε το 360 γράφεται ως το γινόμενο $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5$

- Ένας άλλος τρόπος ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι με διαδοχικές διαιρέσεις. Η σειρά των διαδοχικών διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί όπως ήδη αναφέραμε κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά μοναδικό τρόπο.

Εφαρμογή $2^{η}$ - **Ανάλυση σε γινόμενο με διαδοχικές διαιρέσεις**.

Εκφράστε τον αριθμό 360 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων .

Λύση

Ελέγχουμε, με βάση τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 360. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 180.

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 180. Διαιρούμε με το 2 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 90.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Διαιρούμε το 90 πάλι με το 2 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 45.
Διαιρούμε το 45 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.
Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.
Διαιρούμε το 5 με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.
Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1. Οπότε το 360 γράφεται πάλι ως το γινόμενο $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5$

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ (ΜΚΔ)

Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς θα ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** τους.
Έστω οι φυσικοί αριθμοί α και β, ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους θα συμβολίζεται ως ΜΚΔ(α, β).
Δύο αριθμοί α, β θα λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι ΜΚΔ(α, β) = 1.

Εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη.

- Για να βρούμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δυο ή περισσοτέρων αριθμών μπορούμε να εργαστούμε αναλύοντας τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Εφαρμογή $3^{η}$ - **Εύρεση ΜΚΔ με ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 24, 36, 96.

Λ ύ σ η

Αναλύουμε ξεχωριστά τους αριθμούς, με χρήση διαδοχικών διαιρέσεων, σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24=2\cdot2\cdot2\cdot3=2^3\cdot3$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36=2\cdot2\cdot3\cdot3=2^2\cdot3^2$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$96=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=2^5\cdot3$

Από τις αναλύσεις των αριθμών, για τον ΜΚΔ θα πάρουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη.

Οπότε θα είναι ΜΚΔ(24,36,96) = $2^2 \cdot 3$ = 12.

- Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που βασίζεται σε διαιρέσεις των αριθμών.

Εφαρμογή 4η - Εύρεση ΜΚΔ με διαιρέσεις των αριθμών

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 24, 36, 96.

Λ ύ σ η

24	36	96
24	12	0
0	12	0

ΜΚΔ(24,36,96)=12

Γράφουμε τους αριθμούς σε οριζόντια διάταξη, κατεβάζουμε τον μικρότερο από αυτούς (τον 24) και διαιρούμε τους άλλους δυο με αυτόν.
Κάτω από κάθε αριθμό γράφουμε το αντίστοιχο υπόλοιπο από τη διαίρεση του (δηλαδή 12 κάτω από το 36 και 0 κάτω από το 96). Κατεβάζουμε πάλι τον μικρότερο από τους αριθμούς στη δεύτερη τώρα σειρά (το 12) και διαιρούμε τους άλλους με αυτόν. Όταν μείνει μόνο ένας αριθμός και οι υπόλοιποι είναι μηδέν, τότε αυτός είναι ο ΜΚΔ. Έτσι, όπως βλέπουμε, θα είναι πάλι ΜΚΔ(24,36,96) =12.

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (ΕΚΠ)

Πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν άλλο φυσικό αριθμό. Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια. Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών. Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια, εκτός από το 0, θα λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** τους.
Έστω οι φυσικοί αριθμοί α και β, το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο τους θα συμβολίζεται ως ΕΚΠ(α, β).

Εύρεση του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου

- Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών εξετάζουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς. Αν αυτός δεν είναι το Ε.Κ.Π. τους, τον διπλασιάζουμε, τριπλασιάζουμε κ.λπ., ώσπου να βρούμε το πολλαπλάσιό του που είναι πολλαπλάσιο και των άλλων αριθμών.

Εφαρμογή 5η - Εύρεση ΕΚΠ με έλεγχο του μεγαλύτερου αριθμού

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 24, 36, 96.

Λ ύ σ η

Ελέγχουμε αν το 96 είναι πολλαπλάσιο των άλλων δυο αριθμών. Δεν συμβαίνει αυτό για τον 36. Διπλασιάζουμε το 96 και ελέγχουμε αν το 192 είναι πολλαπλάσιο των άλλων δυο αριθμών. Δεν συμβαίνει αυτό για τον 36. Τριπλασιάζουμε το 92 και ελέγχουμε αν το 288 είναι πολλαπλάσιο των άλλων δυο αριθμών, κάτι το οποίο συμβαίνει. Άρα θα είναι ΕΚΠ(24,36,96)=288.

- Ένας άλλος τρόπος είναι να τους αναλύσουμε ταυτόχρονα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Για τον τελευταίο τρόπο θα παρουσιάσουμε δυο ισοδύναμες παραλλαγές του.

Εφαρμογή $6^{η}$ - **Εύρεση ΕΚΠ με ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων** (Ι)

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 24, 36, 96.

Λ ύ σ η

Αναλύουμε τους αριθμούς, με χρήση διαδοχικών διαιρέσεων, σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24=2\cdot2\cdot2\cdot3=2^3\cdot3$ $\quad$ $36=2\cdot2\cdot3\cdot3=2^2\cdot3^2$ $\quad$ $96=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=2^5\cdot3$

Από τις αναλύσεις των αριθμών, **για το ΕΚΠ θα πάρουμε και τους κοινούς και τους μη κοινούς παράγοντες στον μεγαλύτερο εκθέτη**.

Οπότε θα είναι ΕΚΠ(24,36,96) = $2^5\cdot3^2$ (δηλαδή το 288).

Εφαρμογή $7^{η}$ - **Εύρεση ΕΚΠ με ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων** (ΙΙ)

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 24, 36, 96.

Λ ύ σ η

Εξετάζουμε, με βάση τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τουλάχιστον τον έναν από τους τρεις αριθμούς. Είναι ο αριθμός 2, ο οποίος διαιρεί και τους τρεις. Διαιρούμε τους αριθμούς και γράφουμε τα πηλίκα τους από κάτω. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, αναζητώντας πάντα τον μικρότερο πρώτο αριθμό που να διαιρεί τουλάχιστον τον έναν από αυτούς.

Όσους δεν διαιρούνται τους ξαναγράφουμε από κάτω, μέχρι να γίνουν όλα τα πηλίκα ίσα με το 1.

Το ΕΚΠ των αριθμών 24, 36 και 96 θα είναι το γινόμενο των παραγόντων τους δηλαδή το 288.

24	36	96	2
12	18	48	2
6	9	24	2
3	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
	1		

ΕΚΠ(24,36,96) = $2^5\cdot3^2$

Παρατήρηση

- Έστω δυο αριθμοί α και β οι οποίοι είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι δηλαδή ΜΚΔ(α,β)=1. Οι αριθμοί αυτοί θα έχουν ΕΚΠ ίσο με το γινόμενο τους, θα είναι δηλαδή (ΕΚΠ(α,β)=α·β.

- Αν έχουμε περισσότερους από δυο αριθμούς οι οποίοι έχουν ΜΚΔ=1, τότε για να είναι το ΕΚΠ τους ίσο με το γινόμενο τους, θα πρέπει οι αριθμοί να είναι ανά δυο πρώτοι μεταξύ τους.
  Π.χ. ΜΚΔ(5,8,12)=1 και ΕΚΠ(5,8,12)=120, ενώ είναι 5·8·12=480 και αυτό γιατί ΜΚΔ(8,12)≠1.
  Αντίθετα ΜΚΔ(3,4,5)=1 και ΕΚΠ(3,4,5)=60=3·4·5 και αυτό γιατί είναι ΜΚΔ(3,4)=ΜΚΔ(3,5)=ΜΚΔ(4,5)=1 δηλαδή οι αριθμοί ανά δυο είναι πρώτοι μεταξύ τους.