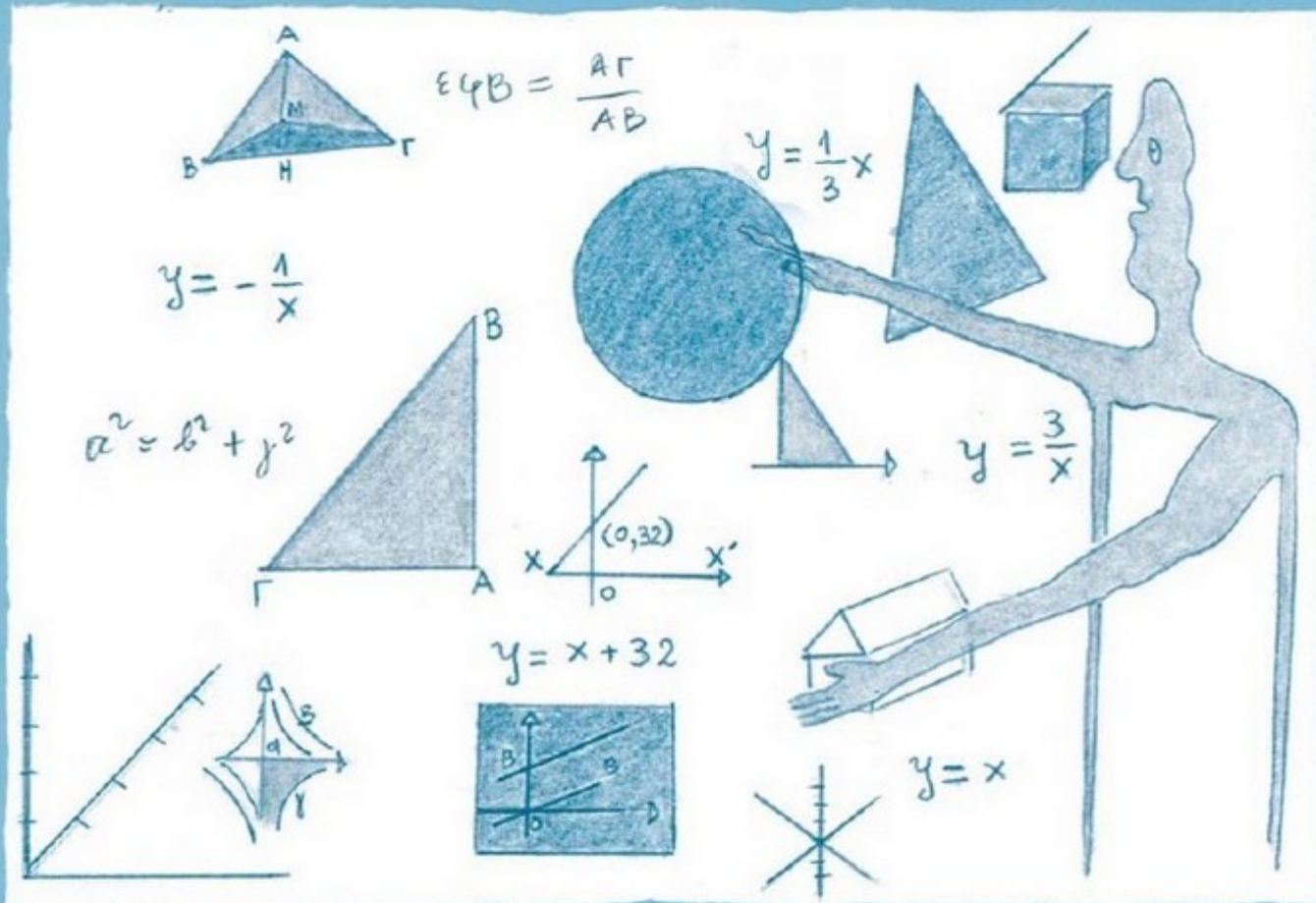


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Παναγιώτης Βλάμος • Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης • Κωνσταντίνος Ρεκούμης

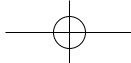
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Β' Γυμνασίου

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

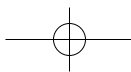
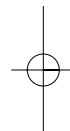
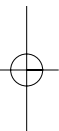
ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

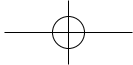



Μαθηματικά

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ





ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	Παναγιώτης Βλάχος , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Παναγιώτης Δρούτσας , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Γεώργιος Πρέσβης , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Κωνσταντίνος Ρεκούμης , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i>
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	Βασίλειος Γιαλαμάς , <i>Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.</i> Χαράλαμπος Τουμάσης , <i>Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών</i> Πολυξένη Ράδου , <i>Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης</i>
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	Θεοδόσης Βρανάς , <i>Σκιτσογράφος - Εικονογράφος</i>
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	Ευγενία Βελάγκου , <i>Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης</i> Γεώργιος Πολύζος , <i>Πάρεδρος ε.θ. του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου</i>
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	Γεώργιος Μήλιος , <i>Ζωγράφος - Χαράκτης</i>
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	

Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1. / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
*Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

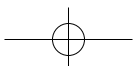
Πράξη με τίτλο:

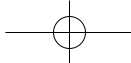
«Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παλής
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.





ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

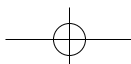
Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

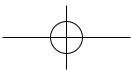
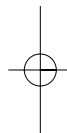
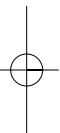
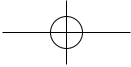
Μαθηματικά

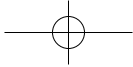
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ







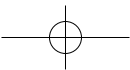
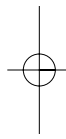
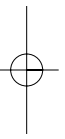
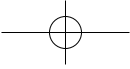
Πρόλογος

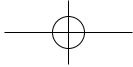
Στο βιβλίο εκπαιδευτικού των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου, προσπαθήσαμε να επιτύχουμε τους εξής στόχους:

- να δοθεί ένας ενδεικτικός προγραμματισμός ανά κεφάλαιο και ανά παράγραφο, ως βάση για τη διδασκαλία του βιβλίου. Είναι στην ευχέρεια του καθηγητή η προσαρμογή αυτού του προγραμματισμού στις ανάγκες των μαθητών του.
- να ενισχυθεί η εκπαιδευτική διαδικασία μέσα από σχόλια και διδακτικές προσεγγίσεις που δίνονται ανά παράγραφο.
- να υπάρχει επιπλέον εκπαιδευτικό υλικό στη διάθεση του καθηγητή, για να συμπληρώσει όπως επιθυμεί το μάθημα. Το υλικό αυτό αποτελείται από επαναληπτικές ασκήσεις ανά κεφάλαιο, ενδεικτικά κριτήρια αξιολόγησης, παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλα εργασίας και δραστηριότητες.

Πρέπει, βέβαια, να τονίσουμε ότι όλα τα παραπάνω αποτελούν μόνο ενδεικτικές προτάσεις. Θεωρούμε αυτονόητο ότι η δημιουργικότητα, η φαντασία και η εμπειρία κάθε εκπαιδευτικού, αποτελούν τον καλύτερο οδηγό για δημιουργική και αποτελεσματική διδασκαλία.

Οι συγγραφείς





Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 – Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις	10
1.2 – Εξισώσεις α' βαθμού	12
1.3 – Επίλυση τύπων	13
1.4 – Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	14
1.5 – Ανισώσεις α' βαθμού	16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

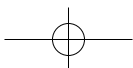
2.1 – Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	22
2.2 – Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί	22
2.3 – Προβλήματα	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 – Η έννοια της συνάρτησης	31
3.2 – Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης	31
3.3 – Η συνάρτηση $y = ax$	32
3.4 – Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	34
3.5 – Η συνάρτηση $y = a/x$ - Η υπερβολή	35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

4.1 – Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα	46
4.2 – Γραφικές Παραστάσεις	46
4.3 – Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	47
4.4 – Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	48
4.5 – Μέση τιμή - Διάμεσος	48



Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.1 – Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	59
1.2 – Μονάδες μέτρησης επιφανειών	60
1.3 – Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	60
1.4 – Πυθαγόρειο θεώρημα	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 – Εφαπτομένη οξείας γωνίας	71
2.2 – Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	71
2.3 – Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	72
2.4 – Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	73
2.5 – Η έννοια του διανύσματος	73
2.6 – Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	74
2.7 – Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

3.1 – Εγγεγραμμένες γωνίες	83
3.2 – Κανονικά πολύγωνα	84
3.3 – Μήκος κύκλου	84
3.4 – Μήκος τόξου	85
3.5 – Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	85
3.6 – Εμβαδόν κυκλικού τομέα	86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ - ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

4.1 – Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	95
4.2 – Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	96
4.3 – Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	96
4.4 – Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	97
4.5 – Ο κώνος και τα στοιχεία του	97
4.6 – Η σφαίρα και τα στοιχεία της	98
4.7 – Γεωγραφικές συντεταγμένες	99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Εξισώσεις – Ανισώσεις

Ενδεικτικός προγραμματισμός 1ου Κεφαλαίου

	Επανάληψη των πράξεων από την Α' Γυμνασίου	2 ώρες
1.1	Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	1 ώρα
1.2	Εξισώσεις α' βαθμού	3 ώρες
1.3	Επίλυση τύπων	1 ώρα
1.4	Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	4 ώρες
1.5	Ανισώσεις α' βαθμού	4 ώρες
	ΣΥΝΟΛΟ	15 ώρες

Επανάληψη των πράξεων από Α' Γυμνασίου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Προτείνονται δύο ώρες για την επανάληψη βασικών γνώσεων από την Α' Γυμνασίου.

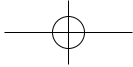
2. Διδακτικοί Στόχοι

- Οι μαθητές επιδιώκεται να θυμηθούν τις βασικές γνώσεις του λογισμού ρητών αριθμών οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της ύλης της Β' Γυμνασίου.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Οι βασικές επαναλήψεις αφορούν:

- Τα βασικά σύνολα αριθμών (Φυσικοί, Ακέραιοι, Ρητοί).
- Τη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδική μορφή και αντίστροφα.
- Την παράσταση των ρητών (θετικών και αρνητικών ακεραίων, δεκαδικών και κλασματικών) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Τη διαδικασία μετατροπής σε ομώνυμα κλάσματα και τη χρησιμότητά της στη σύγκριση κλασμάτων, στην πρόσθεση και την αφαίρεση.
- Τον κανόνα των προσήμων για τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό.
- Την επιμεριστική ιδιότητα.
- Την ιδιότητα «χιαστί» («απλή μέθοδος των τριών»).
- Τη μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό.
- Τη σειρά εκτέλεσης των πράξεων.
- Τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο (θετικό και αρνητικό) και τις ιδιότητές τους.



1.1. Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής και να εξοικειωθούν με τις πράξεις με αλγεβρικές παραστάσεις.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

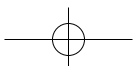
- να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής,
- να απαλείφουν παρενθέσεις και να κάνουν αναγωγές ομοίων όρων με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Τα Μαθηματικά που διδάσκονται σήμερα στα σχολεία είναι συνέπεια της κίνησης των μοντέρνων μαθηματικών της δεκαετίας του 1960. Ενθαρρύνουν τη διδασκαλία της έννοιας της μεταβλητής στην πιο γενική της μορφή και μάλιστα από την αρχή. Οι μεταβλητές θεωρούνται ως μια από τις ενοποιητικές ιδέες των σχολικών Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Άλγεβρας (όπως εξάλλου και η έννοια του συνόλου) και χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό τους όλα τα γράμματα του αλφαβήτου και όχι μόνο το x ή το y , όπως γινόταν στα παραδοσιακά σχολικά Μαθηματικά. Έτσι, ένα απλό γράμμα της αλφαβήτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσει τις διαφορετικές έννοιες της μεταβλητής.
- Οι μαθητές γνωρίζουν από την Α' Γυμνασίου την επιμεριστική ιδιότητα. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναδειχτεί η σημασία της στην απλοποίηση παραστάσεων και οι μαθητές να προετοιμαστούν για την επίλυση εξισώσεων που ακολουθούν στην επόμενη θεματική ενότητα.
- Να τονιστεί ότι προκειμένου να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών που περιέχει, είναι προτιμότερο να απλοποιηθεί πρώτα η παράσταση και στη συνέχεια να γίνει η αντικατάσταση των τιμών των μεταβλητών.
- Ο καθηγητής μπορεί να εξηγήσει με δικά του παραδείγματα ποιοι όροι ενός αθροίσματος λέγονται όμοιοι και να διευκρινήσει την έννοια του συντελεστή των όρων, γιατί είναι απαραίτητη για το τελικό βήμα της επίλυσης μιας εξίσωσης, όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.
- Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα παρακίνησης και παρότρυνσης των μαθητών για να ασχοληθούν με τις αλγεβρικές πράξεις είναι το παρακάτω.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Σκέψου έναν οποιονδήποτε μονοψήφιο αριθμό.
- Πολλαπλασίασέ τον επί 3.
- Πρόσθεσε 5 στο αποτέλεσμα.
- Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα επί 6.
- Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα 12.
- Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα επί 10.
- Αφαίρεσε 420 από το γινόμενο.
- Διαίρεσε τη διαφορά δια 180.



Το αποτέλεσμα είναι ο αρχικός αριθμός, γιατί, αν ονομάσουμε x τον αριθμό αυτό, τότε:

$$\frac{[(3x + 5) \cdot 6 + 12] \cdot 10 - 420}{180} = \frac{180x + 300 + 120 - 420}{180} = \frac{180x}{180} = x.$$

Το παράδειγμα αυτό ανήκει στους λεγόμενους «μαγικούς» αλγόριθμους και έχει ως στόχο:

- Να μιήσει το μαθητή στο να μεταφράζει εκφράσεις από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική.
- Να ενισχύσει τις αλγεβρικές του δεξιότητες.
- Να εθίσει το μαθητή στο χειρισμό κάποιων αλγεβρικών εκφράσεων.
- Να βοηθήσει το μαθητή να κατανοήσει τη σημασία και την αξία μιας αλγεβρικής έκφρασης.

➤ Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο σχετικά με την ενότητα αυτή είναι οι παρακάτω:

• **Για το Διόφαντο:**

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Diophantus.html>
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Diophantus.html>
<http://mathworld.wolfram.com/DiophantussRiddle.html>
<http://mathworld.wolfram.com/DiophantussRiddle.html>
<http://www.andrews.edu/~calkins/math/biograph/199899/biodioph.htm>
<http://mtcs.truman.edu/~thammond/history/Diophantus.html>

• **Για τη βιβλιοθήκη των Αλεξάνδρειας:**

http://el.wikipedia.org/wiki/Βιβλιοθήκη_της_Αλεξάνδρειας
<http://www.perseus.tufts.edu/GreekScience/Students/Ellen/Museum.html>
<http://www.bibalex.org/English/index.aspx>

• **Για τους αλεξανδρινούς μαθηματικούς:**

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Indexes/HistoryTopics.html>
<http://www.pi-schools.gr/hdtc/programs/trends/ergasies/collabor4.htm>
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/alexandria.html>
<http://math.about.com/od/mathematicians/>
<http://www.math93.com/alexandrie.htm>

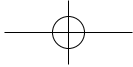
➤ **Για διασκέδαση**

Βρείτε τις κρυμμένες λέξεις!

				M	N	Y	X	Θ	Δ	Σ	Ι	Θ								
				Θ	Ε	Α	Ρ	Ε	Σ	Ι	Ο	Ζ	Τ							
				Ε	Δ	Ι	Β	Ν	Μ	Ε	Ρ	Σ	Λ	Ν	Λ	Φ				
A				Ρ	Κ	Ξ	Π	Ι	Σ	Α	Λ	Γ	Ε	Β	Ρ	Α	Ο			
				Ι	Σ	Ψ	Ω	Ω	Υ	Ψ	Γ	Η	Π	Γ	Ρ	Μ				
				Χ	Π	Σ	Μ	Θ	Ω	Γ	Ν	Λ	Λ	Ο						
				Ι	Υ	Ε	Λ	Δ	Α	Ε	Ω	Ι								
				Ν	Ν	Φ	Τ	Γ	Μ	Ν	Β	Ο	Σ	Α						
				Α	Π	Α	Ρ	Α	Σ	Τ	Α	Σ	Η	Ο	Τ	Τ				
				Γ	Θ	Φ	Κ	Ν	Β	Κ	Ο	Τ	Α	Λ	Τ	Α	Ο	Μ		
Ο				Α	Ε	Υ	Α	Τ	Λ	Λ	Α	Ρ	Ο	Δ	Η	Ε	Υ	Ο	Τ	Ε
				Κ	Ξ	Ω	Η	Υ	Σ	Τ	Β	Δ	Ε	Ω	Ψ	Α	Π	Τ	Η	Δ
Λ				Γ	Ε	Δ	Δ	Χ	Η	Ψ	Τ	Α	Ε	Ο	Γ	Φ	Π	Ε	Δ	
Η				Η	Ο	Ι	Α	Λ	Γ	Ε	Β	Ρ	Ι	Κ	Η	Φ	Ξ	Ω		

Απάντηση:

				M	N	Y	X	Θ	Δ	Σ	Ι	Θ								
				Θ	Ε	Α	Ρ	Ε	Σ	Ι	Ο	Ζ	Τ							
				Ε	Δ	Ι	Β	Ν	Μ	Ε	Ρ	Σ	Λ	Ν	Λ	Φ				
A				Ρ	Κ	Ξ	Π	Ι	Σ	<u>Α</u>	<u>Λ</u>	<u>Γ</u>	<u>Ε</u>	<u>Β</u>	<u>Ρ</u>	<u>Α</u>	<u>Ο</u>			
				Ι	Σ	Ψ	Ω	Ω	Υ	Ψ	Γ	Η	Π	Γ	Ρ	Μ				
				Χ	<u>Π</u>	<u>Σ</u>	<u>Μ</u>	<u>Θ</u>	<u>Ω</u>	<u>Γ</u>	<u>Ν</u>	<u>Λ</u>	<u>Λ</u>	<u>Ο</u>						
				Ι	Υ	Ε	Λ	Δ	Α	Ε	Ω	<u>Ι</u>								
				Ν	Ν	Φ	Τ	Γ	Μ	Ν	Β	Ο	Σ	<u>Α</u>						
				<u>Α</u>	<u>Π</u>	<u>Α</u>	<u>Ρ</u>	<u>Α</u>	<u>Σ</u>	<u>Τ</u>	<u>Α</u>	<u>Σ</u>	<u>Η</u>	<u>Ο</u>	<u>Τ</u>	<u>Τ</u>				
				Γ	Θ	Φ	Κ	Ν	Β	Κ	Ο	Τ	Α	Λ	Τ	Α	Ο	Μ		
Ο				Α	Ε	Υ	Α	Τ	Λ	Λ	Α	Ρ	Ο	Δ	Η	Ε	Υ	Ο	Τ	Ε
				Κ	Ξ	Ω	Η	Υ	Σ	Τ	Β	Δ	Ε	Ω	Ψ	<u>Α</u>	Π	Τ	Η	Δ
Λ				Γ	Ε	Δ	Δ	Χ	Η	Ψ	Τ	Α	Ε	Ο	Γ	Φ	Π	Ε	Δ	
Η				Η	Ο	Ι	<u>Α</u>	<u>Λ</u>	<u>Γ</u>	<u>Ε</u>	<u>Β</u>	<u>Ρ</u>	<u>Ι</u>	<u>Κ</u>	<u>Η</u>	<u>Φ</u>	<u>Ξ</u>	<u>Ω</u>		



1.2. Εξισώσεις α' βαθμού

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για τη διαδικασία: απαλοιφή παρονομαστών – επιμεριστική ιδιότητα – αναγωγή ομοίων όρων – χωρισμός γνωστών και αγνώστων – διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου.
- Μία ώρα για αδύνατες εξισώσεις και ταυτότητες.
- Μια ώρα για επίλυση διαφόρων μορφών ασκήσεων.

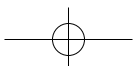
2. Διδακτικοί Στόχοι

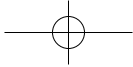
Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης και τη σχετική ορολογία,
- να επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο,
- να διακρίνουν πότε μία εξίσωση είναι αδύνατη ή ταυτότητα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Οι μαθητές έχουν μάθει απλές εξισώσεις στην Α' Γυμνασίου χωρίς όμως πράξεις και αναγωγές ομοίων όρων. Επομένως, χρειάζεται να εισαχθούν στη διαδικασία: απαλοιφή παρονομαστών – επιμεριστική ιδιότητα – αναγωγή ομοίων όρων – χωρισμός γνωστών και αγνώστων – διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου.
 - Πρέπει να διευκρινιστεί η ορολογία που χρησιμοποιούμε: εξίσωση – πρώτο μέλος εξίσωσης – δεύτερο μέλος εξίσωσης – γνωστός όρος – άγνωστος όρος – λύση ή ρίζα εξίσωσης – επίλυση εξίσωσης – λύνουμε την εξίσωση – επαλήθευση κ.τ.λ.
 - Για να απλοποιηθεί το τεχνικό μέρος της επίλυσης εξίσωσης, όταν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών.
 - Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει τη μορφή ισότητας δύο κλασμάτων, η απαλοιφή παρονομαστών γίνεται απλούστερη με το οικείο στους μαθητές σχήμα «χιαστί».
 - Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην έννοια της **αδύνατης** εξίσωσης, όπου με κατάλληλα παραδείγματα πρέπει οι μαθητές να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι κανένας αριθμός δεν είναι λύση μιας τέτοιας εξίσωσης.
 - Επίσης, πρέπει με κατάλληλα παραδείγματα να εισαχθεί η έννοια της εξίσωσης με **άπειρες λύσεις (ταυτότητα)** αποφεύγοντας τον όρο «αόριστη», έτσι ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης.
 - Προτείνεται στο διδάσκοντα να φροντίσει, ώστε η μεθοδολογία επίλυσης εξισώσεων να μην αποβαίνει σε βάρος της ανάπτυξης των διαισθητικών ικανοτήτων των μαθητών του.
- Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο σχετικά με την ενότητα αυτή είναι οι παρακάτω:
- **Για τον τρόπο που γράφονταν οι εξισώσεις:**
<http://www.math93.com/notation.htm>





- **Για τον πάπυρο του Ρήντ και άλλους αιγυπτιακούς πάπυρους:**
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian_papyri.html
<http://math.truman.edu/~thammond/history/AncientEgypt.html>

➤ Για διασκέδαση

Απάντηση:

2	.	3	+	5	=	11	3	.	-3	+	-2	=	-11
.
3	.	5	+	7	.	22	-3	.	1	+	-4	.	-7
+	.	+	.	+	.	+	+	.	+	.	+	.	+
7	.	2	+	4	=	18	-5	.	-3	+	-9	=	6
=	.	=	.	=	.	=	=	.	=	.	=	.	=
13	.	17	+	39	=	260	-14	.	-6	+	-1	=	83

1.3. Επίλυση τύπων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για επίλυση τύπων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

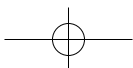
Οι μαθητές επιδιώκεται:

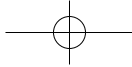
- να επιλύουν έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή αυτή,
- να αναγνωρίζουν στους τύπους ποια μεγέθη είναι δοσμένα και ποια άγνωστα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν με κατάλληλα παραδείγματα και δραστηριότητες από τα Μαθηματικά και άλλα γνωστικά αντικείμενα, τη χρησιμότητα της επίλυσης τύπων ως προς έναν άγνωστο.
- Η επίλυση τύπων είναι δύσκολο και σύνθετο πρόβλημα για τα παιδιά της Β' Γυμνασίου. Επομένως, χρειάζεται προσοχή πόσης και ποιες ασκήσεις θα επιλεγούν για να διδαχθούν.
- Άλλα παραδείγματα τύπων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι: $F = m \cdot a$, $V = I \cdot R$
 $R = R_1 + R_2$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_1}{P_2}$, $\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta)$, $PV = nRT$, $V = \pi r^2 h$.

- Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο για δραστηριότητες που έχουν σχέση με τις κλίμακες μέτρησης θερμοκρασίας Κελσίου - Φαρενάιτ:
<http://www.wbuf.noaa.gov/tempfc.htm>
<http://vathena.arc.nasa.gov/curric/weather/fahrcels.html>
http://www.astro.uu.se/history/Celsius_eng.html
<http://www.encyclopedia4u.com/a/anders-celsius.html>





14

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 1ο - Εξισώσεις - Ανισώσεις

► Για διασκέδαση

Απάντηση:

$$\begin{array}{c} 18 \\ -5+x \quad x+7 \\ -5 \quad x \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι: } (-5+x) + (x+7) &= 18 \text{ ή} \\ 2x+2 &= 18 \text{ ή } x = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ x+7 \quad 2x+9 \\ 5 \quad x+2 \quad x+7 \\ 3 \quad 2 \quad x \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι: } (x+7) + (2x+9) &= 1 \text{ ή} \\ 3x+16 &= 1 \text{ ή } x = -5 \end{aligned}$$

1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 4 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την εισαγωγή της μεθόδου επίλυσης.
- Τρεις ώρες για την επίλυση προβλημάτων.

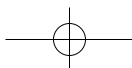
2. Διδακτικοί Στόχοι

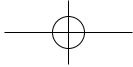
Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος,
- να κάνουν εισαγωγή του αγνώστου,
- να καταστρώνουν την εξίσωση, δηλαδή να «μεταφράζουν» το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα,
- να επιλύουν την εξίσωση και να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα είναι «συμβατό» με το πρόβλημα,
- να καταγράφουν την απάντηση.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η λύση προβλημάτων με εξισώσεις είναι από τα πιο βασικά θέματα του κεφαλαίου αλλά και ολόκληρου του βιβλίου. Θεωρείται μια από τις πιο σπουδαίες πλευρές των Μαθηματικών και γι' αυτό ο διδάσκων θα πρέπει να της δώσει ιδιαίτερη σημασία. Πολύ λίγοι ενήλικες θα χρειαστούν κάποιες φορές τον τύπο των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ή τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Εκείνο που θα χρειαστούν όμως και το οποίο θα έπρεπε να το έχουν αποκτήσει ως συνέπεια της εκπαίδευσής τους, είναι η ικανότητα να σκέπτονται προσεκτικά και να χρησιμοποιούν με έξυπνο και αποτελεσματικό τρόπο τις προγενέστερες γνώσεις τους, όταν έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα της καθημερινής ζωής. Με τη βοήθεια των εξισώσεων οι μαθητές υιοθετούν μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων πιο ουσιαστική από τις μεθόδους της πρακτικής αριθμητικής.
- Η θεματολογία των προβλημάτων πρέπει να προκύπτει από τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών, ώστε να διεγείρεται το ενδιαφέρον τους, πράγμα που αποτελεί ισχυρό κίνητρο για την ενασχόληση με τα Μαθηματικά.





- Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων προσφέρεται ως το πιο κατάλληλο πεδίο για την καλλιέργεια των ικανοτήτων για εξερεύνηση, πειραματισμό, φαντασία και κριτική σκέψη. Επίσης, θεωρείται κατάλληλο πεδίο για να συσχετίσουν οι μαθητές τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα. Ένας από τους πιο σπουδαίους ρόλους του δασκάλου είναι να καθοδηγήσει τους μαθητές του έτσι, ώστε να αναλύουν καταστάσεις με μαθηματικό τρόπο.
- Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών μας στη Β/θμια Εκπαίδευση έχει δυσκολίες με τα «αφηγηματικά» προβλήματα, στα οποία οι μαθητές πρέπει να καταστρώσουν αλγεβρικές εξισώσεις με τον άγνωστο ή τους αγνώστους του προβλήματος. Η δυσκολία αυτή πιθανόν να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, π.χ. ορολογία, ικανότητα μετάφρασης, μαθηματικό υπόβαθρο. Είναι πιθανόν όμως το μεγαλύτερο πρόβλημα να βρίσκεται στη διαδικασία της μετάφρασης από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική γλώσσα. Με άλλα λόγια, οι μαθητές έχουν ανάγκη να βοηθηθούν από το δάσκαλο: **α)** για να αναπτύξουν ένα πλούσιο μαθηματικό λεξιλόγιο και **β)** για να μεταφράζουν τη φυσική τους γλώσσα σε μαθηματική γλώσσα και το αντίστροφο.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

μαθηματική γλώσσα	φυσική γλώσσα
$x + 13 = 24$	Ένας αριθμός αυξημένος κατά 13 ισούται με 24.
$\frac{x + y}{7} = \frac{x - y}{4}$	Το ένα έβδομο του αθροίσματος δύο αριθμών ισούται με το ένα τέταρτο της διαφοράς τους.
$P = \frac{x}{100} Q$	Το P είναι τα x % του Q.

- Ο διδάσκων κατά την κρίση του μπορεί να ενθαρρύνει στην κατάσταση κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος.

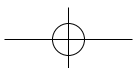
■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

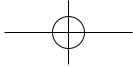
Τρεις φίλες έχουν συνολικά 200 €. Η Τασία έχει διπλάσια χρήματα από την Ελένη και η Ελένη έχει τριπλάσια χρήματα από την Βούλα. Πόσα χρήματα έχει η καθεμιά;

Λύση: Παριστάνουμε με διανύσματα (ή με ευθύγραμμα τμήματα) τα χρήματα των κοριτσιών:

Τασία: $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$
 Ελένη: $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$
 Βούλα: \longrightarrow

Είναι φανερό ότι οδηγούμαστε στην εξίσωση $6x + 3x + x = 200$, οπότε $x = 20$.





1.5. Ανισώσεις α' βαθμού

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 4 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την έννοια της ανίσωσης και τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με έναν αριθμό και των δύο μελών της ανίσωσης.
- Μια ώρα για την επίλυση ανισώσεων και την παράσταση των λύσεων στην ευθεία των αριθμών.
- Μια ώρα για την εύρεση των κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων.
- Μια ώρα για ασκήσεις και προβλήματα εμπέδωσης.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις σε άξονα,
- να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων α' βαθμού,
- να λύνουν απλά προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις α' βαθμού.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

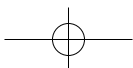
- Η έννοια της ανίσωσης είναι λιγότερο οικεία στους μαθητές σε σχέση με την έννοια της ισότητας. Γι' αυτό προτείνεται η επιμονή του καθηγητή σε παραδείγματα και ερωτήσεις κατανόησης των βασικών ιδιοτήτων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
- Οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τη μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης α' βαθμού. Επομένως για την επίλυση ανίσωσης α' βαθμού χρειάζεται ο διδάσκων να τονίσει μόνο την αλλαγή της φοράς της ανίσωσης, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με αρνητικό αριθμό, και τη γραφική παράσταση των λύσεων.

► Για διασκέδαση

Έχουμε 9 νομίσματα από τα οποία το ένα είναι πλαστό και ζυγίζει λιγότερο από τα υπόλοιπα. Έχουμε, επίσης, μια ζυγαριά. Μπορείτε με δύο μόνο ζυγίσματα να βρείτε το πλαστό νόμισμα;

Απάντηση:

Χωρίζουμε τα 9 νομίσματα σε τρεις τριάδες. Ζυγίζουμε δυο τυχαίες τριάδες και, αν ζυγίζουν το ίδιο τότε το πλαστό νόμισμα βρίσκεται στην τρίτη τριάδα, αλλιώς βρίσκεται στην τριάδα που ζυγίζει λιγότερο. Έτσι προσδιορίζουμε την τριάδα στην οποία βρίσκεται το πλαστό νόμισμα. Στη συνέχεια, ζυγίζουμε δυο τυχαία νομίσματα αυτής της τριάδας και, αν ζυγίζουν το ίδιο, τότε το πλαστό νόμισμα είναι το τρίτο αλλιώς είναι το νόμισμα που ζυγίζει λιγότερο.



Επαναληπτικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

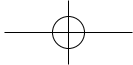
1. Σε ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι κατά 24° μικρότερη των γωνιών της βάσης. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
2. Ένας ορειβάτης για να ανέβει στην κορυφή ενός βουνού και να επιστρέψει, χρειάζεται 14 ώρες. Αν κατά την ανάβαση βαδίζει με ταχύτητα 3 km/h και κατά την κάθοδο με 4 km/h, να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής.
3. Για να καλυφθούν τα έξοδα της εκδρομής ενός τμήματος της Β' Γυμνασίου, κάθε μαθητής έπρεπε να πληρώσει 2,5 €. Επειδή όμως 6 μαθητές δε μπορούσαν να συμμετάσχουν, οι υπόλοιποι πλήρωσαν 3,25 €. Πόσους μαθητές έχει το τμήμα αυτό;
4. Η Σοφία αγόρασε 10 στιλό μπλε και κόκκινα και πλήρωσε συνολικά 22 €. Πόσα στιλό αγόρασε από κάθε χρώμα, αν κάθε μπλε στιλό κοστίζει 2 € και κάθε κόκκινο 2,5 €;
5. Σε μια συγκέντρωση οι άντρες ήταν διπλάσιοι από τις γυναίκες. Όταν έφυγαν 6 άντρες με τις συζύγους τους, έμειναν τριπλάσιοι άντρες από τις γυναίκες. Πόσοι ήταν οι άντρες και πόσες οι γυναίκες στην αρχή της συγκέντρωσης;
6. Ο κύριος Γιάννης θα πωλούσε στη λαϊκή αγορά όσα αυγά είχε με 12 λεπτά το ένα. Επειδή όμως έσπασαν 26 αυγά, πούλησε τα υπόλοιπα με 14 λεπτά το ένα και εισέπραξε το ίδιο ακριβώς ποσό χωρίς να ζημιωθεί. Πόσα αυγά είχε στην αρχή;
7. Πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; (δες την εισαγωγή του κεφαλαίου).
8. Ο Γιώργος είχε σκοπό να αγοράσει 15 τετράδια. Επειδή όμως του έκαναν έκπτωση 10 λεπτά σε κάθε τετράδιο, αγόρασε με τα ίδια χρήματα 18 τετράδια. Πόσο πλήρωσε το κάθε τετράδιο;

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 1

Διάρκεια: 1 ώρα

■ **ΑΣΚΗΣΗ 1:** Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

		A	B	Γ	Δ
α)	Η παράσταση $3x-2x+6x+x$ είναι ίση με:	7x	8x	-8x	10x
β)	Οι ανισώσεις $3x > 6$ και $2x < 6$ έχουν κοινές λύσεις:	$x > 8$	$x > 3$	$2 < x < 3$	$3 < x < 4$
γ)	Η εξίσωση $x = x$:	Έχει λύση μόνο $x = 1$	Είναι ταυτότητα	Είναι αδύνατη	Έχει λύση μόνο τους θετικούς αριθμούς
δ)	Η ανίσωση $3x - 3x < 0$:	Έχει λύση κάθε αριθμό	Είναι αδύνατη	Έχει λύση $x < 0$	Έχει λύση $x > 0$
ε)	Ο τύπος $s = u \cdot t$ λύνεται ως προς t και δίνει:	$t = s \cdot u$	$t = \frac{u}{s}$	$t = \frac{s}{u}$	$t = s - u$
στ)	Ο τύπος $u = 1 + a \cdot t$ λύνεται ως προς a και δίνει:	$a = \frac{u}{t-1}$	$a = u-1-t$	$a = \frac{u-1}{t}$	$a = \frac{1+u}{t}$



18

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 1ο - Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Στο διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση εξίσωσης
$2x = 4$	$x = -2$
$3x = -6$	$x = -1$
$4x + 4 = 0$	$x = 2$
$3x + x = 0$	$x = 0,5$
$4 = 8x$	$x = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} = x + 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $3(x-1) > 2(x-2)$.

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να γράψετε ένα αριθμό που το διπλάσιο του είναι ίσο με τριπλάσιό του.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακεραίους με άθροισμα 12.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 2

Διάρκεια: 1 ώρα

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να χαρακτηρίσετε με το γράμμα Σ (Σωστή) ή με το γράμμα Λ (Λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $a = \beta$, τότε $a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$.

β) Αν $a = \beta$ και $\gamma \neq 0$, τότε $\frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$.

γ) Αν $a = \beta$, τότε $\gamma - a = \gamma - \beta$.

δ) Αν $3x = 0$, τότε $x = -3$.

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3}{5} - \frac{2x-1}{10} = \frac{5-2x}{10}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να βρείτε τις λύσεις της διπλής ανίσωσης: $\frac{x+1}{3} \leq x \leq \frac{2-x}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να βρείτε τις γωνίες \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου, αν γνωρίζουμε ότι η γωνία \hat{B} είναι ίση με το διπλάσιο της \hat{A} και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι κατά 20° μικρότερη της \hat{B} .

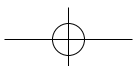
Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

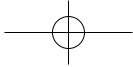
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις.

Στόχοι: Οι μαθητές να μπορούν να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της πραγματικής ζωής.

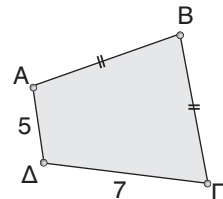
Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).





• Φύλλο εργασίας •

- Ο πατέρας του Νίκου έχει τριπλάσια ηλικία από το Νίκο.
 - Αν ο Νίκος είναι 13 ετών, πόσων ετών είναι ο πατέρας του;
 - Αν ο Νίκος είναι 15 ετών, πόσων ετών είναι ο πατέρας του;
 - Αν ο Νίκος είναι x ετών, πόσων ετών είναι ο πατέρας του;
 - Αν ο Νίκος είναι x ετών, πόσων ετών θα είναι ο Νίκος και πόσο ο πατέρας του σε 5 έτη;
- Ένα CD μουσικής κοστίζει 13,5 €.
 - Πόσο κοστίζουν τα 2 CD;
 - Πόσο κοστίζουν τα 12 CD;
 - Να χρησιμοποιήσετε το γράμμα a για να συμβολίσετε το πλήθος των CD που θέλουμε να αγοράσουμε και με τη βοήθεια αυτού του γράμματος να εκφράσετε το κόστος της αγοράς αυτής
- Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = BG$.
 - Αν $AB = 6$, να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABΓΔ$.
.....
 - Αν $AB = 8$, να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABΓΔ$.
.....
 - Να χρησιμοποιήσετε ένα γράμμα για να συμβολίσετε το μήκος της πλευράς AB και να εκφράσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ με τη βοήθεια του γράμματος αυτού.
.....
.....
.....
- Ένα παντελόνι πωλείται x €, ένα πουκάμισο πωλείται y €, ένα ζευγάρι παπούτσια πωλείται ω € και μία μπλούζα πωλείται ϕ €. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των μεταβλητών αυτών τα χρήματα που θα δώσουμε για να αγοράσουμε:
 - δύο παντελόνια, ένα πουκάμισο, δύο ζευγάρια παπούτσια και τρεις μπλούζες.
 - ένα παντελόνι, δύο πουκάμισα και πέντε μπλούζες.
 - ένα από κάθε είδος.



■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

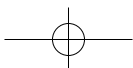
Ενότητα: Προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια εξισώσεων α' βαθμού.

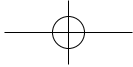
Στόχοι: Να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων. Να αναδειχθεί η υπεροχή ως προς τη λειτουργικότητα της μεθόδου επίλυσης ενός προβλήματος με τη βοήθεια εξίσωσης, από την λύση του με τη βοήθεια των μεθόδων της πρακτικής αριθμητικής.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

Πρόβλημα: Για να αναδασωθούν δύο περιοχές συνολικής έκτασης 10 στρεμμάτων, χρειάστηκαν 240 δεντρίλια. Στην πρώτη περιοχή φυτεύτηκαν 30 δεντρίλια ανά στρέμμα και στη δεύτερη 20 δεντρίλια ανά στρέμμα. Να υπολογίσετε την έκταση κάθε περιοχής.



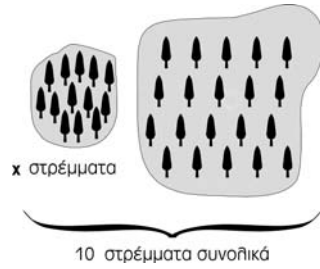


20

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 1ο - Εξισώσεις - Ανισώσεις

► **Λύση με εξίσωση:**

- Έστω x στρέμματα η έκταση της πρώτης περιοχής.
- Αφού είναι συνολικά 10 στρέμματα, η έκταση της δεύτερης περιοχής ως συνάρτηση του x είναι
- Αφού στην πρώτη περιοχή φυτεύτηκαν 30 δεντρίλια ανά στρέμμα, ο αριθμός των δεντρίλιων που φυτεύτηκαν στην πρώτη περιοχή ως συνάρτηση του x είναι.....
- Αφού στην δεύτερη περιοχή φυτεύτηκαν 20 δεντρίλια ανά στρέμμα, ο αριθμός των δεντρίλιων που φυτεύτηκαν στη δεύτερη περιοχή ως συνάρτηση του x είναι
- Επομένως, ο συνολικός αριθμός δεντρίλιων που φυτεύτηκαν και στις δύο περιοχές ως συνάρτηση του x είναι
- Επειδή χρειάστηκαν 240 δεντρίλια, προκύπτει η εξίσωση
- Η λύση της εξίσωσης είναι
- Επομένως, η πρώτη περιοχή έχει έκταση
- και η δεύτερη περιοχή έχει έκταση



► **Λύση με πρακτική αριθμητική:**

Αν υποθέσουμε ότι θα φυτέψουμε 20 δεντρίλια σε καθένα από τα 10 στρέμματα, τότε ο συνολικός αριθμός των δεντρίλιων που χρειάζονται για την αναδάσωση είναι, ενώ σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης χρειάστηκαν στην πραγματικότητα δεντρίλια.

Η διαφορά είναι: (Αριθμός δεντρίλιων που πραγματικά χρειάστηκαν) – (Αριθμός δεντρίλιων που θα χρειαζοίτο, αν φυτέψουμε 20 δεντρίλια ανά στρέμμα) =
Ο αριθμός των επιπλέον αυτών δεντρίλιων οφείλεται στο ότι στην πρώτη περιοχή φυτέψαμε σε κάθε στρέμμα δεντρίλια, δηλαδή περισσότερα απ' όσα φυτέψαμε σε κάθε στρέμμα της δεύτερης περιοχής. Επομένως, η πρώτη περιοχή έχει έκταση $40:10 = \dots\dots\dots$ στρέμματα και η δεύτερη στρέμματα.

Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

1.2

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Για να είναι το τρίγωνο ισοσκελές με βάση τη ΒΓ θα πρέπει οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ να είναι ίσες.

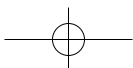
$$\text{Δηλαδή } 2x + 3 = x + 5 \quad \text{ή} \quad 2x - x = 5 - 3 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

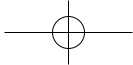
Για $x = 2$ το μήκος της ΑΒ είναι $2x + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, της ΑΓ είναι $x + 5 = 2 + 5 = 7$ και της ΒΓ είναι $2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

β) Για να είναι το τρίγωνο ισοσκελές με βάση την ΑΒ θα πρέπει οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ να είναι ίσες.

$$\text{Δηλαδή } x + 5 = 2x + 1 \quad \text{ή} \quad x - 2x = 1 - 5 \quad \text{ή} \quad -x = -4 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

Για $x = 4$ το μήκος της ΑΒ είναι $2x + 3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$, της ΑΓ είναι $x + 5 = 4 + 5 = 9$ και της ΒΓ είναι $2x + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.





γ) Για να είναι το τρίγωνο ισοσκελές με βάση την ΑΓ θα πρέπει οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ να είναι ίσες.

Δηλαδή $2x + 3 = 2x + 1$ ή $2x - 2x = 1 - 3$ ή $0 = -2$ που είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα:

$$2y + 3 = 15 - 2y \quad \text{ή} \quad 2y + 2y = 15 - 3 \quad \text{ή} \quad 4y = 12 \quad \text{ή} \quad y = 3$$

$$\text{και} \quad 3x - 1 = 11 \quad \text{ή} \quad 3x = 11 + 1 \quad \text{ή} \quad 3x = 12 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

Κάθε γωνία του ορθογωνίου είναι ίση με 90° , άρα:

$$2\omega - 40^\circ = 90^\circ \quad \text{ή} \quad 2\omega = 90^\circ + 40^\circ \quad \text{ή} \quad 2\omega = 130^\circ \quad \text{ή} \quad \omega = 65^\circ.$$

1.3**ΑΣΚΗΣΗ 11**

$$F = k_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \text{ή} \quad F \cdot r^2 = k_c \cdot q_1 \cdot q_2 \quad \text{ή} \quad q_1 = \frac{F \cdot r^2}{k_c \cdot q_2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

α) Λύνουμε τον τύπο για $h = 0$.

$$D = 0,155 \cdot 0 + 11 \quad \text{ή} \quad D = 11 \text{ ημέρες.}$$

β) Λύνουμε τον τύπο για $D = 180$

$$180 = 0,155 \cdot h + 11 \quad \text{ή} \quad -0,155 \cdot h = 11 - 180 \quad \text{ή} \quad -0,155 \cdot h = 11 - 180 \quad \text{ή} \\ -0,155 \cdot h = -169 \quad \text{ή} \quad h = 1090,3(\text{m}).$$

Αν χιονίζει κάθε ημέρα θα είναι $D = 360$ ημέρες και για το υψόμετρο h θα είναι:

$$360 = 0,155 \cdot h + 11 \quad \text{ή} \quad -0,155 \cdot h = 11 - 360 \quad \text{ή} \quad -0,155 \cdot h = -349 \quad \text{ή} \quad h = 2.251,6 (\text{m}).$$

1.4**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Έστω x τα λεωφορεία των 8 ατόμων, τότε οι επιβάτες που μεταφέρουν είναι $8x$. Τα λεωφορεία των 14 ατόμων είναι $12 - x$ και οι επιβάτες που μεταφέρουν είναι $14(12 - x)$.

Αφού μεταφέρονται συνολικά 126 επιβάτες έχουμε:

$$8x + 14(12 - x) = 126 \quad \text{ή} \quad 8x + 168 - 14x = 126 \quad \text{ή} \\ 8x - 14x = 126 - 168 \quad \text{ή} \quad -6x = -42 \quad \text{ή} \quad x = 7$$

Άρα είναι 7 τα λεωφορεία των 8 ατόμων και $12 - 7 = 5$ τα λεωφορεία των 14 ατόμων.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω x το σύνολο των σιλό.

Τα μπλε σιλό είναι $x - 3$.

Τα κόκκινα σιλό είναι $x - 4$.

Τα μαύρα σιλό είναι $x - 5$.

Το άθροισμα των μπλε, κόκκινων και μαύρων σιλό θα είναι ίσο με το σύνολό τους, δηλαδή $x - 3 + x - 4 + x - 5 = x$ ή $x + x + x - x = 3 + 4 + 5$ ή $2x = 12$ ή $x = 6$.

Άρα, έχουμε 6 σιλό.

1.5**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Έστω x τα χρήματα της Μαρίας. Τα χρήματα της Άννας ήταν $3x$ και μετά τη δαπάνη έμειναν $3x - 14$. Αφού η Άννα τώρα έχει λιγότερα χρήματα από τη Μαρία έχουμε:

$$3x - 14 < x \quad \text{ή} \quad 3x - x < 14 \quad \text{ή} \quad 2x < 14 \quad \text{ή} \quad x < 7. \quad \text{Άρα η Μαρία έχει λιγότερα από } 7 \text{ €.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Πραγματικοί αριθμοί

Ενδεικτικός προγραμματισμός 2ου Κεφαλαίου

2.1	Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	3 ώρες
2.2	Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	2 ώρες
2.3	Προβλήματα	2 ώρες
ΣΥΝΟΛΟ		7 ώρες

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την εισαγωγή στις τετραγωνικές ρίζες.
- Δύο ώρες για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών και την επίλυση ασκήσεων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου \sqrt{a} , με $a \geq 0$,
- να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών με δοκιμές και με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας είναι πηγή λαθών και παρανοήσεων για τους μαθητές. Βασικά λάθη (όπως π.χ. $\sqrt{16} = 8$ ή $\sqrt{16} = \pm 4$ ή $\sqrt{16 + 25} = 4 + 5$) θα πρέπει να διευκρινιστούν με πολλά παραδείγματα.

➤ Για διασκέδαση

Απαντήσεις:

1. Είναι $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$ και $45^2 = 2025$.

Άρα γεννήθηκε το 1936 και, όταν έγινε η ερώτηση, ήταν 44 ετών.

Η ερώτηση έγινε το έτος $1936 + 44 = 1980$.

- 2.

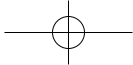


2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την εισαγωγή στους άρρητους αριθμούς και τη θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Μία ώρα για τη γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και την επίλυση ασκήσεων.



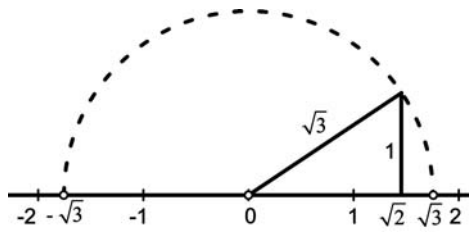
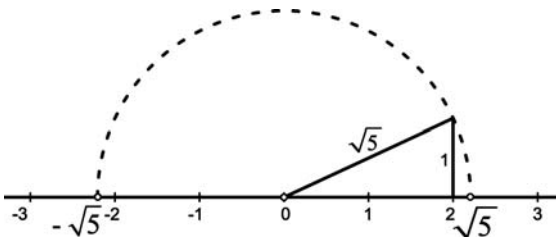
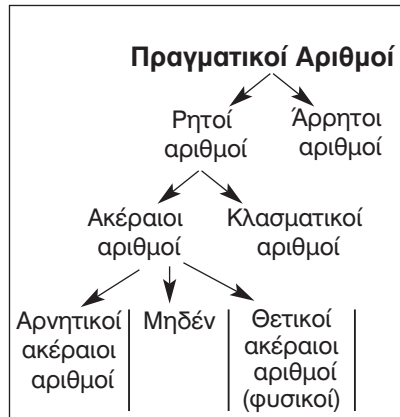
2. Διδακτικοί Στόχοι

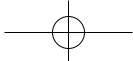
Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δε μπορούν να γραφούν με τη μορφή $\frac{a}{b}$, όπου a, b ακέραιοι και $b \neq 0$,
- να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών,
- να παριστάνουν έναν αριθμό της μορφής \sqrt{a} , όπου a θετικός ακέραιος, με σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών,
- να γνωρίζουν ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες θετικών ακεραίων ή ρητών. Για παράδειγμα, άρρητοι αριθμοί είναι και οι:
 $1 + \sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $2,101001000100001\dots$,
- να παριστάνουν γεωμετρικά ορισμένους άρρητους, όπως π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Οι άρρητοι αριθμοί δίνονται με την έννοια των διαδοχικών ρητών προσεγγίσεων. Προτείνεται ο καθηγητής να κατευθύνει τους μαθητές με κατάλληλες δραστηριότητες στην «ανακάλυψη» των άρρητων αριθμών.
- Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν το βασικό διαχωρισμό των πραγματικών αριθμών σύμφωνα με το διπλανό σχήμα.
- Ο καθηγητής κατά την κρίση του θα δώσει έμφαση στη γεωμετρική κατασκευή άρρητων αριθμών. Θα ήταν σκόπιμο να ενθαρρύνει τους μαθητές να κατασκευάσουν και άλλους άρρητους αριθμούς όπως το $\sqrt{5}$, το $\sqrt{3}$, κ.τ.λ.





2.3. Προβλήματα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Προτείνονται δύο ώρες για επίλυση προβλημάτων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

- Οι μαθητές επιδιώκεται να μπορούν να καταστρώνουν και να επιλύουν προβλήματα στα οποία εμφανίζονται άρρητοι αριθμοί.

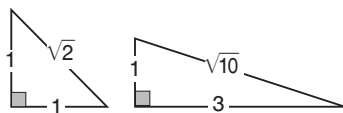
3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Στην παράγραφο αυτή επιλύονται κυρίως προβλήματα που έχουν σχέση με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς. Είναι σημαντικό να δουν οι μαθητές την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και των αρρήτων, όχι μόνο σε γεωμετρικά προβλήματα, αλλά και σε πραγματικά προβλήματα μέτρησης.

Δραστηριότητα

Γεωμετρικές κατασκευές άρρητων αριθμών με τη βοήθεια ορθογώνιων τριγώνων

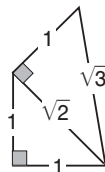
1. Στα διπλανά σχήματα έχουμε κατασκευάσει ευθύγραμμα τμήματα μήκους $\sqrt{2}$ και $\sqrt{10}$: Στις πλευρές μιας ορθής γωνίας μετράμε πρώτα με το διαβήτη τα μήκη των κάθετων πλευρών και μετά φέρνουμε την υποτείνουσα.



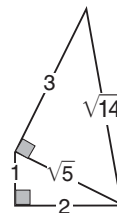
Ισχύουν: $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$ και $1^2 + 3^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$.

Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ και $\sqrt{20}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;

2. Πολλοί άρρητοι δε μπορούν να κατασκευαστούν με τον προηγούμενο τρόπο. Για παράδειγμα ο αριθμός $\sqrt{3}$ μπορεί να κατασκευαστεί μόνο αν χρησιμοποιήσουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα: Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, κατασκευάζουμε πρώτα όπως παραπάνω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{2}$ και στη συνέχεια ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και $\sqrt{2}$, οπότε η υποτείνουσα είναι $\sqrt{3}$, γιατί $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$.



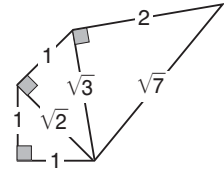
Παρομοίως στο διπλανό σχήμα έχουμε μια κατασκευή του αριθμού $\sqrt{14}$ (ισχύει $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = (\sqrt{14})^2$). Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ και $\sqrt{21}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;



3. Για την κατασκευή ορισμένων άρρητων μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τρία ορθογώνια τρίγωνα! Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{7}$ μπορεί να κατασκευαστεί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

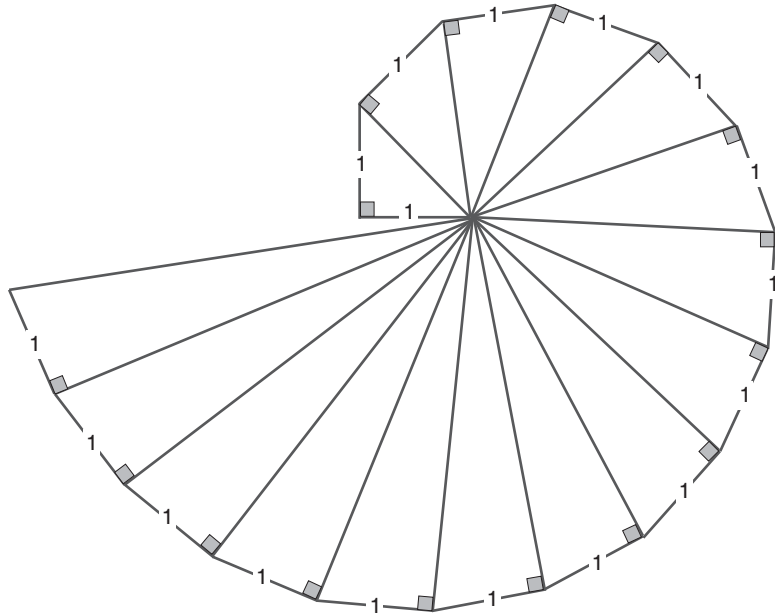
Ισχύει $1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 7 = (\sqrt{7})^2$.

Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{15}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{28}$ και $\sqrt{31}$; Ποιους άλλους άρρητους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον τρόπο;



4. Η σπείρα των άρρητων αριθμών.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε κατασκευάσει διαδοχικά ορθογώνια τρίγωνα σχηματίζοντας μια κυκλική διάταξη (σπείρα). Μπορείτε να υπολογίσετε τις υποτινύουσες των τριγώνων αυτών; Τι επιτυγχάνουμε με αυτή τη σπείρα;



Επαναληπτικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

- Ποιοι από τους επόμενους δεκαδικούς αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;
 - 3,1211221
 - 3,121121121...
 - 3,121122112221122221
 - 7,07007000700007...
- Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{5} \cdot x = \sqrt{3} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.
- Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 5, x , $x + 1$.
Αν το x ικανοποιεί την σχέση $(x + 1)(x + 2) = 38 + x^2$, τότε:
 - Να υπολογίσετε το x .
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να βρείτε και το μήκος της υποτινύουσας.
- Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(\sqrt{25})^2 + \sqrt{(-\sqrt{25})^2} + \sqrt{25^2}$	β) $3(\sqrt{16^2} + \sqrt{16}) - \sqrt{(-\sqrt{16})^2}$
γ) $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$	δ) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{3}$
- Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς: 1, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{18}$, $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{50}$.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

α) Ένας αριθμός x για τον οποίο είναι $x^2=25$ είναι ο:

A. 12,5 B. 50 Γ. -5 Δ. 7

β) Η τετραγωνική ρίζα του 25 είναι:

A. 12,5 B. -5 Γ. 5 Δ. 7

γ) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών «δεξιότερα» του $\sqrt{11}$ βρίσκεται ο αριθμός:

A. 3 B. $\sqrt{7}$ Γ. $\sqrt{13}$ Δ. $\sqrt{10}$

δ) Ο αριθμός $\sqrt{2+\sqrt{4}}$ είναι ίσος με:

A. $\sqrt{6}$ B. 4 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. 2

ε) Από τους επόμενους αριθμούς, άρρητος είναι ο:

A. $\sqrt{16}$ B. $\sqrt{\frac{25}{4}}$ Γ. 13,41 Δ. $\sqrt{3}$

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να χαρακτηρίσετε ως **Σ** (Σωστή) ή **Λ** (Λανθασμένη) τις επόμενες προτάσεις:

α) Αν $x^2 = a$, τότε $\sqrt{a} = x$.

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

β) Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt{a})^2 = a$.

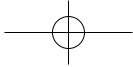
γ) Επειδή $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$, με προσέγγιση χιλιοστού έχουμε:
 $\sqrt{2} = 1,414$.

■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $a = 4\text{cm}$. Να υπολογίσετε το ύψος του.

■ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι $\delta = 10\text{ cm}$. Να υπολογίσετε την πλευρά του.



Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Άρρητοι Αριθμοί – Πραγματικοί Αριθμοί.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της τετραγωνικής ρίζας.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

1. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο ενός αριθμού είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού αυτού με τον εαυτό του. Δηλαδή $a^2 = a \cdot a$. Για παράδειγμα $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ή $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $3^2 = \dots\dots\dots$	β) $8^2 = \dots\dots\dots$	γ) $1^2 = \dots\dots\dots$
δ) $0^2 = \dots\dots\dots$	ε) $1,2^2 = \dots\dots\dots$	στ) $2,3^2 = \dots\dots\dots$
ζ) $0,3^2 = \dots\dots\dots$	η) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \dots\dots\dots$	θ) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \dots\dots\dots$

2. Μερικές φορές την παραπάνω εργασία πρέπει να την κάνουμε αντίστροφα! Για παράδειγμα μπορείτε να βρείτε ποιος αριθμός (**θετικός ή μηδέν**) πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση των κενών στις παρακάτω ισότητες;

α) $(\dots\dots)^2 = 25$	β) $(\dots\dots)^2 = 16$	γ) $(\dots\dots)^2 = 81$	δ) $(\dots\dots)^2 = 100$
ε) $(\dots\dots)^2 = 36$	στ) $(\dots\dots)^2 = 0$	ζ) $(\dots\dots)^2 = 1$	η) $(\dots\dots)^2 = 0,09$
θ) $(\dots\dots)^2 = \frac{9}{25}$	ι) $(\dots\dots)^2 = \frac{1}{4}$	κ) $(\dots\dots)^2 = 4$	λ) $(\dots\dots)^2 = 9$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν έχουμε έναν αριθμό a (θετικό ή μηδέν), τότε ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** του a και συμβολίζεται \sqrt{a} , έναν αριθμό x (θετικό ή μηδέν), ώστε $x^2 = a$. Δηλαδή:
Αν $x^2 = a$, με $a \geq 0$ και $x \geq 0$, τότε $x = \sqrt{a}$.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

Παράδειγμα: είναι $7^2 = 49$ οπότε $\sqrt{49} = 7$

α) είναι $(\dots\dots)^2 = 25$ οπότε $\sqrt{25} = \dots\dots$ β) είναι $(\dots\dots)^2 = 64$ οπότε $\sqrt{64} = \dots\dots$
 γ) είναι $(\dots\dots)^2 = 1$ οπότε $\sqrt{1} = \dots\dots$ δ) είναι $(\dots\dots)^2 = 0$ οπότε $\sqrt{0} = \dots\dots$

4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

Παράδειγμα: είναι $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2 = 100$

α) είναι $\sqrt{81} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$ β) είναι $\sqrt{64} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$
 γ) είναι $\sqrt{0} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$ δ) είναι $\sqrt{36} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$
 ε) είναι $\sqrt{0,09} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$ στ) είναι $\sqrt{\frac{25}{9}} = \dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots$

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Ενότητα: Άρρητοι Αριθμοί – Πραγματικοί Αριθμοί.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές τις διαδοχικές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

«Πού είναι ο αριθμός $\sqrt{7}$ »

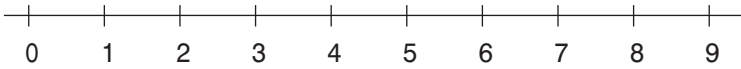
1. Στην δεύτερη στήλη του διπλανού πίνακα δίνονται τα τετράγωνα των αριθμών της πρώτης στήλης.

α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε τη διπλή ανισότητα: $< \sqrt{7} <$

γ) Να τοποθετήσετε (κατά προσέγγιση) τον αριθμό $\sqrt{7}$ στον παρακάτω άξονα αριθμών

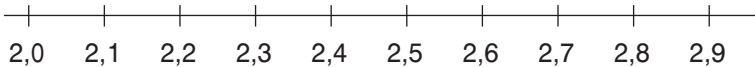


2. α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε τη διπλή ανισότητα: $< \sqrt{7} <$

γ) Να τοποθετήσετε (κατά προσέγγιση) τον αριθμό $\sqrt{7}$ στον παρακάτω άξονα αριθμών



δ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι:

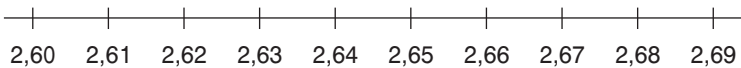
(με έλλειψη) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ (με υπερβολή) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$

3. α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

β) Να συμπληρώσετε τη διπλή ανισότητα: $< \sqrt{7} <$

γ) Να τοποθετήσετε (κατά προσέγγιση) τον αριθμό $\sqrt{7}$ στον παρακάτω άξονα αριθμών



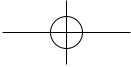
δ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι:

(με έλλειψη) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ (με υπερβολή) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$

x	x ²
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

x	x ²
2,0	4,00
2,1	4,41
2,2	4,84
2,3	5,29
2,4	5,76
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41

x	x ²
2,60	6,7600
2,61	6,8121
2,62	6,8644
2,63	6,9169
2,64	6,9696
2,65	7,0225
2,66	7,0756
2,67	7,1289
2,68	7,1824
2,69	7,2361



4. α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

- β) Να συμπληρώσετε τη διπλή ανισότητα: $< \sqrt{7} <$

- γ) Να τοποθετήσετε (κατά προσέγγιση) τον αριθμό $\sqrt{7}$ στον παρακάτω άξονα αριθμών



x	x ²
2,640	6,969600
2,641	6,974881
2,642	6,980164
2,643	6,985449
2,644	6,990736
2,645	6,996025
2,646	7,001316
2,647	7,006609
2,648	7,011904
2,649	7,017201

- δ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι:

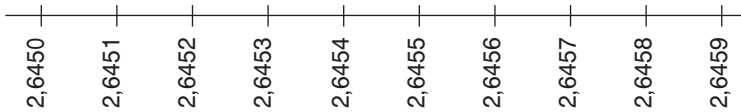
(με έλλειψη) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ (με υπερβολή) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$

5. α) Μπορείτε να βρείτε αριθμό x του διπλανού πίνακα, ώστε $x^2 = 7$;

Απάντηση:

- β) Να συμπληρώσετε τη διπλή ανισότητα: $< \sqrt{7} <$

- γ) Να τοποθετήσετε (κατά προσέγγιση) τον αριθμό $\sqrt{7}$ στον παρακάτω άξονα αριθμών



x	x ²
2,6450	6,99602500
2,6451	6,99655401
2,6452	6,99708304
2,6453	6,99761209
2,6454	6,99814116
2,6455	6,99867025
2,6456	6,99919936
2,6457	6,99972849
2,6458	7,00025764
2,6459	7,00078681

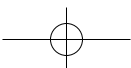
- δ) Μπορούμε να πούμε ότι με προσέγγιση ενός δεκαδικού ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι:

(με έλλειψη) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ (με υπερβολή) $\sqrt{7} = \dots\dots\dots$

6. **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:** (Συνεχίζοντας επ' άπειρον την παραπάνω διαδικασία)

A. Δεν υπάρχει δεκαδικός αριθμός x (με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) τέτοιος ώστε $x^2 = 7$. Δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι αριθμός.

B. Οι άρρητοι αριθμοί είναι δεκαδικοί αριθμοί με δεκαδικά ψηφία τα οποία όμως δεν είναι



Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

2.1

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η διαγώνιος δ του γηπέδου είναι υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές διαστάσεων 65 m και 72 m.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\delta^2 = 65^2 + 72^2 \text{ ή } \delta = 9409. \text{ Οπότε } \delta = \sqrt{9409} \text{ ή } \delta = 97 \text{ m.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω x ο θετικός αριθμός. Τότε $x^2 + 8 = 3x^2$ ή $x^2 - 3x^2 = -8$ ή $-2x^2 = -8$ ή $x^2 = 4$. Οπότε $x = \sqrt{4}$ ή $x = 2$.

2.2

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω a η πλευρά του τετραγώνου. Για το εμβαδόν του έχουμε: $E = a^2$.

Οπότε $a^2 = 12$ ή $a = \sqrt{12}$. Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι $a = 3,46$ cm.

2.3

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η διάμεσος AD στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ύψος. Άρα σχηματίζονται τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και BED . Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABD έχουμε: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ή $12^2 = AD^2 + 6^2$ ή $AD^2 = 108$ ή $AD = 10,39$ cm.

$$\text{Άρα } ED = \frac{AD}{2} = 5,19 \text{ cm.}$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BED έχουμε:

$$BE^2 = ED^2 + BD^2 \text{ ή } BE^2 = 5,19^2 + 6^2 \text{ ή } BE^2 = 62,94.$$

$$\text{Οπότε } BE = \sqrt{62,94} \text{ ή } BE = 7,93 \text{ cm.}$$

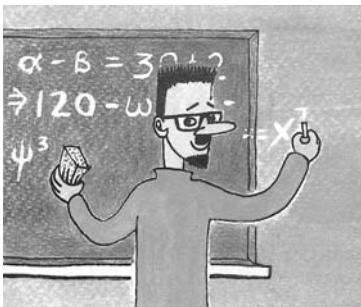
ΑΣΚΗΣΗ 5

Αν η τρίτη πλευρά είναι η υποτείνουσα του τριγώνου τότε $x^2 = 10^2 + 8^2$ ή $x^2 = 164$.

$$\text{Οπότε } x = \sqrt{164} \text{ ή } x = 12,81 \text{ cm.}$$

Αν η τρίτη πλευρά είναι μία από τις κάθετες πλευρές του τριγώνου τότε:

$$10^2 = x^2 + 8^2 \text{ ή } 100 = x^2 + 64 \text{ ή } x^2 = 36. \text{ Οπότε } x = \sqrt{36} \text{ ή } x = 6 \text{ cm.}$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Συναρτήσεις

Ενδεικτικός προγραμματισμός 3ου Κεφαλαίου

3.1	Η έννοια της συνάρτησης	2 ώρες
3.2	Καρτεσιανές συντεταγμένες. Γραφική παράσταση συνάρτησης	3 ώρες
3.3	Η συνάρτηση $y = ax$	3 ώρες
3.4	Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	3 ώρες
3.5	Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Η υπερβολή	2 ώρες
ΣΥΝΟΛΟ		13 ώρες

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

Προτείνονται δύο ώρες για την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν,
- να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης ενοποιητική έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και θεωρείται κεντρικής σημασίας για την παραπέρα ανάπτυξή τους. Η διδασκαλία της έννοιας στη Β' Γυμνασίου περιορίζεται στη συσχέτιση δύο μεταβλητών και στην κατασκευή του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης.
- Προτείνεται να δοθούν δραστηριότητες από την καθημερινότητα με τις οποίες οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή ενός μεγέθους καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την τιμή ενός άλλου μεγέθους, και να βρουν τις σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά.

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για το σύστημα συντεταγμένων, τις συντεταγμένες ενός σημείου και τις συμμετρίες.
- Μια ώρα για την απόσταση δύο σημείων και τη γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Μια ώρα για ασκήσεις εμπέδωσης και εφαρμογές.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου,
- να βρίσκουν ένα σημείο, όταν δίνονται οι συντεταγμένες του,
- να βρίσκουν τις συντεταγμένες του συμμετρικού ενός σημείου, ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων,
- να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων, όταν δίνονται οι συντεταγμένες τους,
- να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών,
- να βρίσκουν κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης,
- να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

3. Σχόλια - Διδακτικές Προσεγγίσεις

- Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με το σύστημα συντεταγμένων από τις προηγούμενες τάξεις. Στη Β' Γυμνασίου η διδασκαλία απλώς επεκτείνεται και στους αρνητικούς αριθμούς. Πρέπει να τονιστεί ο διαχωρισμός στα τεταρτημόρια, οι συμμετρίες και η εύρεση της απόστασης δύο σημείων με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος.
- Η γραφική παράσταση συνάρτησης γίνεται με τη βοήθεια του πίνακα τιμών.
- Προτείνεται να δοθούν δραστηριότητες που αποσκοπούν στην ανάγνωση, κατασκευή και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που αυτές περιγράφουν τη λύση πραγματικών προβλημάτων.

3.3. Η συνάρτηση $y = ax$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

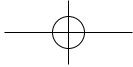
1. Ενδεικτικός Προγραμματισμός

- Μία ώρα για την επανάληψη των ανάλογων ποσών και την εισαγωγή της συνάρτησης $y = ax$.
- Μία ώρα για εξάσκηση των μαθητών στη σχεδίαση γραφικής παράστασης ευθείας της μορφής $y = ax$ και διευκρίνιση του ρόλου της κλίσης a .
- Μία ώρα για επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και σε προβλήματα γραμμικής αλληλεξάρτησης δύο μεγεθών.

2. Διδακτικοί Στόχοι

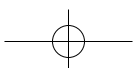
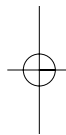
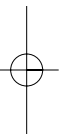
Οι μαθητές επιδιώκεται:

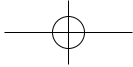
- να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών,
- να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει κλίση a και να μπορούν να τη σχεδιάζουν,
- να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν γνωρίζουν την κλίση της,
- να κατανοήσουν το σημαντικό ρόλο της $y = ax$ στη μελέτη φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια του διαγράμματος διαστήματος – χρόνου μιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.



3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Οι μαθητές γνωρίζουν από την Α' Γυμνασίου την έννοια των ανάλογων ποσών και ότι η γραφική παράσταση των τιμών τους σε ορθογώνιο σύστημα **ημιαξόνων** είναι μια **ημιευθεία** που αρχίζει από την αρχή των αξόνων. Μετά από σύντομη υπόμνηση χρειάζεται απλώς να εισαχθεί η έννοια της σχέσης που συνδέει τις τιμές δύο αναλόγων ποσών ($\frac{y}{x} = a$, άρα $y = ax$) και η επέκταση της γραφικής παράστασης σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- Αφού ξεκαθαριστεί ότι η γραφική παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων, να τονιστεί ότι η γραφική παράσταση μπορεί να σχεδιαστεί, αν βρεθεί ένα ακόμη σημείο της εκτός του O . Επίσης, να εξασκηθούν οι μαθητές μέσα στην τάξη στη σχεδίαση αρκετών γραφικών παραστάσεων (π.χ. $y = 2x$, $y = x$, $y = 0,7x$, $y = \sqrt{2}x$ καθώς και $y = -2x$, $y = -x$, $y = -\frac{3}{2}x$, $y = -\sqrt{3}x$) και να οδηγηθούν στα εξής συμπεράσματα:
 - 1) Αν $a > 0$, η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1ο – 3ο τεταρτημόριο, ενώ αν $a < 0$, βρίσκεται στο 2ο – 4ο τεταρτημόριο.
 - 2) Οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων.
- Να αναδειχθεί ο σημαντικός ρόλος της $y = ax$ στη μελέτη φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια του διαγράμματος διαστήματος – χρόνου μιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, που έχουν διδαχθεί οι μαθητές και στο μάθημα της Φυσικής, φροντίζοντας βέβαια να διατηρηθεί ο συμβολισμός του αντίστοιχου βιβλίου της Φυσικής. Να τονιστεί ότι στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση τα ποσά διάστημα – χρόνος είναι ανάλογα, οπότε το διάγραμμα είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Να δοθεί ως δραστηριότητα η σχεδίαση των διαγραμμάτων διαστήματος – χρόνου μιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, για διάφορες τιμές της ταχύτητας (π.χ. $u = 2$ m/s, $u = 3$ m/s, $u = \frac{1}{2}$ m/s). Επίσης, να δοθεί και η αντίστροφη δραστηριότητα, δηλαδή από το διάγραμμα διαστήματος – χρόνου να συμπεράνουν ότι η κίνηση είναι ομαλή και να υπολογίσουν την ταχύτητα του κινητού.
- Άλλο παράδειγμα, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τη Φυσική, είναι ο νόμος της υδροστατικής πίεσης με το διάγραμμα πίεσης – βάθους.
- Η διερεύνηση του ρόλου του a μπορεί να επιτευχθεί με σαφήνεια και με διαδραστικές δραστηριότητες διερευνητικής μορφής στο εργαστήριο υπολογιστών με τη βοήθεια των ειδικών προγραμμάτων (Geometer's Sketchpad – Graphmatica – Function Probe κ.τ.λ.). Ο ενδιαφερόμενος καθηγητής μπορεί να βρει πολλές τέτοιες δραστηριότητες με έτοιμα σχέδια μαθήματος και φύλλα εργασίας στη διεύθυνση του διαδικτύου: <http://www.e-yliko.gr/mathyliko/mathyliko.htm>





3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την εισαγωγή της συνάρτησης $y = ax + \beta$ και τα βασικά της χαρακτηριστικά.
- Μία ώρα για την εισαγωγή της ευθείας με εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ και τα σημεία τομής της με τους άξονες.
- Μία ώρα για δραστηριότητες και ασκήσεις που αναφέρονται σε προβλήματα άλλων επιστημών και της καθημερινής ζωής.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

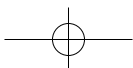
- να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση της $y = ax$ και να μπορούν να σχεδιάζουν την ευθεία αυτή,
- να γνωρίζουν ότι κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία και να μπορούν να τη σχεδιάζουν,
- να προσδιορίζουν τα σημεία τομής των αξόνων και της ευθείας $ax + by = \gamma$,
- να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας από στοιχεία της γραφικής της παράστασης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Αφού διευκρινιστεί ότι η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση της $y = ax$, μπορεί να τονιστεί ότι ένας άλλος τρόπος για να τη σχεδιάσουμε είναι προσδιορίζοντας δύο σημεία της.
- Μέσα από κατάλληλη δραστηριότητα μπορεί να διευκρινιστεί ότι μια εξίσωση της μορφής $y = \beta$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x' . **Για παράδειγμα**, ο λογαριασμός τηλεφώνου από το οποίο δε γίνεται καμία κλήση, οπότε πληρώνουμε κάθε μήνα το πάγιο.
- Ομοίως, μέσα από κατάλληλη δραστηριότητα μπορεί να διευκρινιστεί ότι μια εξίσωση της μορφής $x = a$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$. **Για παράδειγμα**, εξετάζουμε 10 μαθητές της Β' Γυμνασίου ως προς την ηλικία x και το βάρος y του καθενός. Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Ηλικία x σε έτη	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
Βάρος y σε κιλά	40	45	38	52	65	60	58	55	39	42

- και παρατηρούμε ότι τα ζεύγη (x,y) ανήκουν σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.
- Η εύρεση των σημείων τομής των αξόνων και της ευθείας $ax + by = \gamma$, $a \neq 0$ και $b \neq 0$ μπορεί να γίνει μέσα από κατάλληλη δραστηριότητα. Για παράδειγμα, μπορεί να δοθεί το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου $(u - t)$ σε ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και να ζητηθεί από τους μαθητές να βρουν ποια είναι η αρχική ταχύτητα του κινητού και σε πόσο χρόνο θα σταματήσει.
- Να αναδειχθεί με κατάλληλα παραδείγματα η σπουδαιότητα της συνάρτησης $y = ax + \beta$ σε προβλήματα άλλων επιστημών και της καθημερινής ζωής, όπως για παράδειγμα, τα κέρδη μιας επιχείρησης με πάγια έξοδα 5000 € το μήνα ως συνάρτηση του αριθμού x των πωλήσεων κ.τ.λ.



3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ – Η υπερβολή

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για επανάληψη των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και την εισαγωγή της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$. Διευκρίνιση του ρόλου του a , άξονες και κέντρο συμμετρίας της υπερβολής.
- Μία ώρα για εξάσκηση στις διάφορες μορφές υπερβολών και στην επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (για σταθερή τιμή του διαστήματος).

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά,
- να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και να μπορούν επίσης να τη σχεδιάζουν,
- να γνωρίζουν το ρόλο του a για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$.

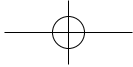
3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Να διευκρινιστεί ότι η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ δεν ορίζεται για $x = 0$.
- Η έννοια της συμμετρίας είναι γνωστή στους μαθητές από την Α' Γυμνασίου. Επομένως, μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα από τους μαθητές στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ και στη συνέχεια να αξιοποιηθεί στην κατασκευή της γραφικής παράστασης (βρίσκουμε 3 – 4 σημεία με θετικές τετμημένες, κατασκευάζουμε τον ένα κλάδο και με τα συμμετρικά τους σημεία τον άλλο κλάδο).
- Αφού οι μαθητές εξασκηθούν στο σχεδιασμό υπερβολών όπως $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{5}{x}$, $y = -\frac{4}{x}$, $y = -\frac{0,5}{x}$ κ.τ.λ. μπορούν να οδηγηθούν στο εξής συμπέρασμα: αν $a > 0$, η υπερβολή βρίσκεται στο 1ο – 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, ενώ αν $a < 0$, η υπερβολή βρίσκεται στο 2ο – 4ο τεταρτημόριο των αξόνων.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο διπλανός πίνακας με τα ισοδύναμα τού Ευρώ με μερικά άλλα νομίσματα κατά την 20–8–2002:
 - α) Ένα πουκάμισο πωλείται 30 €. Ποια είναι η τιμή του σε δολάρια ΗΠΑ και ποια σε λίρες Αγγλίας;

Δολάριο ΗΠΑ	1,1065
Λίρα Αγγλίας	0,6991
Κορώνα Δανίας	7,4337
Κορώνα Σουηδίας	9,3148
Φράγκο Ελβετίας	1,5483



36

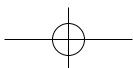
Μέρος Α' - Κεφάλαιο 3ο - Συναρτήσεις

- β) Ένα πουκάμισο πωλείται 30 δολάρια ΗΠΑ. Ποια είναι η τιμή του σε Ευρώ και ποια σε λίρες Αγγλίας;
- γ) Να βρείτε συναρτήσεις που να μετατρέπουν:
- Ευρώ σε Κορώνες Σουηδίας:
 - Κορώνες Σουηδίας σε Ευρώ:
 - Δολάρια ΗΠΑ σε Κορώνες Δανίας:
 - Λίρες Αγγλίας σε Φράγκα Ελβετίας:
2. Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι το βάρος του δέρματος ενός ανθρώπου είναι περίπου το 6,25% του συνολικού του βάρους.
- α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα (στην τελευταία γραμμή να συμπληρώσετε το δικό σας βάρος).
- β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

Βάρος σώματος y	Βάρος δέρματος x
160	
	9
100	
	3
80	
	4

Επαναληπτικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (3a + 1)x + 2$ διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$.
- α) Υπολογίστε το a .
- β) Συμπληρώστε τον πίνακα:
- | | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | | | | | |
- γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
2. Από 120 κιλά τεύτλα παράγονται 18 κιλά ζάχαρη.
- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:
- | | | | | | |
|---------------------------|-----|----|----|----|----|
| Βάρος τεύτλων σε κιλά x | 120 | 60 | | 30 | |
| Βάρος ζάχαρης σε κιλά y | 18 | | 36 | | 54 |
- β) Να εκφράσετε το βάρος της παραγόμενης ζάχαρης ως συνάρτηση του βάρους των τεύτλων.
- γ) Πόση ζάχαρη θα παραχθεί από 10 τόνους τεύτλα;
- δ) Για να έχουμε παραγωγή 3 τόνων ζάχαρης, πόσα τεύτλα χρειάζονται;
3. Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(\sqrt{3}, 3)$.
- α) Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει ως γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.
- β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα Ox .
4. Ο μισθός ενός υπαλλήλου αυξήθηκε κατά 10%.
- α) Να εκφράσετε τις νέες αποδοχές του υπαλλήλου ως συνάρτηση των προηγούμενων αποδοχών του.
- β) Αν οι νέες μηνιαίες αποδοχές του είναι 1300 €, να βρείτε τις προηγούμενες αποδοχές του.



5. α) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = lx + 2$, αν γνωρίζετε ότι το σημείο $A(-7, -12)$ ανήκει στην ευθεία αυτή.
 β) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες χωρίς να τις σχεδιάσετε:
 i) $y = \frac{1}{2}x + 1$ ii) $y = 3x + 2$ iii) $y = 0,5x$ iv) $y = x + 3$ v) $y = 3x - 2$
 Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
6. Ένα αυτοκίνητο διανύει μια απόσταση 400 km σε 6 ώρες. Πόσο πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του, ώστε να διανύσει την ίδια απόσταση σε 5 ώρες;
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 5$.
 α) Να υπολογίσετε την παράσταση $A(x) = f(x + 2) + f(2x - 1)$.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.
8. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (2\lambda + 1)x + 3\mu - 2$. Αν γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = -5x + 7$ και περνάει από το σημείο $B(-1, 6)$, να βρείτε τους αριθμούς λ, μ .
9. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = 2x$ και $(\varepsilon_2): y = -0,5x$. Να αποδείξετε ότι είναι κάθετες.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να συμπληρώσετε τον πίνακα με ανάλογα ποσά:

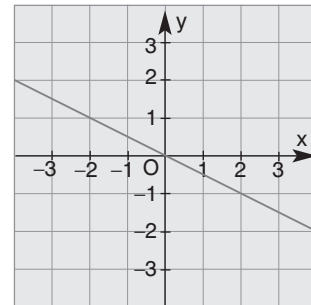
2	4	8	7
	6	18	

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Η ευθεία του διπλανού σχήματος έχει κλίση

A. $-\frac{1}{2}$ B. 3 Γ. -2 Δ. $-\frac{2}{3}$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



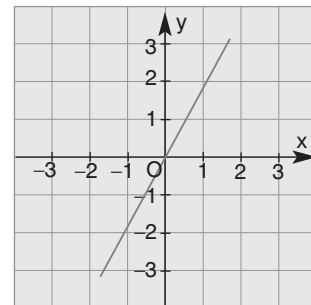
■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$O(0,0)$ και $A(-2, 6)$ είναι:

A. -2 B. 6 Γ. -3 Δ. $-\frac{1}{3}$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

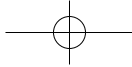


■ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Η ευθεία του διπλανού σχήματος έχει εξίσωση:

A. $y = -\frac{1}{3}x$ B. $y = 3x$ Γ. $y = -3x$ Δ. $y = 2x$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



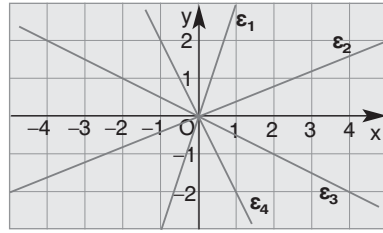
38

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 3ο - Συναρτήσεις

■ ΑΣΚΗΣΗ 5:

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ευθείες ε_1 , ε_2 , ε_3 και ε_4 . Να αντιστοιχίσετε σε καθεμιά την εξίσωσή της.

ε_1	$y = 3x$
	$y = -2x$
ε_2	$y = 0,4x$
ε_3	$y = -\frac{1}{2}x$
ε_4	$y = -1,3x$

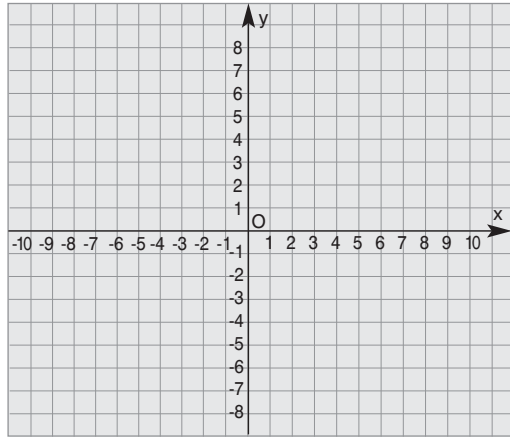


■ ΑΣΚΗΣΗ 6:

Να σχεδιάσετε στο διπλανό σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες με εξισώσεις:

$$y = x, \quad y = 7x, \quad y = -3x \quad \text{και}$$

$$y = -\frac{5}{2}x.$$



Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Στόχοι: Να οδηγηθούν οι μαθητές στη διαπίστωση ότι κάθε σημείο του επιπέδου μπορεί να παρασταθεί από ένα ζεύγος αριθμών (α , β) και αντίστροφα: ότι σε κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο.

Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου.

Να βρίσκουν ένα σημείο, όταν δίνονται οι συντεταγμένες του.

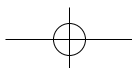
Να βρίσκουν τις συντεταγμένες του συμμετρικού ενός σημείου ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων.

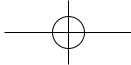
Να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων, όταν δίνονται οι συντεταγμένες τους.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

Η μεγάλη μέρα έφτασε! Ο πιο κρίσιμος αγώνας στην ιστορία της Εθνικής ομάδας ποδοσφαίρου της Ελλάδας θ' αρχίσει σε λίγο. Ο ομοσπονδιακός προπονητής δίνει τις τελευταίες οδηγίες στους παίκτες. Τους εμπυχώνει και εξηγεί τη θέση του καθενός. Για να γίνει πιο κατανοητός, δείχνει στους παίκτες ένα σχεδιάγραμμα με δύο κάθετους άξονες οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο του γηπέδου.

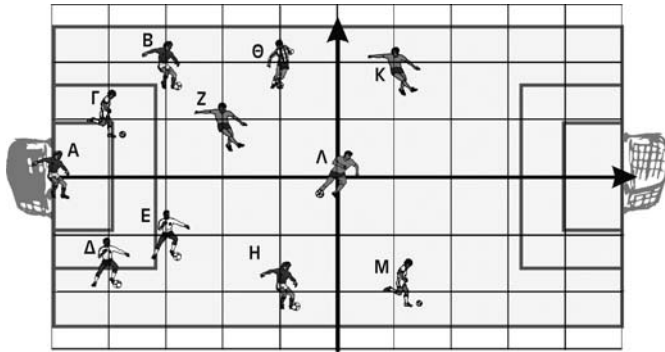




Έχει χωρίσει μάλιστα τους άξονες αυτούς σε ίσα διαστήματα με μήκος 1 cm στο σχεδιάγραμμα, αλλά στην πραγματικότητα κάθε cm αντιστοιχεί σε 10 m.

Για να περιγράψει καλύτερα τη θέση του καθενός χρησιμοποιεί δυο αριθμούς: Από το σημείο όπου βρίσκεται κάθε παίκτης, φέρνει κάθετες στους άξονες. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα x' λέγεται **τετμημένη** και ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα y' λέγεται **τεταγμένη** του παίκτη.

Για παράδειγμα, λέει ότι ο παίκτης Β έχει τετμημένη -3 και τεταγμένη 2 . Πιο απλά γράφει $B(-3, 2)$ και λέει ότι ο παίκτης Β έχει συντεταγμένες $(-3, 2)$.



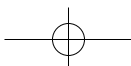
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις θέσεις και των 11 παικτών:

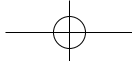
Παίκτης	Τετμημένη x	Τεταγμένη y	Συντεταγμένες (x, y)
A			
B	-3	2	$(-3, 2)$
Γ			
Δ			
Ε			
Ζ			
Η			
Θ			
Κ			
Λ			
Μ			

2. Ο προπονητής δίνει εντολή στον παίκτη Μ να κινείται τρία τετράγωνα μπροστά, όταν επιτίθεται η ομάδα και δύο τετράγωνα πίσω, όταν αμύνεται. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των θέσεων στις οποίες πρέπει να βρίσκεται ο παίκτης σ' αυτές τις περιπτώσεις; Όταν επιτίθεται: Όταν αμύνεται:
3. Ο προπονητής δίνει εντολή στον παίκτη Θ να τροφοδοτεί, αν μπορεί, τον παίκτη Μ με μακρινές διαγώνιες μπαλιές. Χρησιμοποιήστε το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν οι παίκτες Θ, Κ και Μ για να υπολογίσετε τις αποστάσεις μεταξύ των τριών παικτών.

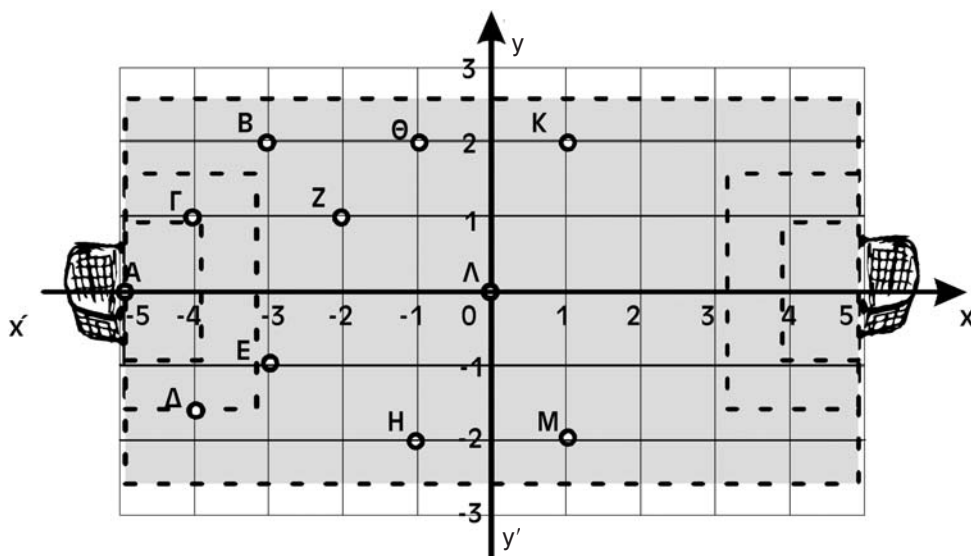
.....

Από τα παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

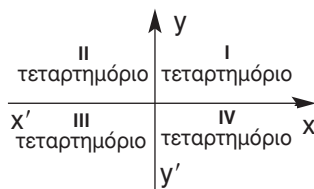


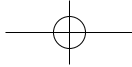


4. Για να οργανώσουμε και να μελετήσουμε καλύτερα έναν επίπεδο χώρο, χρησιμοποιούμε δυο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O .
Λέμε ότι έχουμε ένα
Αν στους άξονες αυτούς χρησιμοποιήσουμε την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε λέμε ότι έχουμε ένα
5. Κάθε σημείο M του επιπέδου καθορίζεται από ένα μοναδικό ζεύγος αριθμών (α, β) που ονομάζονται του σημείου M . Ο αριθμός α ειδικότερα λέγεται του σημείου M , ενώ ο αριθμός β λέγεται του σημείου M .
6. Αν ένα σημείο ανήκει στον άξονα $x'x$, τότε έχει ίση με 0.
7. Αν ένα σημείο ανήκει στον άξονα $y'y$, τότε έχει ίση με 0.
8. Η αρχή των αξόνων O έχει συντεταγμένες
9. Παρατηρήστε τους παίκτες K και M . Οι θέσεις τους είναι συμμετρικές ως προς
Οι τετμημένες τους είναι ενώ οι τεταγμένες τους είναι
Γενικά, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το συμμετρικό ενός σημείου (α, β) ως προς τον άξονα $x'x$ έχει συντεταγμένες
10. Παρατηρήστε τους παίκτες Θ και K . Οι θέσεις τους είναι συμμετρικές ως προς
Οι τετμημένες τους είναι ενώ οι τεταγμένες τους είναι
Γενικά, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το συμμετρικό ενός σημείου (α, β) ως προς τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες



11. Παρατηρήστε τους παίκτες K και H . Οι θέσεις τους είναι συμμετρικές ως προς
Οι τετμημένες τους είναι και οι τεταγμένες τους είναι
Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το συμμετρικό ενός σημείου (α, β) ως προς την αρχή O των αξόνων έχει συντεταγμένες





12. Γενικά, ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερις γωνίες που λέγονται και συμβολίζονται με λατινικούς αριθμούς I, II, III και IV.
13. Μπορούμε να καταλάβουμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται ένα σημείο $M(a, \beta)$ από τα πρόσημα των αριθμών a και β :
- Στο I τεταρτημόριο το a είναι και το β
- Στο II τεταρτημόριο το a είναι και το β
- Στο III τεταρτημόριο το a είναι και το β
- Στο IV τεταρτημόριο το a είναι και το β
14. Για να υπολογίσουμε την απόσταση δύο σημείων A και B του επιπέδου, χρησιμοποιούμε το σ' ένα τρίγωνο με υποτείνουσα την AB.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Ενότητα: Ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση $y = ax$.

Στόχοι: Να συνδεθεί η εξίσωση της ευθείας $y = ax$ με την έννοια των ανάλογων ποσών. Να οδηγηθούν οι μαθητές στη διαπίστωση ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι ευθεία που διέρχεται από το O. Να βρίσκουν (από τη γραφική παράσταση) την τιμή της συνάρτησης για γνωστή τιμή του x . Να βρίσκουν (από τη γραφική παράσταση) την τιμή του x για γνωστή τιμή του y .

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική)

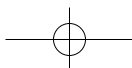
• Φύλλο εργασίας •

Ένα κατάστημα ρούχων κάνει έκπτωση 40% σε όλα του τα είδη! Αν ονομάσουμε x την κανονική τιμή ενός είδους πριν από την έκπτωση και y την μειωμένη τιμή του είδους αυτού μετά την έκπτωση:

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές διαφόρων ειδών:

Πίνακας 1	παντελόνι	πουκάμισο	φουστάνι	μπλούζα	παπούτσια	παλτό
x παλιά τιμή	50 €	30 €	70 €	20 €	40 €	100 €
«έκπτωση»						
y νέα τιμή						

2. Δύο ποσά x και y λέγονται ανάλογα, όταν
3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:
- | | | | | | | |
|---------------|--|--|--|--|--|--|
| $\frac{y}{x}$ | | | | | | |
|---------------|--|--|--|--|--|--|
- Συμπέρασμα:
4. Όταν δυο ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$
5. Χρησιμοποιήστε το συμπέρασμα του ερωτήματος 3 για να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x



42

6. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) που βρήκατε στον πίνακα 1.

Τι παρατηρείτε;

7. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 0,6x$.

Συμπέρασμα:

8. Από τη γραφική παράσταση (χωρίς υπολογισμούς) να βρείτε την τιμή με την έκπτωση που πωλείται ένα ζευγάρι κάλτσες, ένα μαγιό και ένα σακάκι που έχουν χωρίς την έκπτωση 10 €, 35 € και 80 € αντίστοιχα.

.....

9. Από τη γραφική παράσταση (χωρίς υπολογισμούς) να βρείτε πόσο είχαν χωρίς την έκπτωση, ένα παντελόνι που αγοράστηκε τελικά με την έκπτωση 54 € και μία φούστα που αγοράστηκε τελικά με την έκπτωση 60 €

.....

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:

Ενότητα: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$.

Στόχοι: Να διακρίνουν οι μαθητές τις ομοιότητες των γραφικών παραστάσεων των ευθειών $y = ax + \beta$, όταν το a είναι σταθερό και το β μεταβάλλεται ή το β είναι σταθερό και το a μεταβάλλεται..

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική)

• Φύλλο εργασίας •

1. Στο διπλανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = 2x, \quad y = 2x + 1, \quad y = 2x + 3,$$

$$y = 2x - 3 \quad \text{και} \quad y = 2x - 5.$$

2. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν και οι πέντε αυτές ευθείες;

.....

.....

.....

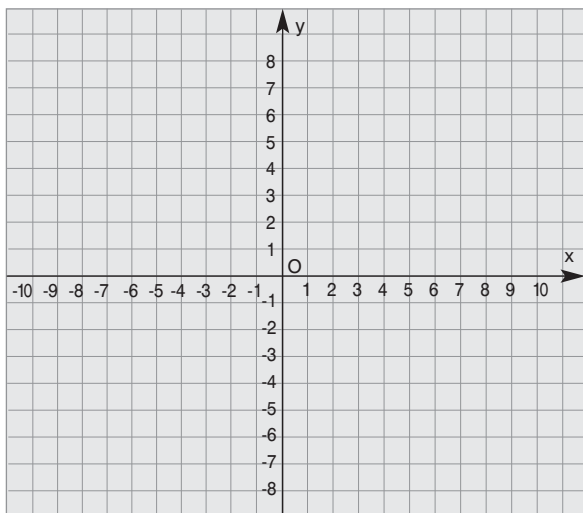
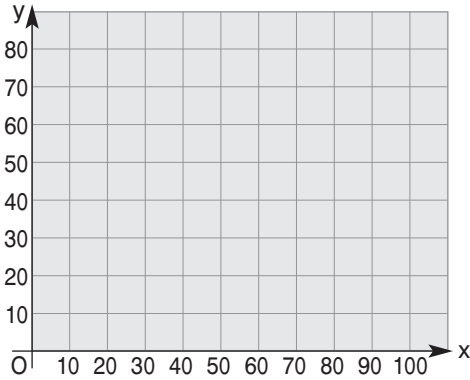
.....

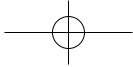
.....

Συμπέρασμα:

Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $y = 2x + \beta$, όπου το β μεταβάλλεται, είναι

.....





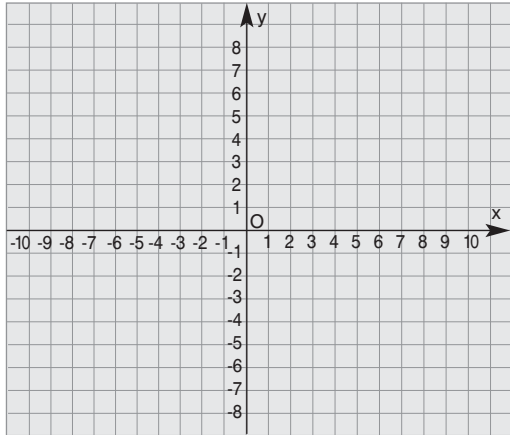
3. Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις $y = ax + \beta$, όπου το a είναι σταθερός αριθμός και το β μεταβάλλεται είναι

4. Στο διπλανό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = 2x + 3, \quad y = 3x + 3, \quad y = -2x + 3,$$

$$y = -x + 3 \text{ και } y = x + 3.$$

5. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν και οι πέντε αυτές ευθείες;



Συμπέρασμα: Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $y = ax + 3$, όπου το a μεταβάλλεται,

6. Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις $y = ax + \beta$, όπου το β είναι σταθερός αριθμός και το a μεταβάλλεται,

Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

3.1

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν x είναι η τιμή χωρίς φόρο, τότε η επιβάρυνση θα είναι $\frac{8}{100}x$. Συνεπώς η τελική τιμή είναι $y = x + \frac{8}{100}x$ ή $y = x + 0,08x$ ή $y = 1,08x$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $2x + 2y = 60$. Άρα $2y = 60 - 2x$ ή $2y = 2(30 - x)$ ή $y = 30 - x$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $x \cdot y = 100$. Άρα $y = \frac{100}{x}$.

3.3

ΑΣΚΗΣΗ 5

Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $x = 2$ και $y = 6$. Άρα η κλίση της ευθείας θα είναι:

$$a = \frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3. \text{ Συνεπώς έχουμε την ευθεία } y = 3x.$$

3.4**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Για μια διαδρομή x χιλιομέτρων το κόστος είναι $0,2x$ €. Επιπλέον πληρώνουμε $0,5$ € για τη σημαία. Άρα το συνολικό κόστος θα είναι $y = 0,2x + 0,5$ €.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα x' θέτουμε $y = 0$ και έχουμε: $2x - 3 \cdot 0 = 6$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα x' είναι το $(3, 0)$. Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα y' θέτουμε $x = 0$ και έχουμε: $2 \cdot 0 - 3y = 6$ ή $-3y = 6$ ή $y = -2$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα y' είναι το $(0, -2)$.

3.5**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά x, y παρατηρούμε από τον πίνακα ότι για $x = 3$ έχουμε $y = 4$. Άρα $xy = 3 \cdot 4 = 12$ ή $y = \frac{12}{x}$. Για $x = 1$, είναι $y = \frac{12}{1} = 12$.

Για $x = 2$, είναι $y = \frac{12}{2} = 6$. Για $x = 4$, είναι $y = \frac{12}{4} = 3$.

Για $x = 6$, είναι $y = \frac{12}{6} = 2$. Για $x = 12$, είναι $y = \frac{12}{12} = 1$.

Συνεπώς ο πίνακας είναι:

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: «Η έννοια των ανάλογων μεγεθών στις θετικές και ανθρωπιστικές επιστήμες»

Κριτήρια επιλογής του θέματος

- A.** Η αναλογία ποσών εμφανίζεται σε μεγάλο εύρος προβλημάτων της ζωής μας. Η έννοια της μεταβολής ενός μεγέθους που εξαρτάται από ένα άλλο, παρουσιάζεται στην απλούστερη της μορφή σε ανάλογα ποσά.
- B.** Η αλληλεπίδραση μεγεθών δίνεται, ως ειδική περίπτωση, από το σταθερό τους λόγο. Οι λόγοι και αναλογίες ομοειδών μεγεθών παρουσιάζονται ιστορικά ως η μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον αφηρημένο μαθηματικό λογισμό (βλ. Στοιχεία του Ευκλείδη).
- Γ.** Αρκετές βασικές έννοιες των φυσικών επιστημών ακολουθούν τη γραμμικότητα, όπως π.χ. στην κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Είναι σημαντικό να παρουσιαστεί η ισοδυναμία του σταθερού λόγου, της αναλογίας, του τύπου της γραμμικής συνάρτησης και της αναπαράστασης της σχέσης δύο μεγεθών με μία ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.
- Δ.** Η γεωμετρική ερμηνεία των ποσών με σταθερή αναλογία εμφανίζεται γεωμετρικά στην ομοιότητα και εντοπίζεται στις εφαρμογές σε σμικρύνσεις και μεγεθύνσεις σχημάτων.
- Ε.** Η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης έχει ως κλίση το σταθερό λόγο. Δίνεται έτσι η αφορμή για μελέτη πραγματικών προβλημάτων με κλίσεις ευθειών (π.χ. σχεδιασμός ανηφορικών δρόμων ή αλυσίδων παραγωγής σε εργοστάσια με αυτοματισμούς).
- ΣΤ.** Οι συχνές επισημάνσεις της αναλογίας σε εκφάνσεις της κοινωνικής, πολιτικής και επαγγελματικής ζωής με κύριο σκοπό να τονιστεί η αποδοτικότητα των ατόμων στους τομείς αυτούς.
- Z.** Οι αναφορές που έχουν καταγραφεί με χαρακτηριστικά αναλογίας στην προγενέστερη και σύγχρονη κοινωνική και πολιτική πραγματικότητα.

Σκοπός

Η έννοια της αναλογίας είναι ιδιαίτερα γνωστή σε όλους χωρίς όμως να έχει σχετιστεί με τις προηγούμενες έννοιες της μεταβολής, της αλληλεπίδρασης, της γραμμικότητας, της ομοιότητας, της κλίσης και χωρίς να είναι πάντα δυνατή η εποπτική αναπαράσταση και ο λογισμός της. Είναι επομένως σημαντικό να συνδεθούν όλες οι παραπάνω έννοιες, ώστε να γίνει αντιληπτός ο κοινός παρανομαστής τους και να καταστεί εφικτή η διαχείρισή τους. Ένας επιπλέον σκοπός είναι να μελετηθεί η αναλογία μέσα από τη σύγχρονη κοινωνική ζωή και τη σχολική πραγματικότητα.

Στόχοι

- Η εμπάθυνση των μαθητών στην έννοια της αναλογίας με απτά παραδείγματα.
- Η συσχέτιση των εννοιών που παρουσιάστηκαν με τη γραμμική συνάρτηση.
- Η ευχέρεια των μαθητών στο λογισμό με γραμμικές συναρτήσεις και η εποπτική αναπαράστασή τους.
- Η επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής με τη χρήση γραμμικού μοντέλου.

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Οι μαθητές δουλεύουν ανά μικρές ομάδες στις οποίες αρχικά προτείνονται θέματα – δραστηριότητες που απεικονίζουν τις έννοιες που σχετίζονται με τη γραμμικότητα. Όταν κάθε ομάδα επιλέξει το θέμα που την ενδιαφέρει, προσπαθεί μέσα από κατάλληλη δραστηριότητα να καταλήξει σε γραμμικό μοντέλο. Οι προσπάθειες των ομάδων παρουσιάζονται σε όλους, ώστε να διαπιστωθεί η κοινή βάση των θεμάτων – δραστηριοτήτων και να εξαχθούν τα τελικά συμπεράσματα.

Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες

- Μελέτη πραγματικών προβλημάτων εκτίμησης μεγεθών (Οικονομία, Βιολογία, Οικολογία κ.τ.λ.) μέσω της γραφικής του αναπαράστασης από ευθεία αναλογίας. Για παράδειγμα, εκτίμηση της παραγωγής απορριμάτων της Αθήνας το 2010.
- Εξαγωγή μοντέλων κίνησης με σταθερή ταχύτητα και υπολογισμός αποστάσεων ή χρονικής διάρκειας.
- Χρήση της αναλογίας για σμίκρυνση και μεγέθυνση σχημάτων με εφαρμογές στη χαρτογράφηση συγκεκριμένης περιοχής.
- Μελέτη προβλημάτων με κλίση, όπως σχεδιασμός οδικού δικτύου σε ορεινή περιοχή ή σχεδιασμός γραμμής παραγωγής (με αυτοματισμούς) σε εργοστάσιο.
- Η αύξηση των ρυπογόνων ουσιών έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία του φαινομένου του «θερμοκηπίου» (αύξηση της μέσης τιμής της θερμοκρασίας του πλανήτη, διατάραξη οικοσυστήματος και συνέπειες στην οικονομική και κοινωνική ζωή) (Γεωγραφία, Βιολογία, Φυσική, Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή).

Χρονοδιάγραμμα

Οι δραστηριότητες μπορούν να ολοκληρωθούν σε τέσσερα δίωρα. Στο πρώτο δίωρο διατυπώνεται το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται και εισάγονται οι έννοιες γύρω από τις οποίες θα κινηθούν οι δραστηριότητες. Στο δεύτερο δίωρο γίνεται παρουσίαση των θεμάτων – δραστηριοτήτων και συζήτηση πάνω σε αυτές. Στο τρίτο δίωρο οι ομάδες εργασίας των μαθητών αντιμετωπίζουν τις δραστηριότητες. Στο τέταρτο δίωρο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ομάδων εργασίας και συνοψίζονται σε κοινά συμπεράσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - Περιγραφική Στατιστική

Ενδεικτικός προγραμματισμός 4ου Κεφαλαίου

4.1	Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα	2 ώρες
4.2	Γραφικές παραστάσεις	3 ώρες
4.3	Κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	2 ώρες
4.4	Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	3 ώρες
4.5	Μέση τιμή – Διάμεσος	5 ώρες
ΣΥΝΟΛΟ		15 ώρες

4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την έννοια του πληθυσμού και του δείγματος.
- Μια ώρα για εξάσκηση σε αντίστοιχα προβλήματα.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες του πληθυσμού και του δείγματος,
- να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα του αντιπροσωπευτικού δείγματος.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

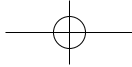
- Η Στατιστική θεωρείται ως ένα από τα πιο αποτελεσματικά εργαλεία των Μαθηματικών για την κατανόηση του κόσμου μας. Οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες για τη διερεύνηση ποικίλων και ενδιαφερόντων θεμάτων της καθημερινής ζωής.
- Η ανάδειξη της σπουδαιότητας ενός αξιόπιστου και αντικειμενικού (αντιπροσωπευτικού) δείγματος μπορεί να γίνει με αναφορά σε διάφορες δημοσκοπήσεις που έγιναν και απέτυχαν στις προβλέψεις τους, επειδή το δείγμα που επιλέχτηκε δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.
- Με κατάλληλα παραδείγματα από την εμπειρία και τα ενδιαφέροντα των μαθητών να αναζητηθούν συνθήκες, ώστε ένα δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό. Οι εφημερίδες, τα περιοδικά και η τηλεόραση αποτελούν σημαντικές πηγές υλικού για το κεφάλαιο αυτό, το οποίο μπορεί να προκαλέσει ζωηρό ενδιαφέρον στους μαθητές λόγω του επίκαιρου χαρακτήρα του. Επίσης μπορεί να αποδείξει στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά βρίσκουν εφαρμογή στις δραστηριότητες της καθημερινής ζωής.

4.2. Γραφικές παραστάσεις

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για τα εικονογράμματα και τα ραβδογράμματα.
- Μια ώρα για τα κυκλικά διαγράμματα και τα χρονογράμματα.
- Μια ώρα για επαναληπτικές ασκήσεις.



2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων,
- να αντλούν πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις,
- να κατασκευάζουν μια κατάλληλη γραφική παράσταση των δεδομένων ενός πίνακα,
- να παρουσιάζουν τα συμπεράσματα μιας έρευνας.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Για να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες αυτές, προτείνεται να προσκομίσουν στατιστικό υλικό από διάφορα έντυπα (εφημερίδες κ.τ.λ.) ή διάφορους φορείς (Στατιστική υπηρεσία κ.τ.λ.), να εξοικειωθούν με αυτό και στη συνέχεια να κάνουν οι ίδιοι έρευνες, ακολουθώντας τα εξής βασικά βήματα: διατύπωση του αντικειμένου της έρευνας – σύνταξη ερωτηματολογίου – συλλογή στοιχείων – κατανομή συχνοτήτων – παρουσίαση με πίνακα ή διάγραμμα – συμπεράσματα.
- Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο γι' αυτή την ενότητα:
<http://forum.swarthmore.edu/workshops/sum96/data.collections/datalibrary>
http://www.kethi.gr/greek/statistika/Apasxolisi/APOGRAFI_01.htm
<http://www.statistics.gr/>
http://www.pedtrauma.gr/gr/stats_total.htm
http://www.infopeloponnisos.gr/innovation/innovation_sources.html
<http://europa.eu.int/comm/eurostat>

4.3. Κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για τη συμπλήρωση του πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
- Μία ώρα για τις γραφικές παραστάσεις μιας κατανομής συχνοτήτων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τις έννοιες: συχνότητα – σχετική συχνότητα – κατανομή των συχνοτήτων,
- να συμπληρώνουν πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων,
- να κατασκευάζουν μια συγκεκριμένη γραφική παράσταση μιας κατανομής συχνοτήτων.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Στους μαθητές είναι ήδη γνωστή η έννοια του ποσοστού, το οποίο άλλωστε συναντούν σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής. Θα πρέπει εδώ να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν την ορολογία: διαλογή – συχνότητες – σχετικές συχνότητες.

4.4. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την ομαδοποίηση και τη συμπλήρωση πινάκων συχνοτήτων.
- Μία ώρα για τη γραφική παράσταση ομαδοποιημένων κατανομών με ιστόγραμμα.
- Μία ώρα για επαναληπτικές ασκήσεις.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να ομαδοποιούν στατιστικά δεδομένα σε δεδομένο αριθμό κλάσεων ίσου πλάτους,
- να κατανοήσουν την έννοια του πλάτους των κλάσεων,
- να παριστάνουν μια ομαδοποιημένη κατανομή με ιστόγραμμα, στο οποίο το ύψος των ορθογώνιων του ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Με κατάλληλες δραστηριότητες θα πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι μεγάλο (π.χ. τα ύψη των μαθητών του σχολείου), είναι ασύμφορο να κατασκευάσουμε πίνακα συχνοτήτων, οπότε κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.

4.5. Μέση τιμή – Διάμεσος

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 5 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής.
- Μία ώρα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής ομαδοποιημένης κατανομής.
- Μία ώρα για την εύρεση της διαμέσου.
- Δύο ώρες για επίλυση ασκήσεων και επαναληπτικά θέματα.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να μπορούν να υπολογίσουν τη μέση τιμή μεμονωμένων παρατηρήσεων, κατανομής συχνοτήτων και ομαδοποιημένων παρατηρήσεων,
- να μπορούν να προσδιορίσουν τη διάμεσο άρτιου και περιττού πλήθους παρατηρήσεων.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Για να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η μέση τιμή επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις, μπορεί ο διδάσκων να δώσει παραδείγματα, όπως η βαθμολογία δύο μαθητών:
 Μαθητής Α: 12 14 14 15 15
 Μαθητής Β: 10 10 11 11 18
 και να ζητήσει να υπολογίσουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο για κάθε μαθητή χωριστά. Στη συνέχεια να συζητηθεί ο γενικός βαθμός τριμήνου κάθε μαθητή.
- Αν υπάρχει η δυνατότητα, μπορούν οι μαθητές με τη καθοδήγηση του διδάσκοντα να χρησιμοποιήσουν το εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους. Έτσι θα έχουν την ευκαιρία να εξασκηθούν με τη χρήση ενός λογιστικού προγράμματος (π.χ. Excel) με το οποίο θα υπολογίσουν τις σχετικές συχνότητες, τη μέση τιμή μιας κατανομής συχνοτήτων και θα κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις.

Δραστηριότητα

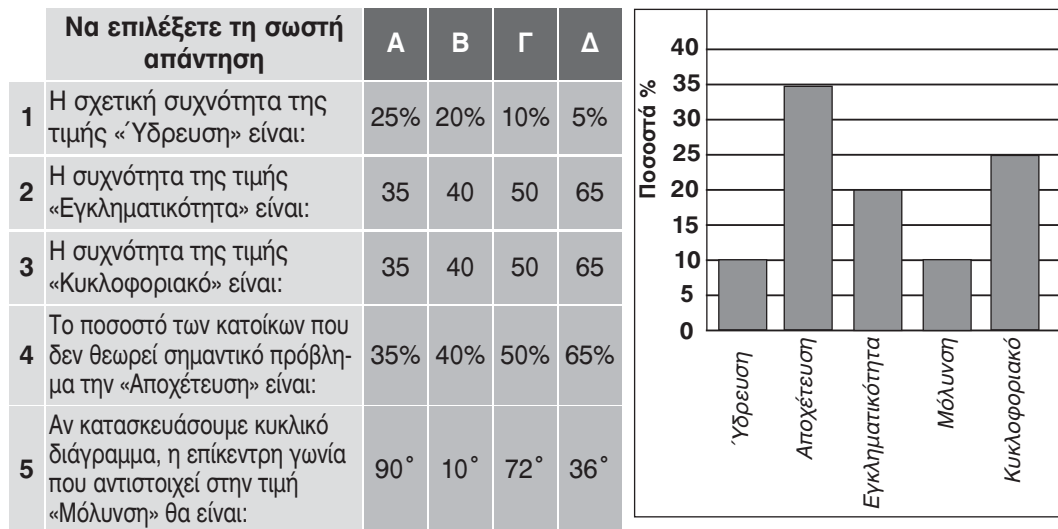
Για τη διδασκαλία του κεφαλαίου προτείνεται οι μαθητές να κάνουν οι ίδιοι στατιστικές έρευνες στο άμεσο περιβάλλον τους. Για το σκοπό αυτό, μπορούν τα παιδιά να ενθαρρυνθούν να κατασκευάσουν ένα ερωτηματολόγιο με βάση τα ενδιαφέροντά τους, π.χ. είδη μουσικής που προτιμούν, εκπομπές τηλεόρασης, αθλητισμός κ.τ.λ. Στη συνέχεια να απαντήσουν οι ίδιοι ανώνυμα και να αναζητήσουν απαντήσεις από τους φίλους και τους γνωστούς τους. Αφού συγκεντρωθούν τα αποτελέσματα, να γίνει κωδικοποίηση των απαντήσεων τους στον πίνακα της τάξης, να τους ζητηθεί να απεικονίσουν τα συμπεράσματα με γραφικές παραστάσεις και να σχολιάσουν το αποτέλεσμα. Επίσης, μπορούν να εκτιμήσουν αν τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν γενικότερα σε όλο το σχολείο ή σε όλο τον πληθυσμό της περιοχής τους. Με περισσότερα παραδείγματα οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες του δείγματος, του πληθυσμού και της αντιπροσωπευτικότητας ενός δείγματος. Αν υπάρχει η δυνατότητα, μπορούν οι μαθητές να γνωρίσουν την επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας από υπολογιστή και να χειριστούν οι ίδιοι το αντίστοιχο λογισμικό.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης

Διάρκεια: 1 ώρα

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

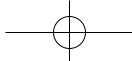
Σε μια έρευνα ρωτήθηκαν 200 κάτοικοι μιας πόλης: «Ποιο θεωρείτε πιο σημαντικό πρόβλημα για την πόλη μας;» Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα.



■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων:
12 15 12 14 13 15 18 13 17
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο της κατανομής συχνοτήτων:

Τιμές	5	6	7	8
Συχνότητες	3	5	8	4



50

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 4ο - Περιγραφική Στατιστική

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Στον πίνακα δίνονται οι ηλικίες των 50 εργαζομένων μιας επιχείρησης:

30	42	37	22	32	44	20	35	46	25
32	21	59	39	21	38	54	27	45	20
43	29	34	43	22	25	39	37	57	47
31	35	53	23	49	32	41	24	33	38
36	27	31	37	52	24	36	48	28	30

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Διαλογή	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
20 – 30				
30 – 40				
40 – 50				
50 – 60				

β) Να εκτιμήσετε τη μέση ηλικία των εργαζομένων της επιχείρησης.

Επαναληπτικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

1. Μετρήσαμε το ύψος 30 μαθητών μιας τάξης Γυμνασίου και πήραμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

165	145	150	160	160	165	170	155	165	155
160	150	165	150	165	165	150	155	170	155
145	160	165	170	165	150	150	165	155	155

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
 β) Από τον πίνακα αυτό να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν ύψος
 i) λιγότερο των 175 cm.
 ii) τουλάχιστον 170 cm αλλά και το πολύ 180 cm.

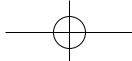
2. Στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων δίνεται η κατανομή του αριθμού των παιδιών 50 οικογενειών. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

- α) τουλάχιστον 2 παιδιά.
 β) λιγότερα από 3 παιδιά.
 γ) ακριβώς 1 παιδί.
 δ) από 2 έως 3 παιδιά.

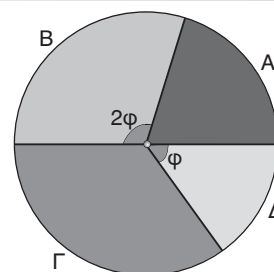
Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα v_i
0	12
1	10
2	18
3	7
4	3

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τιμές	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
1		20%
2		
3		30%
4	7	
Σύνολα	50	



4. Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα των εκλογών, για την ανάδειξη του Προέδρου ενός συλλόγου. Έλαβαν μέρος 200 μέλη του συλλόγου. Από τους τέσσερις υποψήφιους Α, Β, Γ και Δ, ο υποψήφιος Α συγκέντρωσε 40 ψήφους. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στον υποψήφιο Γ είναι 126° . Πόσες ψήφους συγκέντρωσε ο κάθε υποψήφιος;



5. Οι αριθμοί x , $2x-1$, 8 , $a-1$, $a-2$, $6x-1$, 21 , $7x+1$, $2a-1$ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά μεγέθους και έχουν μέση τιμή και διάμεσο 14 . Να βρείτε τους αριθμούς a και x .
6. Η μέση βαθμολογία ενός μαθητή σε 4 διαγωνίσματα Φυσικής είναι 15 και σήμερα γράφει και ένα πέμπτο διαγώνισμα!
- Αν στο πέμπτο διαγώνισμα ο μαθητής γράψει 11 ποια θα είναι η νέα μέση βαθμολογία;
 - Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος δυνατός μέσος όρος που μπορεί να έχει ο μαθητής αυτός και από τα πέντε διαγωνίσματα;
 - Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο πέμπτο διαγώνισμα για να ανεβάσει τη βαθμολογία του κατά μία μονάδα;
7. Ο μέσος μηνιαίος μισθός v εργαζομένων σε μια επιχείρηση είναι 1200 €. Αν προσληφθούν άλλοι 5 εργαζόμενοι με μέσο μηνιαίο μισθό 1000 €, τότε ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων γίνεται 1150 €. Να βρείτε το v .
8. Το μέσο ύψος 10 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 204 cm. Ο προπονητής για να αυξήσει το μέσο ύψος της ομάδας παίρνει δύο ακόμη παίκτες με ύψη 206 cm και 210 cm. Ποιο είναι τώρα το μέσο ύψος της ομάδας;
9. Η μέση τιμή 9 αριθμών είναι ίση με 4 . Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σ' αυτούς ώστε η νέα μέση τιμή να γίνει ίση με 5 ;

Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Βασικές Έννοιες – Γραφικές παραστάσεις – Κατανομές συχνοτήτων.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές τις βασικές έννοιες της Στατιστικής, να μπορούν να κατασκευάσουν και να μελετήσουν γραφικές παραστάσεις και να συμπληρώνουν πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

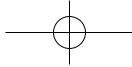
Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

Ο άθλος του Euro 2004!

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται μερικά στοιχεία 20 ποδοσφαιριστών της εθνικής ομάδας ποδοσφαίρου της Ελλάδας, που κατέκτησε το Ευρωπαϊκό πρωτάθλημα του 2004.

Επώνυμο	Όνομα	Θέση	Ηλικία	Ύψος	Βάρος	Ομάδα
1. Βρύζας	Ζήσης	Επιθετικός	31	182	79	Φιορεντίνα
2. Γιαννακόπουλος	Στέλιος	Μέσος	30	172	70	Μπόλτον
3. Γκούμας	Γιάννης	Αμυντικός	29	184	76	Παναθηναϊκός
4. Δέλλας	Τραϊανός	Αμυντικός	28	196	88	Ρόμα
5. Ζαγοράκης	Θοδωρής	Μέσος	33	178	75	ΑΕΚ



Λέμε λοιπόν ότι η τιμή «τερματοφύλακας» έχει συχνότητα 2 ενώ η τιμή «αμυντικός» έχει συχνότητα 8.

ΓΕΝΙΚΑ: Το πλήθος των ατόμων που παίρνουν μια τιμή, λέγεται της τιμής αυτής.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές της μεταβλητής «θέση στην οποία αγωνίζεται ένας ποδοσφαιριστής της εθνικής ομάδας» και τις συχνότητες των τιμών αυτών:

Τιμές	Συχνότητες
τερματοφύλακας	2
αμυντικός	6
.....
.....
Σύνολο

4. Ο αθλητικογράφος σκέφτεται στη συνέχεια ότι η συχνότητα 4 της τιμής «επιθετικός» δεν έχει αξία από μόνη της, παρά μόνο όταν αναφέρεται στο σύνολο των 20 παικτών της ομάδας. Δηλαδή είναι καλύτερα να λέμε ότι «4 στους 20 παίκτες της εθνικής ομάδας, είναι επιθετικοί». Γι' αυτό μετατρέπει τις συχνότητες σε ποσοστά:

«επιθετικοί»: $\frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,20$ ή 20%. Έτσι λέμε ότι «το 20% των παικτών της εθνικής

ομάδας είναι επιθετικοί» ή ότι «η τιμή επιθετικός έχει σχετική συχνότητα 0,20 ή 20%»

ΓΕΝΙΚΑ: Ο λόγος της συχνότητας μιας τιμής προς το πλήθος των ατόμων που εξετάζουμε, ονομάζεται της τιμής αυτής.

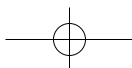
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές της μεταβλητής «θέση στην οποία αγωνίζεται ένας ποδοσφαιριστής της εθνικής ομάδας», τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των τιμών αυτών:

Τιμές	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή κλάσματος)	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή δεκαδικού)	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή ποσοστού)
τερματοφύλακας	2
αμυντικός	6
μέσος	8
επιθετικός	4	$\frac{4}{20}$	0,20	20%
Σύνολο	20

Ο αθλητικογράφος θέλει τώρα να παρουσιάσει τα αποτελέσματα της έρευνας, στην εφημερίδα του. Ξέρει όμως ότι οι πίνακες και τα νούμερα δεν είναι ελκυστικά στο κοινό ούτε κατανοητά από όλους τους αναγνώστες. Αποφασίζει λοιπόν να παρουσιάσει τα αποτελέσματα αυτά με διαγράμματα.

5. Κατασκευάζει πρώτα ένα «**εικονόγραμμα**»:

Δηλαδή τοποθετεί σε οριζόντιο άξονα τις τιμές «τερματοφύλακας», «αμυντικός», «μέσος» και «επιθετικός» και στη συνέχεια για να φανεί ότι η συχνότητα της τιμής «τερματοφύλακας» είναι 2, σχεδιάζει δύο παίκτες πάνω από την τιμή αυτή. Όμοια η τιμή «αμυντικός» έχει συχνότητα 6, οπότε σχεδιάζει 6 παίκτες πάνω από την τιμή αυτή.



Μπορείτε να γεμίσετε το παρακάτω διάγραμμα με κατάλληλο αριθμό παικτών ώστε να φαίνονται οι συχνότητες των τιμών «μέσος» και «επιθετικός»;

ΓΕΝΙΚΑ: Στα εικονογράμματα χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές παρουσιάζεται αυτό στην έρευνά μας.

6. Στη συνέχεια κατασκευάζει ένα «**ραβδόγραμμα συχνότητων**»:

Τοποθετεί σε οριζόντιο άξονα τις τιμές «τερματοφύλακας», «αμυντικός», «μέσος» και «επιθετικός» και στον κάθετο άξονα τις συχνότητες. Για να φανεί ότι η συχνότητα της τιμής «τερματοφύλακας» είναι 2, σχεδιάζει ένα ορθογώνιο πάνω από την τιμή αυτή. Ομοίως η τιμή «αμυντικός» έχει συχνότητα 6, οπότε σχεδιάζει ορθογώνιο πάνω από την τιμή αυτή.

Μπορείτε να σχεδιάσετε στο παρακάτω διάγραμμα κατάλληλα ορθογώνια ώστε να φαίνονται οι συχνότητες των τιμών «μέσος» και «επιθετικός»;

ΓΕΝΙΚΑ: Στα ραβδογράμματα χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε πόσες φορές παρουσιάζεται μια τιμή στην έρευνά μας. Το ύψος του κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής.

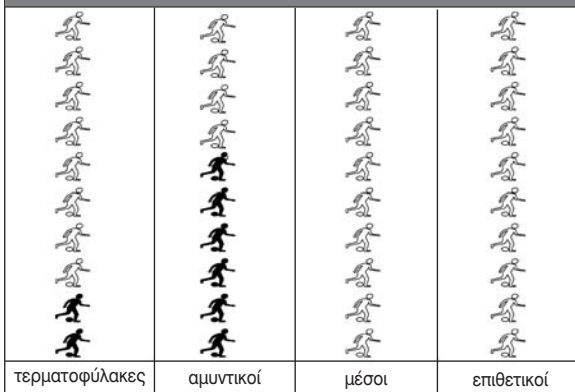
7. Στη συνέχεια κατασκευάζει ένα «**κυκλικό διάγραμμα**»:
- Χωρίζει ένα κυκλικό δίσκο σε κυκλικούς τομείς, ανάλογα με τις συχνότητες των τιμών «τερματοφύλακας», «αμυντικός», «μέσος» και «επιθετικός».

Πώς όμως πρέπει να υπολογιστούν οι επίκεντρες γωνίες του κάθε κυκλικού τομέα;

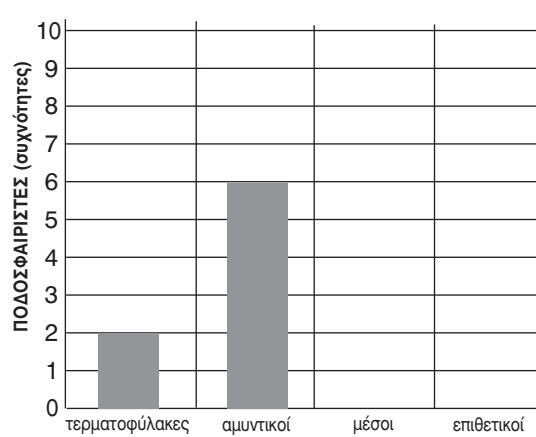
Για τη γωνία θ_1 , που αντιστοιχεί στην τιμή «τερματοφύλακας» ο αθλητικογράφος μας σκέφτηκε ως εξής:

Αφού υπάρχουν συνολικά 20 ποδοσφαιριστές και ο κυκλικός δίσκος έχει 360° , θα πρέπει τα 20 άτομα να αντιστοιχούν στις 360° . Επομένως τα 2 άτομα (που είναι τερματοφύλακες) θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μια γωνία θ_1 τέτοια ώστε:

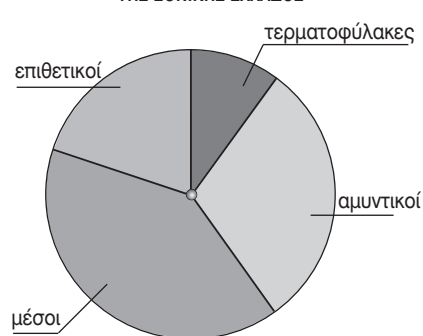
ΘΕΣΗ ΠΟΥ ΑΓΩΝΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΕΘΝΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

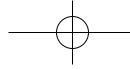


ΘΕΣΗ ΠΟΥ ΑΓΩΝΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΕΘΝΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ



ΘΕΣΗ ΠΟΥ ΑΓΩΝΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΙΣΤΕΣ ΤΗΣ ΕΘΝΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ





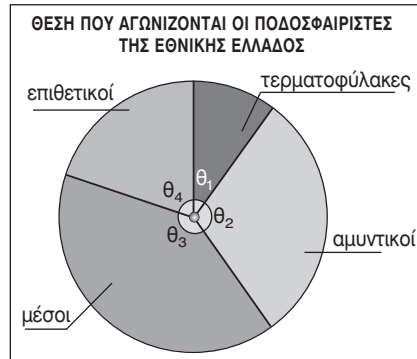
$$\theta_1 = \frac{2}{20} \cdot 360^\circ = \frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

Να υπολογίσετε τις γωνίες που αντιστοιχούν στις άλλες τρεις τιμές της μεταβλητής:

$$\theta_2 = \frac{\dots}{20} \cdot 360^\circ = \dots$$

$$\theta_3 = \dots$$

$$\theta_4 = \dots$$



ΓΕΝΙΚΑ: Στα κυκλικά διαγράμματα χωρίζουμε ένα κυκλικό δίσκο σε κυκλικούς τομείς Η επίκεντρη γωνία κάθε κυκλικού τομέα είναι ανάλογη με τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής, και υπολογίζεται ως εξής:

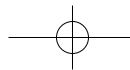
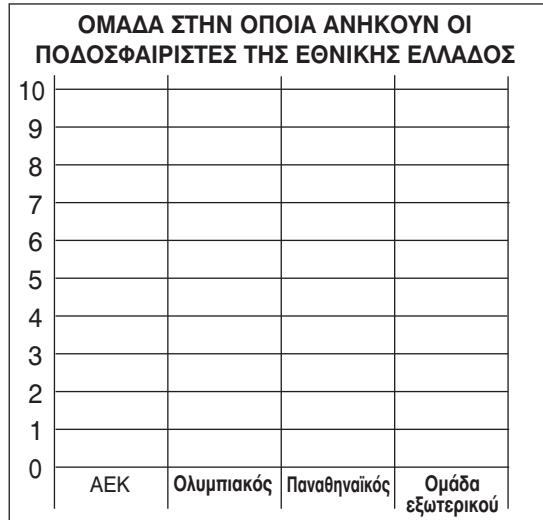
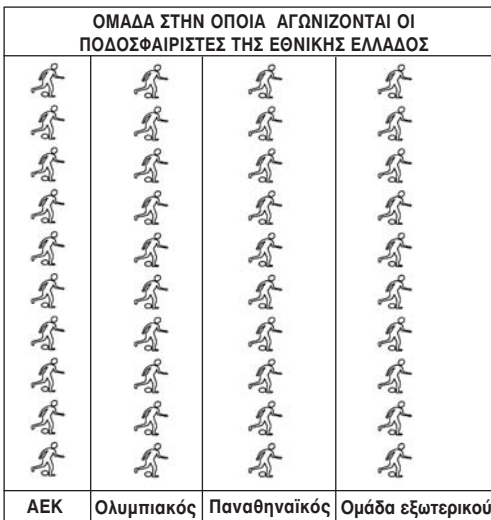
$$\theta = \frac{\dots}{\dots} \cdot \dots$$

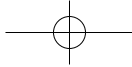
8. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω στοιχεία που αφορούν τους ποδοσφαιριστές της εθνικής ομάδας ποδοσφαίρου του 2004, ως προς την ομάδα στην οποία ανήκουν (τον Αύγουστο 2004).

ΤΙΤΛΟΣ:

Τιμές	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή κλάσματος)	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή δεκαδικού)	Σχετικές Συχνότητες (σε μορφή ποσοστού)
ΑΕΚ				
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ				
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ				
ΟΜΑΔΑ ΕΞΩΤ.				
Σύνολο				

9. Στο παρακάτω διάγραμμα να μαυρίσετε κατάλληλο αριθμό παικτών σε κάθε στήλη ώστε να σχηματιστεί ένα εικονόγραμμα. Επίσης να συμπληρώσετε το ραβδόγραμμα



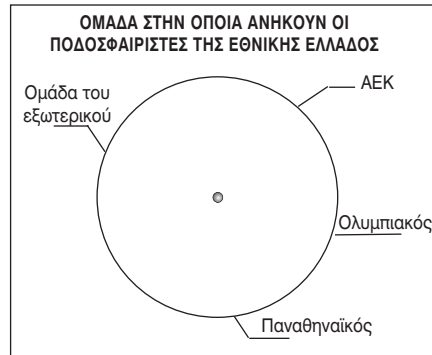


56

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 4ο - Περιγραφική Στατιστική

10. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να σχεδιάσετε το κυκλικό διάγραμμα:

Τιμές	Συχνότητες	Επίκεντρες γωνίες
ΑΕΚ		
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ		
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ		
ΟΜΑΔΑ ΕΞΩΤΕΡ.		
Σύνολο		



Παρατήρηση: Με τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα ο καθηγητής μπορεί να προετοιμάσει ανάλογο σχέδιο μαθήματος στην ενότητα «Μέση τιμή - Διάμεσος» με τις ηλικίες, τα βάρη και τα ύψη των αθλητών της εθνικής ομάδας.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Ενότητα: Ομαδοποίηση παρατηρήσεων. – Εύρεση μέσης τιμής ομαδοποιημένων παρατηρήσεων.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαδικασία ομαδοποίησης στατιστικών δεδομένων καθορίζοντας το πλάτος των κλάσεων και να μπορούν να υπολογίσουν τη μέση τιμή ομαδοποιημένων παρατηρήσεων.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

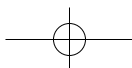
Οι μετρήσεις για το ύψος σε cm, 40 παιδιών αμέσως μετά τη συμπλήρωση του 18ου μήνα της ζωής τους είναι:

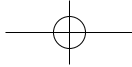
45	58	55	51	52	52	59	55	57	49	61	66	64	62	63	63	68	64	65	61
76	83	79	77	78	78	84	81	82	77	68	75	72	70	70	70	75	73	73	69

α) Να γίνει η διαλογή των παρατηρήσεων και να συμπληρωθούν οι επόμενοι πίνακες.

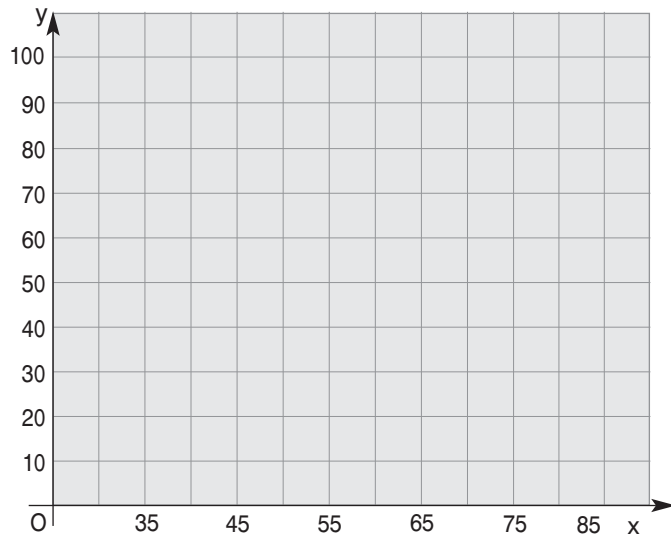
Κλάσεις Ύψος παιδιών	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα %
45 – 55			
55 – 65			
65 – 75			
75 – 85			
Σύνολο			

Κλάσεις Ύψος παιδιών	Κέντρο Κλάσης	Συχνότητα	(Κέντρο κλάσης) · Συχνότητα
45 – 55			
55 – 65			
65 – 75			
75 – 85			
Σύνολο			





- β) Από το δεύτερο πίνακα να βρεθεί το μέσο ύψος των παιδιών.
- γ) Να συμπληρώσετε το διπλανό ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

4.1

ΑΣΚΗΣΗ 6

Το σύνολο των ερωτηθέντων είναι $360 + 280 + 160 = 800$ άτομα.

Το ποσοστό που υποστηρίζει τον υποψήφιο Α είναι $\frac{360}{800} = 0,45$ ή 45%.

Το ποσοστό που υποστηρίζει τον υποψήφιο Β είναι $\frac{280}{800} = 0,35$ ή 35%.

Το ποσοστό που υποστηρίζει τον υποψήφιο Γ είναι $\frac{160}{800} = 0,20$ ή 20%.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Το σύνολο των μαθητών του σχολείου είναι $120 + 180 = 300$.

α) Το ποσοστό των κοριτσιών είναι $\frac{180}{300} = 0,60$ ή 60%.

β) Το ποσοστό των μαθητών της Β' Γυμνασίου είναι $\frac{90}{300} = 0,30$ ή 30%.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ο πληθυσμός της έρευνας είναι οι οπαδοί όλων των ομάδων του ποδοσφαίρου ενώ το δείγμα είναι τα 1000 άτομα του Πειραιά που ρωτήθηκαν. Το δείγμα δεν είναι αξιόπιστο γιατί η έρευνα έγινε σε μία μόνο περιοχή και η πλειοψηφία των οπαδών υποστηρίζει τις τοπικές ομάδες.

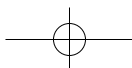
4.2

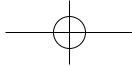
ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε τύπο είναι:

$$A: \frac{10}{100} \cdot 360^\circ = 36^\circ, \quad B: \frac{30}{100} \cdot 360^\circ = 108^\circ,$$

$$Γ: \frac{40}{100} \cdot 360^\circ = 144^\circ, \quad Δ: \frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$





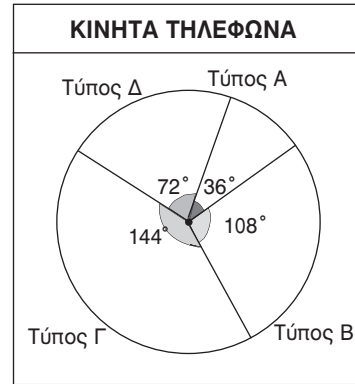
β) Στην αποθήκη υπάρχουν:

$$\frac{10}{100} \cdot 400 = 40 \text{ κινητά τηλέφωνα τύπου Α}$$

$$\frac{30}{100} \cdot 400 = 120 \text{ κινητά τηλέφωνα τύπου Β}$$

$$\frac{40}{100} \cdot 400 = 160 \text{ κινητά τηλέφωνα τύπου Γ}$$

$$\frac{20}{100} \cdot 400 = 80 \text{ κινητά τηλέφωνα τύπου Δ.}$$



4.5

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Ο μέσος όρος του μαθητή Α είναι:

$$\bar{x}_A = \frac{18+17+16+19+20+16+17+19+18+18+19+18+19+17}{14} \quad \text{ή} \quad \bar{x}_A = 17,9$$

ενώ του μαθητή Β είναι:

$$\bar{x}_B = \frac{19+19+18+18+19+20+18+17+19+19+18+19+18+20}{14} \quad \text{ή} \quad \bar{x}_B = 18,6$$

β) Ο μαθητής Β έχει καλύτερη επίδοση γιατί έχει υψηλότερο μέσο όρο στη βαθμολογία του.

γ) Γράφουμε τις βαθμολογίες των δύο μαθητών από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.
Α μαθητής:

16 16 17 17 17 18 18 18 18 19 19 19 19 20

Β μαθητής:

17 18 18 18 18 18 19 19 19 19 19 19 20 20

Αφού οι παρατηρήσεις έχουν άρτιο πλήθος η κάθε διάμεσος θα είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\text{Συνεπώς έχουμε: } \delta_A = \frac{18 + 18}{2} \quad \text{ή} \quad \delta_A = 18 \quad \text{και} \quad \delta_B = \frac{19 + 19}{2} \quad \text{ή} \quad \delta_B = 19.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Το μέσος ύψος θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{192+197+197+198+198+200+200+201+201+204+205+206}{12} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = 199,9 \text{ cm.}$$

β) Οι παρατηρήσεις είναι σε αύξουσα σειρά και έχουν άρτιο πλήθος. Άρα η διάμεσος θα

$$\text{είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων: } \delta = \frac{200 + 200}{2} = 200.$$

γ) Μετά την αντικατάσταση του παίκτη ύψους 192 cm από παίκτη ύψους 200 cm, ο νέος μέσος όρος των παρατηρήσεων θα είναι:

$$\bar{x}' = \frac{197+197+198+198+200+200+200+201+201+204+205+206}{12} \quad \text{ή} \quad \bar{x}' = 200,58 \text{ cm.}$$

B' ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα

Ενδεικτικός προγραμματισμός 1ου Κεφαλαίου

1.1	Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	2 ώρες
1.2	Μονάδες μέτρησης επιφανειών	3 ώρες
1.3	Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	6 ώρες
1.4	Πυθαγόρειο θεώρημα	3 ώρες
ΣΥΝΟΛΟ		14 ώρες

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την έννοια του εμβαδού επίπεδης επιφάνειας.
- Μία ώρα για εξάσκηση σε προβλήματα όπου τονίζεται ότι το εμβαδόν εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

2. Διδακτικοί Στόχοι

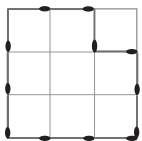
- Οι μαθητές επιδιώκεται να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού και ότι αυτό εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

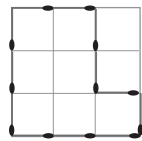
- Η έννοια του εμβαδού προτείνεται να γίνει κατανοητή μέσα από τη σύγκριση με τη μονάδα μέτρησης.
- Η κατανόηση του υπολογισμού εμβαδών αξίζει να επιτευχθεί από το χωρισμό ή τη συμπλήρωση επιφανειών που αναδεικνύουν τη Γεωμετρία. Οι αλγεβρικές πράξεις καλό είναι να αποφεύγονται όσο γίνεται περισσότερο.

Για διασκέδαση

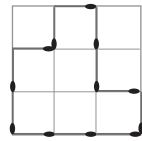
Απάντηση:



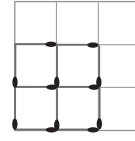
Εμβαδόν 8 τετράγωνα



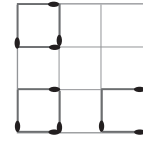
Εμβαδόν 7 τετράγωνα



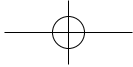
Εμβαδόν 6 τετράγωνα



Εμβαδόν 4 τετράγωνα



Εμβαδόν 3 τετράγωνα



60

Μέρος Β' - Κεφάλαιο 1ο - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα

1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τις μονάδες μέτρησης εμβαδού.
- Δύο ώρες για εξάσκηση στις μετατροπές των μονάδων μέτρησης εμβαδού.

2. Διδακτικοί Στόχοι

- Οι μαθητές επιδιώκεται να εξοικειωθούν με τις μονάδες μέτρησης εμβαδού και να μπορούν να μετατρέπουν μονάδες από μικρότερες σε μεγαλύτερες και αντίστροφα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η εξάσκηση των μαθητών στις μετατροπές των μονάδων μέτρησης είναι επιθυμητό να συνδυάζεται και με τα γεωμετρικά τους ανάλογα.

1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 6 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για το εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου και ασκήσεις.
- Μία ώρα για το εμβαδόν παραλληλογράμμου, ορθογωνίου τριγώνου και τυχαίου τριγώνου.
- Δύο ώρες για εφαρμογές – ασκήσεις πάνω στα εμβαδά παραλληλογράμμου και τριγώνου.
- Μία ώρα για το εμβαδόν τραπεζίου και ασκήσεις.
- Μία ώρα για επαναληπτικά θέματα στα εμβαδά.

2. Διδακτικοί Στόχοι

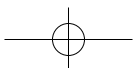
Οι μαθητές επιδιώκεται:

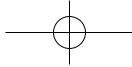
- να γνωρίζουν τους τύπους υπολογισμού εμβαδών επίπεδων σχημάτων,
- να μπορούν να αποδείξουν τους τύπους των εμβαδών συνδέοντάς τους με την κατάλληλη σειρά,
- να μπορούν να εφαρμόζουν συνδυαστικά τους τύπους σε αντίστοιχα προβλήματα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η σειρά υπολογισμού των εμβαδών επίπεδων σχημάτων έχει ως εξής:

- Αρχικά, δεχόμαστε «αξιωματικά» το εμβαδόν τετραγώνου.
- Το εμβαδόν ορθογωνίου προκύπτει με σύγκριση – διαμέριση σε τετραγώνια. Για διδακτικούς λόγους «αποκρύπτεται» η περίπτωση όπου ο λόγος δεν είναι φυσικός αριθμός.
- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας «ισότητα τριγώνων», ουσιαστικά «κόβοντας» ένα τρίγωνο από τα αριστερά και «προσθέτοντας» το στα δεξιά.
- Ο διαμερισμός ενός ορθογωνίου από τη διαγώνιο (ή αλλιώς ο «διπλασιασμός» ενός ορθογωνίου τριγώνου) δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.

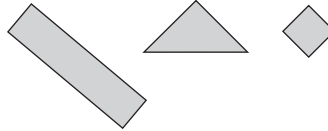




- Ο διαμερισμός ενός παραλληλογράμμου από τη διαγώνίό του (ή αλλιώς ο «διπλασιασμός» ενός τυχαίου τριγώνου) δίνει το εμβαδόν ενός τυχαίου τριγώνου.
- Τέλος, ο «διπλασιασμός» ενός τραπεζίου, έτσι ώστε να σχηματιστεί παραλληλόγραμμο με το ίδιο ύψος και βάση το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου, δίνει το εμβαδόν του τραπεζίου.

➤ **Για διασκέδαση** **Απάντηση:**

ορθογώνιο 400 cm^2
ορθογώνιο τρίγωνο 200 cm^2
τετράγωνο 100 cm^2



1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος και την γεωμετρική του ερμηνεία.
- Μια ώρα για το αντίστροφο του Πυθαγόρειου και επίλυση ασκήσεων.
- Μία ώρα για προβλήματα και εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

2. Διδακτικοί Στόχοι

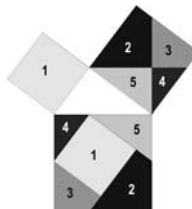
Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του,
- να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος,
- να ελέγχουν αν ένα τρίγωνο με γνωστές πλευρές είναι ορθογώνιο.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει την ευκαιρία να γνωρίσουν οι μαθητές τη στενή συσχέτιση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία. Για το λόγο αυτό, προτείνεται ο διδάσκων να επιμείνει καταρχάς στη γεωμετρική «ανακάλυψη» και κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (με τη βοήθεια του παζλ της § 1.4 ή αν υπάρχει η δυνατότητα με τη βοήθεια κάποιας διαδραστικής δραστηριότητας στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου). Στη συνέχεια να ενθαρρύνει τους μαθητές του να μετατρέψουν τη σχέση των εμβαδών σε αλγεβρική σχέση μεταξύ των πλευρών.
- Η ιστορική διάσταση του Πυθαγόρειου θεωρήματος θεωρείται, επίσης, πολύ ενδιαφέρουσα και προτείνεται να ανατεθεί ως δραστηριότητα σε ομάδες μαθητών η εύρεση στοιχείων στο διαδίκτυο για τις προσπάθειες των Αιγυπτίων.
- Η εισαγωγή του Πυθαγόρειου θεωρήματος, μετά την έννοια του εμβαδού, δίνει τη δυνατότητα της ανάπτυξης του θεωρήματος μέσα στο σωστό μαθηματικό του πλαίσιο. Ωστόσο, θα πρέπει να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα με ρητούς αριθμούς, αφού θα χρησιμοποιηθεί αργότερα (Μέρος Α' – Κεφάλαιο 2^ο) για να εισάγουμε τους άρρητους αριθμούς.

➤ **Για διασκέδαση** **Απάντηση:**



► Δικτυακοί τόποι για την κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος:

<http://www.cut-the-knot.org/geometry>

<http://www.de.sch.gr/~dkastani/mlspytha/pythaap1let.html>

<http://thejuniverse.org/Mathdesign/widgets/Pythagoras>

<http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html>

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_164_g_3_t_3.html?open=instructions

<http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html>

<http://www.e-yliko.sch.gr/mathyliko/pythago.htm>

<http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html>

<http://sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/V001N01/UBCExamples/Pythagoras/pythagoras.html>

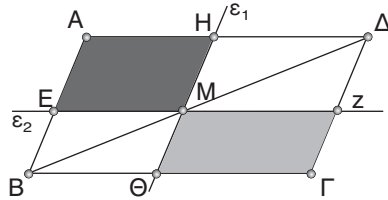
<http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/java/html/pythagorasdissection.html>

<http://jwilson.coe.edu/emt669/Student.Folders/Morris.Stephanie/EMT.669/Essay.1/Pythagorean.html>

http://www.jaconline.com.au/mathsqwestnsw/mq8nsw/investigations/13_pythag_simfigs.pdf

Δραστηριότητες

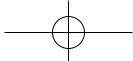
1. Έστω $ABΓΔ$ ένα παραλληλόγραμμο και M ένα σημείο της διαγωνίου του $ΒΔ$. Από το M φέρνουμε δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 παράλληλες στις πλευρές AB και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των παραλληλογράμμων $AHME$ και $ΓΘΜΖ$.



2. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλουν να βάψουν το θεατράκι του σχολείου τους. Ο Διευθυντής ζήτησε από τους μαθητές να μετρήσουν εσωτερικά το εμβαδόν των τοίχων της αίθουσάς τους, να ρωτήσουν και να μάθουν πόσο κοστίζει το κιλό η μπογιά, πόσα τετραγωνικά μέτρα καλύπτει κάθε κιλό μπογιάς και ποιο είναι το κόστος της μπογιάς για να βαφτεί το θεατράκι. Κάντε τη μέτρηση αυτή και στο δικό σας σχολείο.
3. Ένας εργολάβος οικοδομών ανέλαβε να κτίσει τρία εφαπτόμενα κτίρια σ' ένα τριγωνικό οικόπεδο. Για την καλύτερη αξιοποίηση του χώρου, πρότεινε να χωριστεί το οικόπεδο σε τρία τριγωνικά κομμάτια με ίσο εμβαδόν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
4. Σε μια βιοτεχνία ρούχων θέλουν να φτιάξουν 50 ζώνες με διαστάσεις $80\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. Υπάρχουν πολλά τεμάχια υφάσματος που έχουν σταθερό πλάτος 140 cm και μήκος 2 m .
- α) Πόσο ύφασμα θα χρειαστούμε; β) Πόσο ύφασμα θα πετάξουμε;

Επαναληπτικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

1. Σ' ένα τραπέζιο η μία βάση του είναι διπλάσια της άλλης. Αν το ύψος του τραπέζιου είναι 8 cm και έχει εμβαδόν 60 cm^2 , να υπολογίσετε τα μήκη των δύο βάσεων του παραπάνω τραπέζιου.
2. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των βάσεων ενός τραπέζιου το χωρίζει σε δύο τραπέζια με ίσα εμβαδά.
3. Σε τραπέζιο $ABΓΔ$ η βάση $ΓΔ$ είναι διπλάσια από την AB . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΓ$ έχει εμβαδόν ίσο με τα $2/3$ του εμβαδού του τραπέζιου.
4. Σ' ένα τραπέζιο η περιμετρός του είναι 36 cm και το εμβαδόν του είναι 55 cm^2 . Αν οι μη παράλληλες πλευρές του έχουν μήκος 6 και 8 cm , να βρείτε το ύψος του.

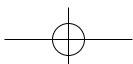


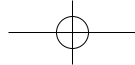
- Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$ και οι διαγωνίες του $A\Gamma$, $B\Delta$ τέμνονται στο O . Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων: α) $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ β) $AO\Delta$ και $BO\Gamma$.
- Αν η περίμετρος ορθογώνιου τριγώνου είναι 39 cm , η υποτείνουσά του 16 cm και η μια κάθετη πλευρά του κατά 3 cm μεγαλύτερη από την άλλη, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
- Στο ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ το ύψος του $A\Delta$ είναι 5 cm και το εμβαδόν του είναι 45 cm^2 . Να βρεθούν οι βάσεις του, αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.
- Σε ένα τρίγωνο τετραπλασιάζουμε τη βάση του και πενταπλασιάζουμε το αντίστοιχο ύψος. Τι συμβαίνει στο εμβαδόν;
- Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση $y = 0,75x$. Αν A είναι το σημείο της με τεταγμένη 3 , να βρείτε την τετμημένη του A και το μήκος OA .
- Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $3x$ και $4x$ και η διαγωνιάς του είναι 25 cm . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου, την περίμετρο και το εμβαδόν του.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 1

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 1 ώρα

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση		A	B	A
1.		Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:		
2.		9	12	6
		Το ύψος AH που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ είναι:		
		4	3	6
3.	Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 4\text{ cm}$ και $A\Gamma = 3\text{ cm}$	Το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι:		
4.		6	12	24
5.		Η υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι:		
		5	6	8
		Το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι:		
		3,6	2,4	4,8
6.		Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ είναι 6 cm^2 και Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:		
		6	9	12
7.		Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ είναι 3 cm^2 , τότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:		
		6	8	9





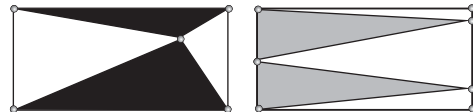
8.		Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΕΖΓΔ είναι:	24	12	6
9.		Το ύψος u ισούται με:	3	1,5	0,75
10.		Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 24 cm^2 . Το εμβαδόν του γκρι παραλληλογράμμου είναι:	8	6	4
11.		Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ είναι 32 cm^2 και το Λ είναι το μέσο της ΘΗ. Το εμβαδόν του γκρι τριγώνου είναι:	16	8	4
12.		Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 18 cm^2 . Τα Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ και τα ΑΚΝΕ, ΚΛΜΝ, ΛΖΓΜ είναι παραλληλόγραμμα. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος είναι:	9	6	12

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 2

Διάρκεια: 1 ώρα

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να συγκρίνετε τα εμβαδά των μαύρων και των γκρι τριγώνων, αν τα ορθογώνια του διπλανού σχήματος είναι ίσα.

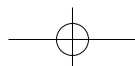


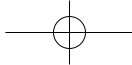
■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Ένα θερμοκήπιο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 52 m και πλάτος 10 m. Θέλουμε να βάλουμε λίπασμα και ξέρουμε ότι χρειάζονται 20 kg για κάθε 100 m^2 . Πόσα κιλά λίπασμα θα χρειαστούμε;

■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τις διάφορες τιμές των βάσεων, του ύψους και του εμβαδού τραπεζίων.





Βάση μικρή	Βάση μεγάλη	Ύψος	Εμβαδόν
4 cm	6 cm	3 cm
.....	7 cm	4 cm	24 cm ²
4 cm	6 cm	48 cm ²
6 cm	14 cm	120 cm ²

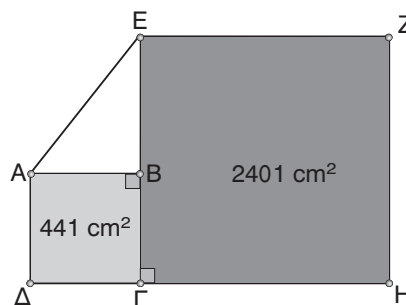
ΑΣΚΗΣΗ 4:

Μια αυλή έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 20 m και 10 m. Θέλουμε να τη στρώσουμε με τετραγωνικές πλάκες πλευράς 0,2 m και αξίας 2 € η καθεμία. Να υπολογίσετε:

- το εμβαδόν της αυλής.
- τον αριθμό των πλακών που θα χρειαστούν για το στρώσιμο και τα χρήματα που θα πληρώσουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΓ του διπλανού σχήματος έχουν εμβαδόν 441cm² και 2401m² αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ και το μήκος της ΑΕ.



Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του εμβαδού και ότι αυτό εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

- Η αυλή ενός σπιτιού έχει σχήμα ορθογωνίου και πρόκειται να στρωθεί με τριγωνικά πλακάκια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

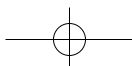
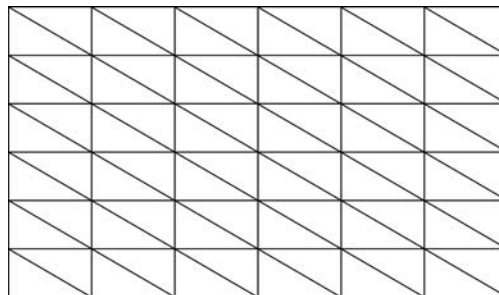
Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν;.....

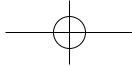
Λέμε ότι το εμβαδόν της αυλής με μονάδα μέτρησης το τριγωνικό πλακάκι είναι:.....

.....

Ποιο θα ήταν το εμβαδόν της αυλής, αν χρησιμοποιούσαμε ως μονάδα μέτρησης ορθογώνια πλακάκια με πλευρές τις κάθετες πλευρές των παραπάνω τριγώνων;


.....








66


Μέρος Β' - Κεφάλαιο 1ο - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

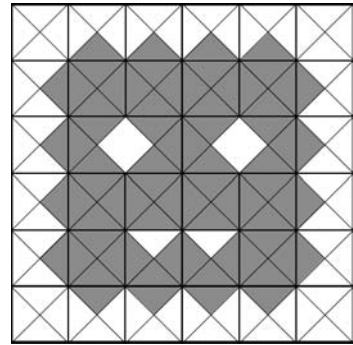
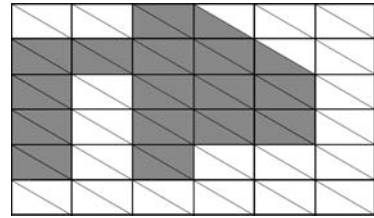
2. α) Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο  ;

β) Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος με μονάδα μέτρησης το ορθογώνιο  ;

3. α) Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο  ;

β) Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο  ;

γ) Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο  ;



■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Ενότητα: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.

Στόχοι: Να «ανακαλύψουν» οι μαθητές τον τρόπο υπολογισμού των εμβαδών τετραγώνου, ορθογωνίου, ορθογωνίου τριγώνου, παραλληλογράμμου, τυχαίου τριγώνου και τραπεζίου.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική).

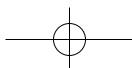
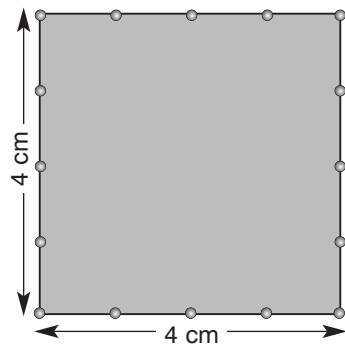
• Φύλλο εργασίας •

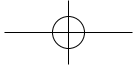
1. Στο διπλανό τετράγωνο κάθε πλευρά έχει μήκος 4 cm. Οι τελείες πάνω στις πλευρές του ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm.

α) Να χωρίσετε το τετράγωνο σε τετραγωνάκια πλευράς 1 cm φέρνοντας με το χάρακα ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του τετραγώνου. Πόσα τετραγωνάκια σχηματίζονται;

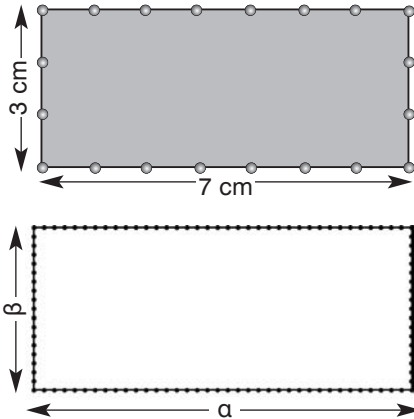
β) Επομένως, το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς 4 cm, είναι cm².

γ) Γενικά, το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α, θα είναι

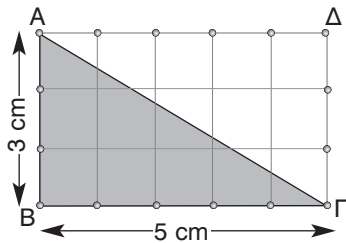




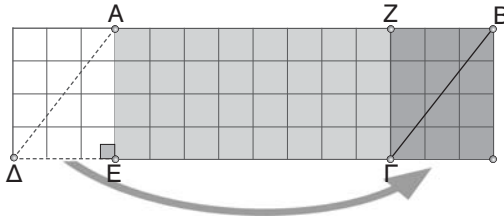
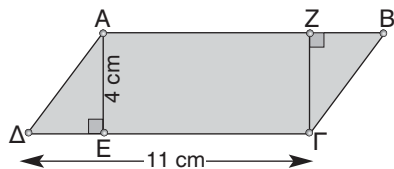
2. Στο διπλανό ορθογώνιο οι πλευρές έχουν μήκος 3 cm και 7 cm. Οι τελείες πάνω στις πλευρές του ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm.
- Να χωρίσετε το ορθογώνιο σε τετραγωνάκια πλευράς 1 cm φέρνοντας με το χάρακα ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του ορθογώνιου. Πόσα τετραγωνάκια σχηματίζονται;
 - Επομένως, το εμβαδόν του ορθογώνιου με πλευρές 3 cm και 7 cm είναι cm^2 .
 - Γενικά, το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με πλευρές a και β , θα είναι



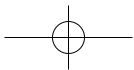
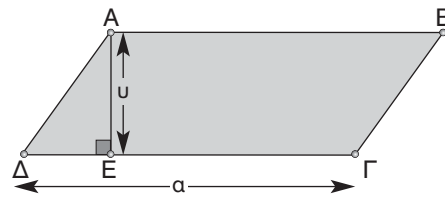
3. Στο διπλανό ορθογώνιο οι πλευρές έχουν μήκος 3 cm και 5 cm και η διαγώνιος ΑΓ χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Οι τελείες πάνω στις πλευρές του ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm.
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου ΑΒΓΔ είναι cm^2 .
 - Επομένως το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ είναι cm^2 .
 - Γενικά, το εμβαδόν ενός ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές a και β , είναι cm^2 .



4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο του οποίου η μια πλευρά έχει μήκος $AB = \Gamma\Delta = 11 \text{ cm}$ και το αντίστοιχο ύψος έχει μήκος $AE = \Gamma Z = 4 \text{ cm}$.
- Το εμβαδόν των τριγώνων ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι cm^2 .
 - Αν κόψουμε με ψαλίδι το τρίγωνο ΑΔΕ και το τοποθετήσουμε έτσι ώστε η πλευρά ΑΔ να συμπίσει με την πλευρά ΒΓ, τότε θα σχηματιστεί με μήκη πλευρών cm και cm και εμβαδόν cm^2 .



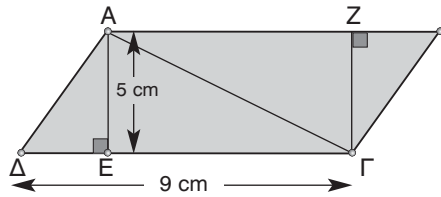
- Το εμβαδόν του αρχικού πλάγιου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το εμβαδόν του και επομένως είναι ίσο με cm^2 .
- Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με μήκος πλευράς a και αντίστοιχο ύψος u είναι



68

Μέρος Β' - Κεφάλαιο 1ο - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

5. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο η πλευρά ΔΓ έχει μήκος 9 cm, το αντίστοιχο ύψος έχει μήκος 5 cm και η διαγώνιος ΑΓ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα.

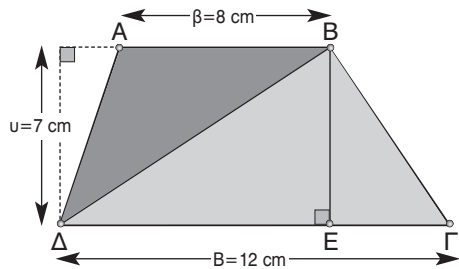


α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι: cm².

β) Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι cm².

γ) Γενικά, το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκος πλευράς α και αντίστοιχο ύψος υ, θα είναι

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ. Το μήκος της μικρής βάσης του είναι β = 8 cm, το μήκος της μεγάλης βάσης του είναι Β = 12 cm, το αντίστοιχο ύψος έχει μήκος υ = 7 cm και η διαγώνιος ΒΔ χωρίζει το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα.

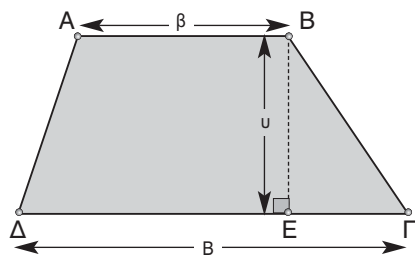


α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι cm².

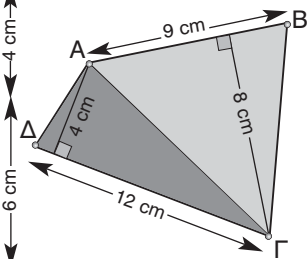
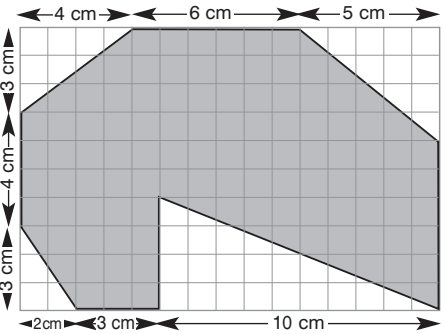
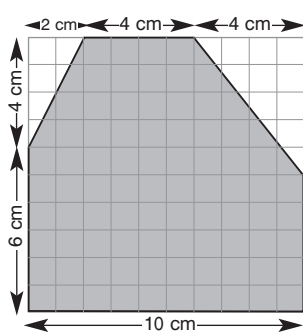
β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ είναι cm².

γ) Επομένως, το εμβαδόν του τραpezίου ΑΒΓΔ είναι cm².

δ) Γενικά, το εμβαδόν ενός τραpezίου με βάσεις που έχουν μήκη β και Β και αντίστοιχο ύψος υ, θα είναι



7. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:



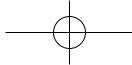
.....

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:

Ενότητα: Πυθαγόρειο θεώρημα.

Στόχοι: Να «εξοικειωθούν» οι μαθητές με το Πυθαγόρειο θεώρημα και με προβλήματα που σχετίζονται με αυτό.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).



• Φύλλο εργασίας •

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3 cm, 4 cm, 5 cm.

α) Κατασκευάζουμε στο εξωτερικό μέρος του τριγώνου τετράγωνα με πλευρές τις πλευρές του.

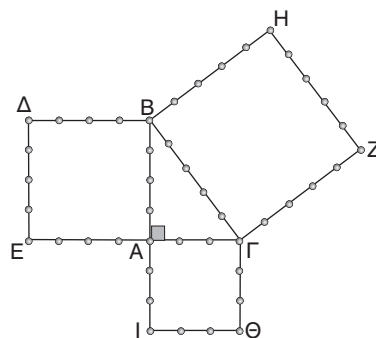
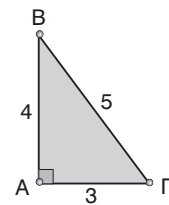
β) Οι τελείες χωρίζουν τις πλευρές του τετραγώνου σε ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm. Να χωρίσετε τα τετράγωνα ABDE, AΓΘΙ, και ΒΓΖΗ σε τετραγωνάκια πλευράς 1 cm.

γ) Το ABDE χωρίζεται σε τετραγωνάκια και έχει εμβαδόν cm².

Το AΓΘΙ χωρίζεται σε τετραγωνάκια και έχει εμβαδόν cm².

Το ΒΓΖΗ χωρίζεται σε τετραγωνάκια και έχει εμβαδόν cm².

δ) Παρατηρούμε ότι (ABDE) + (AΓΘΙ) = και επομένως $AB^2 + AΓ^2 = \dots\dots\dots$



ΓΕΝΙΚΑ: Σε κάθε τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινούσας είναι ίσο με

2. Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Αν $a = 15$ και $\beta = 4$, τότε $\gamma^2 = \dots\dots\dots$ ή $\gamma^2 = \dots\dots\dots$ ή $\gamma = \dots\dots\dots$

Αν $a = 10$ και $\gamma = 6$, τότε $\beta^2 = \dots\dots\dots$ ή $\beta^2 = \dots\dots\dots$ ή $\beta = \dots\dots\dots$

Αν $\beta = 12$ και $\gamma = 7$, τότε $a^2 = \dots\dots\dots$ ή $a^2 = \dots\dots\dots$ ή $a = \dots\dots\dots$

3. Ένα τρίγωνο ABΓ έχει $a = \frac{10}{3}$ cm, $\beta = \frac{8}{3}$ cm και $\gamma = 2$ cm.

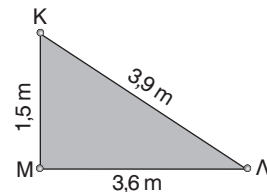
Είναι $a^2 = \dots\dots\dots$ $\beta^2 = \dots\dots\dots$ $\gamma^2 = \dots\dots\dots$

οπότε $\beta^2 + \gamma^2 = \dots\dots\dots$

Παρατηρούμε ότι επομένως συμπεραίνουμε ότι η γωνία είναι ορθή.

ΓΕΝΙΚΑ: Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία

4. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο. Αν είναι ορθογώνιο, να προσδιορίσετε ποια γωνία του είναι ορθή.



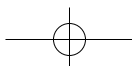
Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

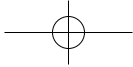
1.3

ΑΣΚΗΣΗ 6

Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι $E_{\text{τραπ.}} = \frac{B + \beta}{2} \cdot u = \frac{20 + 12}{2} \cdot 4$ ή $E_{\text{τραπ.}} = 64$ cm².

Αφού τα δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, τότε $E_{\text{τετραγ.}} = 64$ cm².





70

Μέρος Β' - Κεφάλαιο 1ο - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Τα τριγωνικά οικοπέδα που απομένουν έχουν ύψος u ίσο με το πλάτος του οικοπέδου, δηλαδή $u = 18$ m και η βάση τους β είναι ίση με το μήκος του οικοπέδου ελαττωμένο κατά x , δηλαδή $\beta = (30 - x)$ m. Άρα κάθε τρίγωνο έχει εμβαδόν

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot u = \frac{1}{2} 18 \cdot (30 - x).$$

β) Το εμβαδόν του δρόμου είναι $E_{\delta\rho.} = 18x$ και το εμβαδόν που απομένει στο οικόπεδο είναι ίσο με το εμβαδόν των δύο τριγώνων, δηλαδή $2E = 2 \cdot \frac{1}{2} 18(30 - x) = 18(30 - x)$.

$$\text{Πρέπει } E_{\delta\rho.} = \frac{1}{4} 2E \text{ ή } 18x = \frac{1}{4} 18(30 - x) \text{ ή } x = 6 \text{ m.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι $(ΑΒΔ) = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3$ ή $(ΑΒΔ) = 7,5 \text{ cm}^2$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ είναι $(ΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$ ή $(ΒΓΔ) = 15 \text{ cm}^2$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων, άρα $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) = 7,5 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2$ ή $(ΑΒΓΔ) = 22,5 \text{ cm}^2$.

1.4**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την ΑΔ είναι $E = ΑΔ^2$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 \text{ ή } 10^2 = ΑΔ^2 + 6^2 \text{ ή } ΑΔ^2 = 64 \text{ dm}^2.$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 64 \text{ dm}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Για να είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, θα πρέπει να ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πράγματι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $50^2 = 30^2 + 40^2$, που ισχύει.

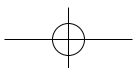
ΑΣΚΗΣΗ 9

Το Ε απέχει από την πόλη Β 17 m. Υπολογίζουμε την απόσταση ΒΔ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ: $ΒΔ^2 = ΒΕ^2 - ΔΕ^2 = 17^2 - 8^2$ ή $ΒΔ^2 = 225$.

Ομοίως, για την απόσταση ΒΑ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΑ:

$$ΒΑ^2 = ΒΓ^2 - ΓΑ^2 = 12^2 + 9^2 = 225.$$

Συνεπώς, $ΒΔ = ΒΑ = 15$ m και οι τοποθεσίες Δ και Α είναι πλησιέστερα στην πόλη Β.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Τριγωνομετρία – Διανύσματα

Ενδεικτικός προγραμματισμός 2ου Κεφαλαίου

2.1	Εφαπτομένη οξείας γωνίας	2 ώρες
2.2	Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	2 ώρες
2.3	Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	2 ώρες
2.4	Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	1 ώρα
2.5	Η έννοια του διανύσματος	1 ώρα
2.6	Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	2 ώρες
2.7	Ανάλυση διανύσματος σε κάθετες συνιστώσες	1 ώρα
ΣΥΝΟΛΟ		11 ώρες

2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας.
- Μία ώρα για εξάσκηση σε υπολογισμούς με εφαπτομένη, σε σχεδιασμό γωνίας με γνωστή εφαπτομένη και πρακτικά προβλήματα με υπολογισμούς αποστάσεων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να μπορούν να υπολογίζουν εφαπτομένες οξείων γωνιών με τον ορισμό και με τη χρήση του πίνακα εφαπτομένων,
- να μπορούν να χρησιμοποιούν την εφαπτομένη σε φυσικά ή πραγματικά προβλήματα,
- να μπορούν να σχεδιάζουν μία γωνία της οποίας δίνεται η εφαπτομένη.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η μελέτη της εφαπτομένης προτείνεται να ολοκληρωθεί με απλό και σχετικά σύντομο τρόπο. Ο υπολογισμός της θα γίνει αρχικά με τον πίνακα εφαπτομένων και μετά την παράγραφο 2.3 με τη χρήση υπολογιστή τσέπης.
- Η γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη μιας γωνίας με γνωστή εφαπτομένη προτείνεται να ανατεθεί ως δραστηριότητα στην τάξη.

2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό ημιτόνων και συνημιτόνων οξείας γωνίας και για τον υπολογισμό ημιτόνων και συνημιτόνων οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
- Μία ώρα για εξάσκηση στον υπολογισμό ημιτόνου και συνημιτόνου.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να μπορούν να υπολογίζουν το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο,
- να μπορούν να σχεδιάζουν μία γωνία της οποίας δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η Τριγωνομετρία αποτελεί μοναδική ευκαιρία για να προσφέρουμε τη δυνατότητα στους μαθητές να συσχετίσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με πραγματικές καταστάσεις. Είναι γενικά παραδεκτό ότι η αναφορά στις εφαρμογές των Μαθηματικών, διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών και προσφέρει ένα ισχυρό κίνητρο για την ενασχόληση με αυτά.
- Η εισαγωγή των τριγωνομετρικών αριθμών πρέπει να γίνει με απλό εποπτικό τρόπο. Για το λόγο αυτό, προτείνεται η συμμετοχή των μαθητών στις αρχικές δραστηριότητες των παραγράφων.

► Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο για τον Αστρολάβο

<http://www.etl.uom.gr/mr/index.php?mypage=antikythera>

<http://www.uh.edu/engines/epi1031.htm>

<http://www.grand-illusions.com/antikyth.htm>

<http://www.nordex.com/htmlpages/amazing.html>

2.3. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για μελέτη των μεταβολών ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης και τη χρήση υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό τους.
- Μία ώρα για εφαρμογές.

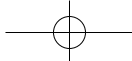
2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να μπορούν να υπολογίζουν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη με χρήση υπολογιστή τσέπης,
- να γνωρίζουν τις μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης οξείας γωνίας,
- να γνωρίζουν ότι δύο οξείες γωνίες με το ίδιο ημίτονο ή συνημίτονο ή με την ίδια εφαπτομένη είναι ίσες,
- να χρησιμοποιούν κατάλληλα το ημίτονο, το συνημίτονο ή την εφαπτομένη, για να υπολογίζουν αποστάσεις σε πραγματικά προβλήματα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η χρήση του υπολογιστή τσέπης πρέπει να είναι δημιουργική. Για παράδειγμα, οι μεταβολές των τριγωνομετρικών αριθμών μπορούν να γίνουν άμεσα κατανοητές με τους υπολογισμούς.



- Προτείνεται ο καθηγητής να διδάξει τους μαθητές να βρίσκουν κατά προσέγγιση μία γωνία, όταν είναι γνωστό το ημίτονο, το συνημίτονο ή η εφαπτομένη της, χρησιμοποιώντας είτε τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου είτε τα πλήκτρα SIN^{-1} , COS^{-1} , και TAN^{-1} ενός υπολογιστή τσέπης (σε μερικούς είναι INV SIN, INV COS και INV TAN).
- Ο υπολογισμός αποστάσεων σε πραγματικά προβλήματα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν τη χρησιμότητα της Τριγωνομετρίας και προτείνεται να γίνει αρχικά με απλά προβλήματα.

2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30° , 45° και 60° και επίλυση αντίστοιχων ασκήσεων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° και 60° ,
- να χρησιμοποιούν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη γνωστών γωνιών για να υπολογίζουν αποστάσεις σε πραγματικά προβλήματα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Είναι σημαντικό να γνωρίσουν οι μαθητές τις γεωμετρικές αποδείξεις των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30° , 45° και 60° .
- Αξίζει να τονίσουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να αντιμετωπίσουμε συνεχώς ασκήσεις με τις γωνίες 30° , 45° και 60° , οι οποίες δεν αποτελούν ξεχωριστή περίπτωση αλλά απλώς χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς από τους μαθηματικούς για την κατανόηση του λογισμού της Τριγωνομετρίας.

2.5. Η έννοια του διανύσματος

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την έννοια διανύσματος, τα στοιχεία του και την κατανόηση των ίσων και αντίθετων διανυσμάτων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν τη διαφορά μονόμετρων και διανυσματικών μεγεθών,
- να αποκτήσουν ευχέρεια με τα στοιχεία των διανυσμάτων,
- να κατανοήσουν την έννοια του μέτρου ενός διανύσματος,
- να γνωρίζουν τότε δύο διανύσματα είναι ίσα ή αντίθετα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η έννοια του διανύσματος προτείνεται να συνδεθεί με μεγέθη όπως η δύναμη και η ταχύτητα στα οποία εμπεριέχεται η έννοια της κατεύθυνσης, δηλαδή τα διανυσματικά μεγέθη και να τονιστούν οι διαφορές από τα μονόμετρα.

2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων.
- Μία ώρα για εξάσκηση στις πράξεις με διανύσματα.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να έχουν ευχέρεια στην πρόσθεση και την αφαίρεση διανυσμάτων και να χρησιμοποιούν και τις δύο μεθόδους πρόσθεσης (πολυγώνου, παραλληλογράμμου),
- να κατανοήσουν την έννοια του μηδενικού διανύσματος.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Στην παράγραφο αυτή κυρίαρχο ρόλο θα πρέπει να παίξει η εξάσκηση των μαθητών τόσο με τις πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση), όσο και με τη διασαφήνιση των εννοιών (μηδενικό διάνυσμα, μέτρο διανύσματος).

► Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο

<http://lyk-malion.ira.sch.gr/math/dianysmata.htm>

► Για διασκέδαση

Απαντήσεις:

1)

\vec{AO}	+		=	\vec{AB}
+		+		+
\vec{ON}	+		=	
=		=		=
	+	\vec{OL}	=	

\vec{AO}	+	\vec{OB}	=	\vec{AB}
+		+		+
\vec{ON}	+	\vec{BL}	=	\vec{BN}
=		=		=
\vec{AN}	+	\vec{OL}	=	\vec{AO}

- 2) α) Για τη διαδρομή $\vec{Z_2A_3}$ έχουμε: $\vec{Z_2A_3} = \vec{Z_2A_6} + \vec{A_6A_2} + \vec{A_2B_2} + \vec{B_2A_3}$ ή $\vec{Z_2A_3} = \vec{Z_2A_6} + \vec{A_6A_2} + \vec{A_2B_2} + \vec{B_2A_3}$ ή $\vec{Z_2A_3} = \vec{Z_2B_7} + \vec{B_7B_4} + \vec{B_4A_4} + \vec{A_4A_2} + \vec{A_2A_3}$
- β) Για τη διαδρομή $\vec{A_4A_3}$ έχουμε: $\vec{A_4A_3} = \vec{A_4A_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_3}$ ή $\vec{A_4A_3} = \vec{A_4A_6} + \vec{A_6A_2} + \vec{A_2A_3}$ ή $\vec{A_4A_3} = \vec{A_4A_2} + \vec{A_2A_6} + \vec{A_6A_2} + \vec{A_2A_3}$ ή $\vec{A_4A_3} = \vec{A_4A_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_3}$ ή $\vec{A_4A_3} = \vec{A_4A_6} + \vec{A_6A_2} + \vec{A_2A_3}$
- γ) Για τη διαδρομή $\vec{E_3A_7}$ έχουμε: $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3A_3} + \vec{A_3A_7}$ ή $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3B_4} + \vec{B_4B_7} + \vec{B_7A_6} + \vec{A_6A_7}$ ή $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3A_3} + \vec{A_3A_7}$ ή $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3A_3} + \vec{A_3A_7}$ ή $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3A_3} + \vec{A_3A_7}$ ή $\vec{E_3A_7} = \vec{E_3A_3} + \vec{A_3A_7}$
- Όμοια εργαζόμαστε για τις διαδρομές: $\vec{A_4A_3}$ και $\vec{A_6A_7}$.

2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες με αντίστοιχες ασκήσεις.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να μπορούν να αναλύουν ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες συνιστώσες,
- να χρησιμοποιούν την τριγωνομετρία για τον υπολογισμό των μέτρων των κάθετων συνιστωσών αν δίνεται το μέτρο του διανύσματος και η γωνία που σχηματίζει με μία από τις συνιστώσες.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η ανάλυση διανυσμάτων σε δύο κάθετες συνιστώσες δίνεται με το παράδειγμα του σεισμού, το οποίο προτείνεται να γίνει αναλυτικά.

► Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο:

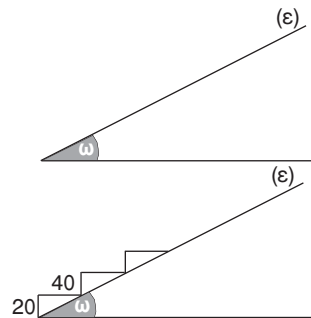
www.svnum.com/math www.alepho.clarku.edu www.id.mind.net

Δραστηριότητες

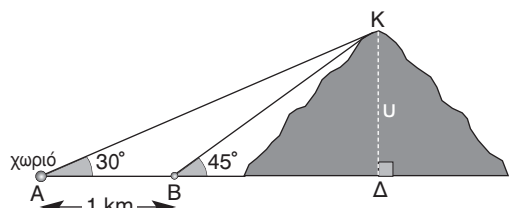
1. Για να ανεβούμε πιο εύκολα μια ανηφόρα (ε) χτίζουμε σκαλοπάτια τα οποία έχουν ύψος 20 cm και πλάτος 40 cm.

- α) Να βρεθεί η κλίση ω της ανηφόρας με το έδαφος.
- β) Αν η ανηφόρα έχει μήκος 15 cm, πόσα σκαλοπάτια πρέπει να φτιάξουμε για να την ανεβούμε;
- γ) Αν ανέβουμε 11 σκαλοπάτια, πόσο μήκος της ανηφόρας έχουμε διανύσει;

Δοκιμάστε να κατασκευάσετε τη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιώντας το λογισμικό Cabri Geometry.

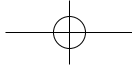


2. Κάποιοι εκδρομείς ξεκινούν από ένα χωριό και θέλουν να κάνουν ορειβασία στο απέναντι βουνό. Ξεκινώντας βλέπουν την κορυφή του βουνού με γωνία 30° , ενώ αφού περπάτησαν 1 km τη βλέπουν με γωνία 45° . Πόσο είναι το ύψος u του βουνού που θέλουν να ανέβουν;



Επαναληπτικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Στην προέκταση της AB θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε την σχέση των $\epsilon\phi\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$, $\epsilon\phi\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$. Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνία ω τέτοια ώστε $\epsilon\phi\omega = 5\epsilon\phi\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$;
2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 15$ cm, $B\Gamma = 20$ cm και φέρνουμε το ύψος του AD . Αν γνωρίζουμε ότι $B\Delta = 7$ cm, να υπολογίσετε:
 - α) τη γωνία \hat{B} , β) το ύψος AD , γ) τη γωνία $\hat{\Gamma}$, δ) τη γωνία $B\hat{A}\hat{\Delta}$, ε) τη γωνία $\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}$.



76

Μέρος Β' - Κεφάλαιο 2ο - Τριγωνομετρία - Διανύσματα

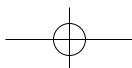
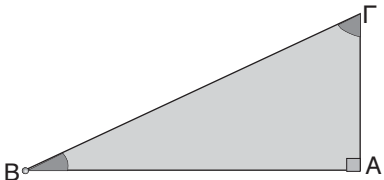
3. Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 3$ cm. Από ένα σημείο A εκτός του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη $AT = 4$ cm.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{T\hat{A}O}$ και $\widehat{T\hat{O}A}$.
 - Να βρείτε ένα σημείο B του κύκλου έτσι ώστε $\widehat{T\hat{O}B} = 60^\circ$.
4. Αν είναι $\omega = 45^\circ$ και $\phi = 60^\circ$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- $A = 2 \eta\mu\omega \sigma\upsilon\upsilon\phi - \sigma\upsilon\upsilon^2\omega + 2 \sigma\upsilon\upsilon\omega \eta\mu\phi$.
 - $B = (\eta\mu\phi + \sigma\upsilon\upsilon\omega)^2 - (\sigma\upsilon\upsilon\phi - \eta\mu\omega)^2$.
5. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:
- $A = \epsilon\phi^2 45^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi^2 60^\circ$.
 - $B = \frac{3}{4} \epsilon\phi^2 45^\circ + \epsilon\phi^2 60^\circ - \eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\upsilon\upsilon 60^\circ - \epsilon\phi^2 45^\circ$.
6. Σε ένα από τα πιο εντυπωσιακά παιχνίδια στη θάλασσα ένα ταχύπλοο έλκει ένα κολυμβητή δεμένο με αλεξίπτωτο με δύναμη μέτρου $|\vec{F}| = 1500$ N. Αν η γωνία που σχηματίζει το σκοινί με το οριζόντιο επίπεδο είναι 50° , να υπολογίσετε τις κάθετες συνιστώσες της δύναμης \vec{F} .
7. Ένα σπασμένο δέντρο σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο με το έδαφος. Το σπασμένο κομμάτι σχηματίζει με το έδαφος γωνία 39° , ενώ το άλλο κομμάτι είναι 1,60 m. Να βρείτε το ύψος που είχε αρχικά το δέντρο.
8. Δίνεται τρίγωνο $K\Lambda M$ με γωνίες $\widehat{K} = 37^\circ$ και $\widehat{M} = 53^\circ$.
- Τι είδους τρίγωνο είναι το $K\Lambda M$;
 - Γνωρίζοντας ότι $K\Lambda = 25$ m, να υπολογίσετε: i) την KM και ii) την ΛM .
9. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε την διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $MN = AM$.
Να αποδείξετε ότι: α) $\vec{AB} = \vec{\Gamma N}$ β) $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$ γ) $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2}$.
10. Σε μία σήραγγα ενός ορυχείου το βαγόνι μεταφοράς υλικού σύρεται σε ράγες που σχηματίζουν με το οριζόντιο έδαφος γωνία 48° . Το βαγόνι ζυγίζει 2000 N μαζί με τα ορुकτά με τα οποία είναι γεμάτο. Να βρείτε πόση δύναμη ασκεί το συρματόσκοινο στο βαγόνι για να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω.

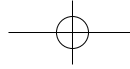
Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 1

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Με βάση το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

- Η είναι η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας \widehat{B} .
- Η είναι η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.
- Η $A\Gamma$ είναι η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας
- Η AB είναι η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας





ΑΣΚΗΣΗ 2:

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα συνδέστε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης (Α) με το αντίστοιχο λόγο της στήλης (Β).

στήλη (Α)	στήλη (Β)
$\eta\mu\hat{B}$	$\frac{\Delta B}{AB}$
$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$	$\frac{AB}{AG}$
$\eta\mu\phi$	$\frac{AD}{AG}$
$\eta\mu\omega$	$\frac{BG}{AD}$

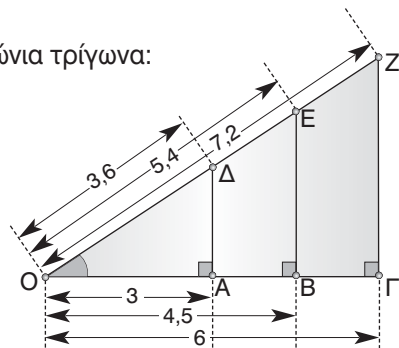
ΑΣΚΗΣΗ 3:

Η γωνία ω στο διπλανό σχήμα ανήκει σε τρία ορθογώνια τρίγωνα: στο, στο και στο

Θέλουμε να υπολογίσουμε το συνω.

- α) Σε ποιο από τα τρία τρίγωνα θα το υπολογίσετε;
- β) Πόσο είναι το συνω;
- γ) Αν επιλέγατε ένα άλλο τρίγωνο για να το υπολογίσετε, το συνω θα ήταν ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό που βρήκατε στο (β) ερώτημα;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

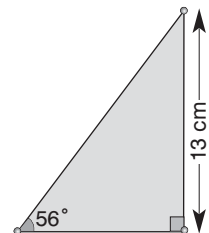


ΑΣΚΗΣΗ 4:

Στο διπλανό σχήμα η υποτεινούσα ισούται με:

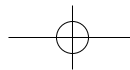
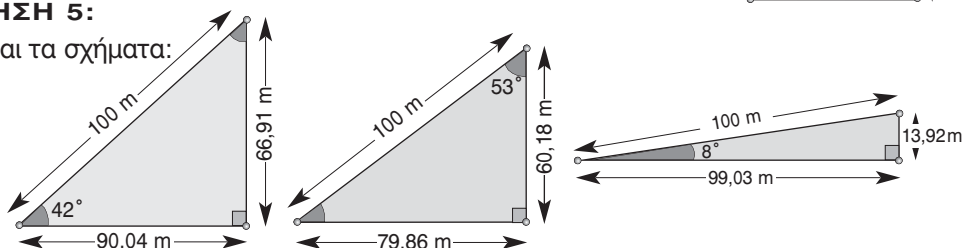
A: $13\sigma\upsilon\nu 56^\circ$, B: $13\eta\mu 56^\circ$, Γ: $\frac{13}{\sigma\upsilon\nu 56^\circ}$, Δ: $\frac{13}{\eta\mu 56^\circ}$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΗ 5:

Δίνονται τα σχήματα:



78

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

γωνία θ	42°	53°	8°	48°	37°	82°
συν θ						
ημ θ						

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 2

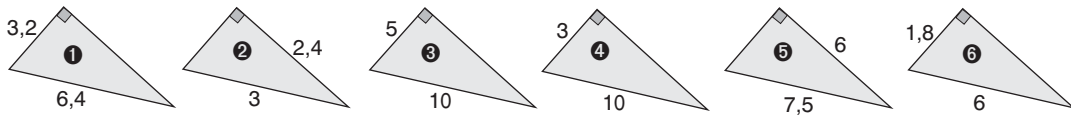
■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να συμπληρώσετε το σύμβολο « < » ή το « > » στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $\eta\mu 54^\circ$ $\eta\mu 35^\circ$, β) $\sigma\upsilon\nu 49^\circ$ $\sigma\upsilon\nu 29^\circ$, γ) $\eta\mu 48^\circ$ $\eta\mu 84^\circ$,
 δ) $\sigma\upsilon\nu 18^\circ$ $\sigma\upsilon\nu 38^\circ$, ε) $\epsilon\phi 38^\circ$ $\epsilon\phi 62^\circ$ στ) $\epsilon\phi 89^\circ$ $\epsilon\phi 1^\circ$

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

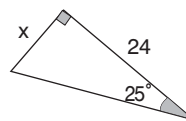
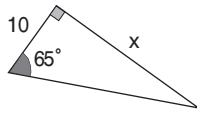
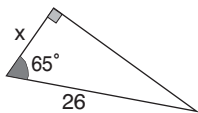
Τα παρακάτω έξι τρίγωνα έχουν γίνει κατά λάθος όλα ίσα, ενώ δεν είναι.



Μπορείτε να βρείτε ποια από αυτά έχουν ίσες γωνίες;

■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

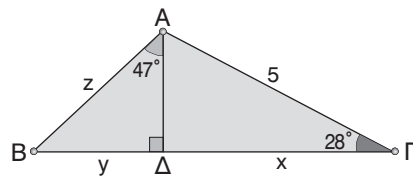
Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



■ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του διπλανού σχήματος, να βρείτε τα μήκη x , y και z . Δίνονται:

	25°	28°	47°	65°
ημίτονο	0,42	0,47	0,73	0,91
συνημίτονο	0,91	0,88	0,68	0,42



Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 3

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

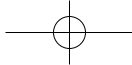
Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	30°	45°	60°
ημίτονο			
συνημίτονο			
εφαπτομένη			

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 30° , 45° και 60° , να επαληθεύσετε ότι:

- α) $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ - \eta\mu^2 30^\circ$, β) $\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ$,



γ) $\sin 60^\circ = 2 \sin^2 30^\circ - 1$,
 ε) $\epsilon\phi^2 45^\circ = \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ$,

δ) $\sin 60^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 30^\circ$,
 στ) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ = \epsilon\phi^2 45^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Αν ισχύει η σχέση $\epsilon\phi^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = x \cdot \eta\mu 45^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ$, να βρείτε την τιμή του x .

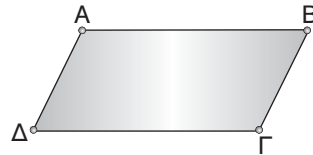
ΑΣΚΗΣΗ 4:

Το τηλεφερικό ενός χιονοδρομικού κέντρου, αναχωρεί από υψόμετρο 2000 m και φτάνει σε υψόμετρο 2800 m. Κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Το συρματόσχοινο του τηλεφερικού σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 30° . Η διαδρομή διαρκεί περισσότερο από 9 λεπτά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 4**ΑΣΚΗΣΗ 1:**

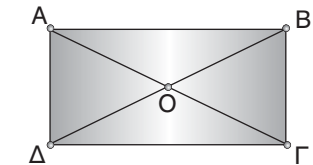
Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Να γράψετε δύο ίσα και δύο αντίθετα διανύσματα.

**ΑΣΚΗΣΗ 2:**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του. Να συμπληρώσετε τις φράσεις:

- α) Τα διανύσματα \vec{AO} και \vec{CO} είναι
 β) Τα διανύσματα \vec{OB} και \vec{DO} είναι
 γ) Τα διανύσματα \vec{DA} και \vec{CB} είναι

**ΑΣΚΗΣΗ 3:**

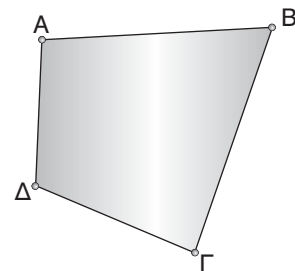
Για το ίδιο σχήμα να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

- α) Με $\vec{DA} + \vec{DG}$ ισούται το διάνυσμα: Α: \vec{AB} , Β: \vec{BD} , Γ: \vec{DB} , Δ: \vec{GA} , Ε: \vec{AG}
 β) Με $\vec{DA} - \vec{DG}$ ισούται το διάνυσμα: Α: \vec{AG} , Β: \vec{GA} , Γ: \vec{DB} , Δ: \vec{DA} , Ε: \vec{BD}

ΑΣΚΗΣΗ 4:

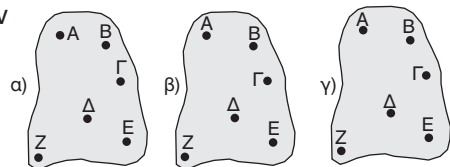
Δίνεται το τυχαίο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

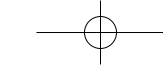
- A:** $\vec{AD} + \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$ **B:** $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{BD}$
Γ: $\vec{AD} + \vec{BD} = \vec{AG} + \vec{BG}$ **Δ:** $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{GD}$
Ε: $\vec{AD} - \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$

**ΑΣΚΗΣΗ 5:**

Να ενώσετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ των διπλανών σχημάτων με διανύσματα έτσι, ώστε:

- α) το άθροισμά τους να ισούται με \vec{AZ} .
 β) το άθροισμά τους να ισούται με \vec{GZ} .
 γ) το άθροισμά τους να ισούται με $\vec{0}$.





Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ενότητα: Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας.

Στόχοι: Να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική)

• Φύλλο εργασίας •

1. Λεξιλόγιο:

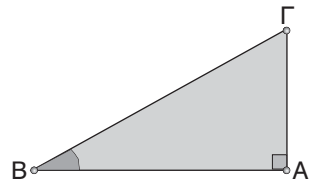
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με ορθή τη γωνία \hat{A} , λέμε ότι:

Η πλευρά $B\Gamma$ είναι η υποτείνουσα.

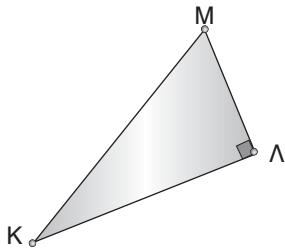
Οι πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι οι κάθετες πλευρές και μάλιστα:

- Η πλευρά AB είναι η προσκείμενη κάθετη στη γωνία \hat{B} .
- Η πλευρά $A\Gamma$ είναι η απέναντι κάθετη στη γωνία \hat{B} .

Να συμπληρώσετε τις φράσεις:



Στο τρίγωνο $K\Lambda M$



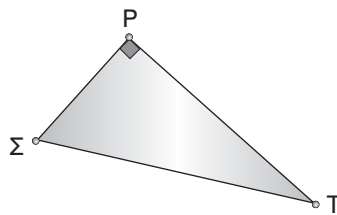
Η υποτείνουσα είναι η

Η προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{K} είναι η

Η απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{K} είναι η

Η απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{M} είναι η

Στο τρίγωνο $P\Sigma T$



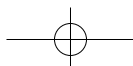
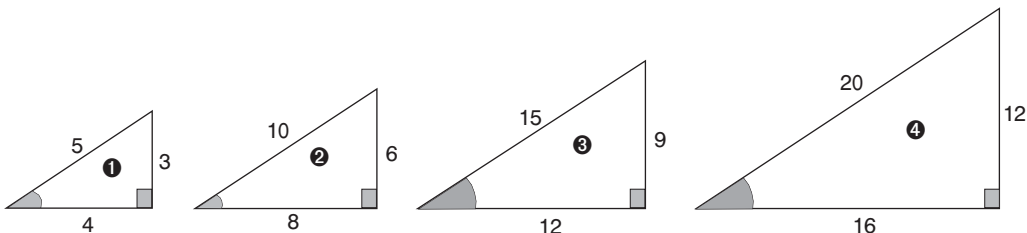
Η υποτείνουσα είναι η

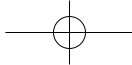
Η πλευρά $P\Sigma$ είναι στη γωνία \hat{T} .

Η πλευρά PT είναι στη γωνία \hat{T} .

Η πλευρά $P\Sigma$ είναι στη γωνία $\hat{\Sigma}$.

2. Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα οι σημειωμένες οξείες γωνίες είναι ίσες.





Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

τρίγωνο	υποτείνουσα	απέναντι κάθετη	προσκειμένη κάθετη	απέναντι κάθετη υποτείνουσα	προσκειμένη κάθετη υποτείνουσα
1					
2					
3					
4					

3. Παρατηρούμε ότι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια οξεία γωνία θ ,

α) Ο λόγος $\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι ο ίδιος.

Ο λόγος αυτός ονομάζεται

β) Ο λόγος $\frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι ο ίδιος.

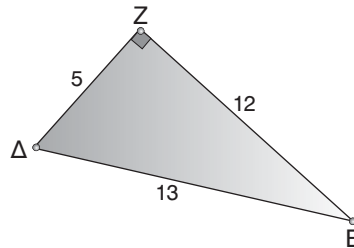
Ο λόγος αυτός ονομάζεται

4. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Να συμπληρώσετε τους αριθμούς:

$$\eta\mu\hat{E} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \text{συν}\hat{E} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\eta\mu\hat{\Delta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \text{συν}\hat{\Delta} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$



Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

2.1

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με τη διαφορά των οριζόντιων αποστάσεων των πλοίων από το φάρο.

Η απόσταση του πλοίου που είναι πλησιέστερα στο φάρο είναι ίση με:

$$a_1 = \frac{40}{\varepsilon\phi 34^\circ} = \frac{40}{0,6745} = 59,3 \text{ m.}$$

$$\text{Η απόσταση του δεύτερου πλοίου είναι: } a_2 = \frac{40}{\varepsilon\phi 23^\circ} = \frac{40}{0,4245} = 94,23 \text{ m.}$$

Οπότε η απόσταση των δύο πλοίων είναι $a_1 - a_2 = 94,23 - 59,3 = 34,93 \text{ m.}$

2.2

ΑΣΚΗΣΗ 3

- α) Γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu\omega < 1$
 πολλαπλασιάζουμε με 5: $5\eta\mu\omega < 5$
 προσθέτουμε 2: $2 + 5\eta\mu\omega < 2 + 5$ ή $2 + 5\eta\mu\omega < 7$.
- β) Γνωρίζουμε ότι: $\text{συν}\omega < 1$
 πολλαπλασιάζουμε με -2: $-2\text{συν}\omega > -2$
 προσθέτουμε 4: $4 - 2\text{συν}\omega > 4 - 2$ ή $4 - 2\text{συν}\omega > 2$.

82 Μέρος Β' - Κεφάλαιο 2ο - Τριγωνομετρία - Διανύσματα

γ) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega < 1$, οπότε $5\eta\mu\omega < 5$ και $\sigma\upsilon\nu\omega < 1$, οπότε $3\sigma\upsilon\nu\omega < 3$.

Προσθέτοντας τις δύο ανισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$$5\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 5 + 3 \quad \text{ή} \quad 5\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 8.$$

2.3

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υπολογίζουμε το μήκος των συρματόσχοινων με τη βοήθεια των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζουν με το κατάρτι και το οριζόντιο επίπεδο.

Για το πρώτο συρματόσχοινο έχουμε $\mu_1 = \frac{8}{\eta\mu 55^\circ} = \frac{8}{0,8192} = 9,77 \text{ m}$,

ενώ για το δεύτερο έχουμε: $\mu_2 = \frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{8}{0,9397} = 8,51 \text{ m}$.

2.4

ΑΣΚΗΣΗ 6

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{AB}{AG}$ ή $AB = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot AG$ ή $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8$ ή $AB = 4\sqrt{2} \text{ m}$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{AB}{AG}$ ή $A\Delta = \frac{AG}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}$ ή $A\Delta = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ή $A\Delta = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ m}$.

2.5

ΑΣΚΗΣΗ 5

Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ άρα $|\vec{\alpha}| = \sqrt{10} \text{ cm}$.

Για το διάνυσμα $\vec{\beta}$ έχουμε: $|\vec{\beta}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ άρα $|\vec{\beta}| = \sqrt{2} \text{ cm}$.

Για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ έχουμε: $|\vec{\gamma}| = 4 \text{ cm}$.

Για το διάνυσμα $\vec{\delta}$ έχουμε: $|\vec{\delta}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ άρα $|\vec{\delta}| = \sqrt{25}$ ή $|\vec{\delta}| = 5 \text{ cm}$.

2.6

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$\alpha) \vec{BO} - \vec{BA} = \vec{BO} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{AO}$$

$$\beta) \vec{BF} - \vec{BO} = \vec{BF} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{BF} = \vec{OF}$$

$$\gamma) \vec{DO} - \vec{DA} = \vec{DO} + \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$

$$\delta) \vec{DF} - \vec{DO} = \vec{DF} + \vec{OD} = \vec{OD} + \vec{DF} = \vec{OF}$$

Συνοπτικά, $\vec{BO} - \vec{BA} = \vec{DO} - \vec{DA}$ και $\vec{BF} - \vec{BO} = \vec{DF} - \vec{DO}$.

2.7

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η δύναμη που μετακινεί τον σκιέρ είναι η συνιστώσα \vec{B}_1 του βάρους \vec{B} , που είναι παράλληλη προς την εξέδρα.

$$\text{Άρα } |\vec{B}_1| = |\vec{B}| \eta\mu 30^\circ \quad \text{ή} \quad |\vec{B}_1| = 800 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad |\vec{B}_1| = 400 \text{ N}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Μέτρηση κύκλου

Ενδεικτικός προγραμματισμός 3ου Κεφαλαίου

3.1	Εγγεγραμμένες γωνίες	2 ώρες
3.2	Κανονικά πολύγωνα	3 ώρες
3.3	Μήκος κύκλου	2 ώρες
3.4	Μήκος τόξου	2 ώρες
3.5	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	2 ώρες
3.6	Εμβαδόν κυκλικού τομέα	2 ώρες
ΣΥΝΟΛΟ		13 ώρες

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό της εγγεγραμμένης γωνίας και την ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν σε ίσα τόξα.
- Μία ώρα για τη σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας.

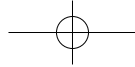
2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και να σχεδιάζουν τέτοιες γωνίες,
- να γνωρίζουν τη σχέση του μέτρου μιας επίκεντρης γωνίας και του μέτρου του αντίστοιχου τόξου,
- να γνωρίζουν τη σχέση του μέτρου μιας εγγεγραμμένης γωνίας και του μέτρου του αντίστοιχου τόξου,
- να αναγνωρίζουν την ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα,
- να μπορούν να «μεταφέρουν» ίσες εγγεγραμμένες γωνίες,
- να διαχειρίζονται τη σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης, αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Προτείνεται να γίνει μία σύντομη επανάληψη στις επίκεντρες γωνίες και τα αντίστοιχα τόξα από την ύλη της Α' Γυμνασίου.
- Η ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο προτείνεται να εισαχθεί από το παράδειγμα του αμφιθεάτρου.
- Προτείνεται να διευκρινιστεί ότι σε έναν κύκλο μόνο μία επίκεντρη γωνία βαίνει σε δοσμένο τόξο, το οποίο βλέπουν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.



3.2. Κανονικά πολύγωνα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για την κατανόηση της μορφής και των απλών ιδιοτήτων των κανονικών πολυγώνων.
- Μία ώρα για την κατασκευή κανονικών πολυγώνων.
- Μία ώρα για τη γωνία και την κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου,
- να γνωρίζουν ότι ένα κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο,
- να αποκτήσουν ευχέρεια στον υπολογισμό της γωνίας και της κεντρικής γωνίας n -γώνου,
- να μπορούν να κατασκευάζουν απλά κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό της κεντρικής γωνίας τους,
- να συσχετίζουν τη γωνία ή την κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου με το πλήθος των πλευρών του.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Ένα λεπτό σημείο στα πολύγωνα είναι η κυρτότητα η οποία σκόπιμα δεν αναφέρεται πουθενά στο βιβλίο του μαθητή. Έγκειται στην ευχέρεια του καθηγητή να γίνει κάποια μικρή νύξη στο θέμα.
- Η κατασκευή των κανονικών πολυγώνων δεν είναι αυστηρά γεωμετρική. Ουσιαστικά, γίνεται μια αντιστοίχιση της κεντρικής γωνίας με τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου.
- Προτείνεται η γεωμετρική απόδειξη ότι η γωνία n -γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας να γίνει αναλυτικά μέσα στην τάξη.

3.3. Μήκος κύκλου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

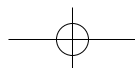
1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

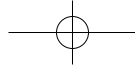
- Μία ώρα για να γίνουν αναλυτικά οι δύο δραστηριότητες για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου.
- Μία ώρα για εξάσκηση σε προβλήματα με μήκος κύκλου και αναφορά στο ιστορικό σημείωμα για τον αριθμό π .

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν το μήκος κύκλου μέσω του σταθερού λόγου $\frac{L}{\delta}$,
- να εξοικειωθούν με την «διαιτερότητα» του αριθμού π ,
- να υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου όταν γνωρίζουν την ακτίνα του.





3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Ο ρόλος των δύο δραστηριοτήτων είναι σημαντικός για την κατανόηση του υπολογισμού του μήκους του κύκλου. Προτείνεται να γίνουν με αναλυτικό τρόπο, επιτρέποντας έτσι στους μαθητές να «ανακαλύψουν» μόνοι τους τον αριθμό π .

► **Χρήσιμες διευθύνσεις στο διαδίκτυο για τον αριθμό π :**

<http://id.mind.net/~zona/mmts/trigonometryRealms/radianDemo1/RadianDemo1.html>
<http://mathforum.org/mathtools/cell/g,10.11,ALL,ALL/>

3.4. Μήκος τόξου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την κατανόηση του τύπου $\ell = 2\pi r \cdot \frac{\mu}{360}$ και εφαρμογές.
- Μία ώρα για τον ορισμό του ακτινίου (rad) και της σχέσης μοιρών και ακτινίων κυρίως μέσω εφαρμογών.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται να υπολογίζουν το μήκος τόξου, όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Προτείνεται να τονιστεί η διαφοροποίηση στη μέτρηση τόξων και στη μέτρηση γωνιών. Η ταύτιση μοιρών και ακτινίων αποτελεί συνήθη αδυναμία των μαθητών.
- Ο τύπος $\ell = 2\pi r \cdot \frac{\mu}{360}$ πρέπει να κατανοηθεί από τους μαθητές ως το μέρος $\frac{\mu}{360}$ του κύκλου ($2\pi r$), κάτι που φαίνεται και από τη χρήση της απλής μεθόδου των τριών.

3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

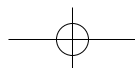
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την αναλυτική παρουσίαση της δραστηριότητας που οδηγεί τους μαθητές να «ανακαλύψουν» το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- Μια ώρα για εξάσκηση σε προβλήματα και εφαρμογές σχετικά με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται να κατανοήσουν τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου και να μπορούν να εφαρμόζουν κατάλληλα τον τύπο.



3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η δραστηριότητα που καταλήγει στον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου προτείνεται να γίνει από τους μαθητές με κανονική κατασκευή των «μικρών» κυκλικών τομέων που συνθέτουν το «ισεμβαδικό» ορθογώνιο.

3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την εξαγωγή του τύπου $E = \pi r^2 \cdot \frac{\mu}{360}$ και του αντιστοίχου τύπου με ακτίνα.
- Μία ώρα για εξάσκηση σε προβλήματα με εμβαδά κυκλικών τομέων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα, όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνα.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η απλή μέθοδος των τριών διευκολύνει ιδιαίτερα τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού τομέα και αξίζει να τονιστεί στους μαθητές, αφού εκφράζει το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ως το μέρος $\left(\frac{\mu}{360}\right)$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου πr^2 . Επίσης, η μετατροπή του τύπου του εμβαδού σε ακτίνα προτείνεται να δοθεί ως δραστηριότητα στην τάξη.

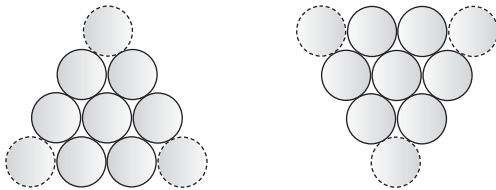
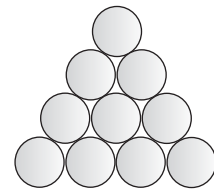
Δραστηριότητα 1

«Σχετικές θέσεις κύκλων»

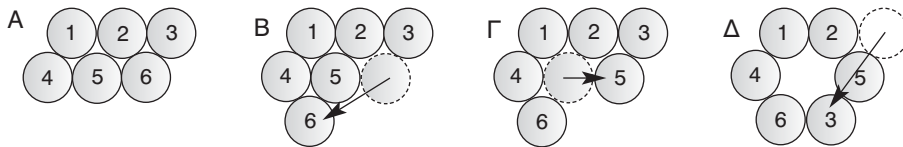
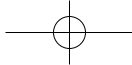
- α) Το «τρίγωνο» του σχήματος περιλαμβάνει 10 νομίσματα. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός νομισμάτων που πρέπει να μετακινήσουμε, ώστε «το τρίγωνο» να «δείχνει» προς τα κάτω;

Λύση

Χρειάζεται να μετακινηθούν μόνο τα τρία νομίσματα.



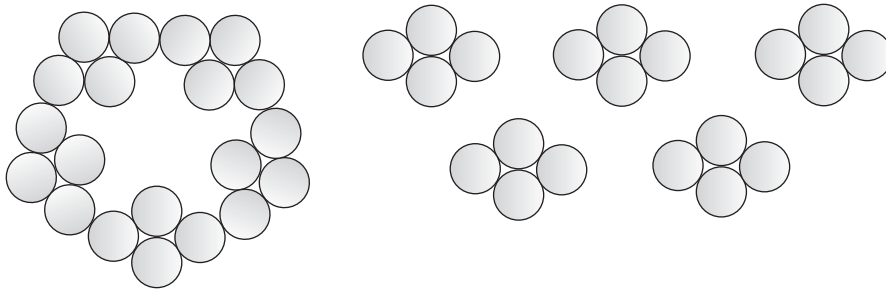
- β) Τοποθετήστε 6 νομίσματα του 1 € στο θρανίο σας, ώστε να χωράει ακριβώς ένα έβδομο στη μέση χωρίς να χρησιμοποιήσετε κανένα γεωμετρικό όργανο.



- γ) Μπορείτε να τοποθετήσετε 20 νομίσματα του 1 €, έτσι, ώστε καθένα να εφάπτεται ακριβώς σε τρία από τα υπόλοιπα;

Λύση

Χωρίζουμε τα νομίσματα σε τετράδες. Ενώνουμε κατόπιν 5 τετράδες, ώστε να έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.



Δραστηριότητα 2

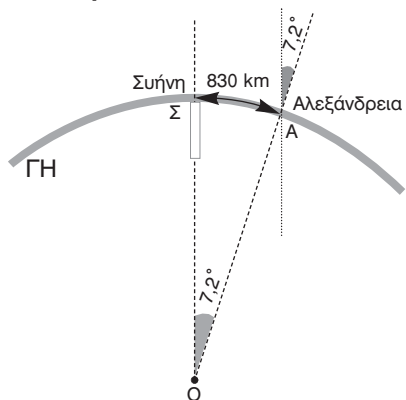
«Οι υπολογισμοί του Ερατοσθένη»

Περίπου το 250 π.Χ. ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, διάσημος μαθηματικός και διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, ασχολήθηκε με τον υπολογισμό της διαμέτρου της Γης.

Παρατήρησε ότι κατά το θερινό ηλιοστάσιο (21 Ιουνίου) το είδωλο του Ήλιου καθρεπτιζόταν στο κέντρο ενός πηγαδιού στη Συήνη (πόλη της Αιγύπτου κοντά στην Ασουάν), δηλαδή ήταν σε κατακόρυφη θέση στο σημείο αυτό.

Μετά από ένα χρόνο, την ίδια ημέρα, ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι οι ακτίνες του ήλιου στην Αλεξάνδρεια σχημάτιζαν γωνία με την προηγούμενη κατακόρυφη θέση του, την οποία υπολόγισε ότι ήταν $7,2^\circ$.

Η Αλεξάνδρεια απέχει από τη Συήνη περίπου 830 Km (5.000 στάδια). Να υπολογίσετε την περιφέρεια της Γης και κατόπιν τη διάμετρό της.

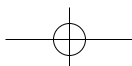


Λύση

Η γωνία των $7,2^\circ$ αντιστοιχεί σε τόξο κύκλου $\widehat{ΣΑ}$ μήκους 830 Km. Ο πλήρης κύκλος 360° είναι 50 φορές η γωνία $7,2^\circ$. Επομένως, η περιφέρεια της Γης είναι $50 \cdot 830 = 41500$ Km (250.000 στάδια). Γνωρίζουμε ότι η περιφέρεια της Γης δίνεται από τον τύπο $L = \pi \cdot \delta$, οπότε $\delta = \frac{L}{\pi} = \frac{41500}{3,14} = 13216,56$ km.

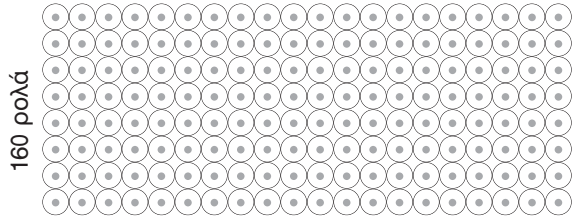
► Χρήσιμη διεύθυνση στο διαδίκτυο

http://www.dapontes.gr/index.php?option=com_content&task=view&id=63&Itemid=46



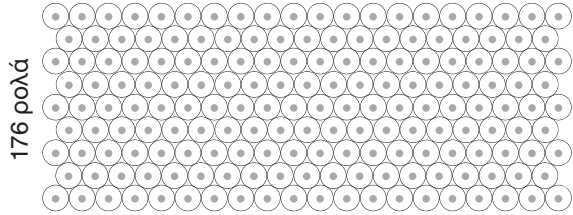
Δραστηριότητα 3

Ένας αποθηκάριος τοποθετεί χάρτινα ρολά σε μια αποθήκη. Η αποθήκη χωράει 160 ρολά τοποθετημένα σε σειρές των είκοσι, το ένα πάνω στο άλλο. Μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ρολά με άλλο τρόπο, ώστε να χωρέσουν περισσότερα; Πόσα επιπλέον ρολά χωράνε στην αποθήκη;



Λύση

Η αρχική μέθοδος τοποθετεί τα ρολά το ένα πάνω στο άλλο, ενώ η δεύτερη μέθοδος, το ένα στο κενό των δύο άλλων. Στην αρχή φαίνεται ότι χάνουμε ρολά καθώς στην 1^η σειρά τοποθετούνται 20, στη 2^η 19, στην 3^η 20, την 4^η 19 ... κ.ο.κ. Το μυστικό είναι ότι κερδίζουμε σε ύψος.



Ας υποθέσουμε ότι η διάμετρος κάθε ρολού είναι 2 m. Αν μετρήσουμε τη νέα τοποθέτηση, τότε η 2^η σειρά προσθέτει στο ύψος $\sqrt{3} = 1,732$ m. Το ύψος του κουτιού είναι 16 m. Με τη νέα τοποθέτηση καλύπτουμε $2 + 8 \cdot 1,732 = 15,856$ m. Τοποθετώντας έτσι 5 σειρές των 20 και 4 σειρές των 19 ρολών, έχουμε συνολικά 176 ρολά.

Δραστηριότητα 4

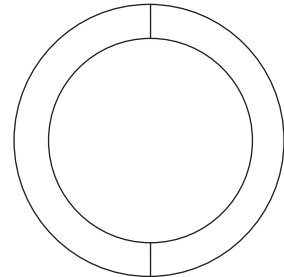
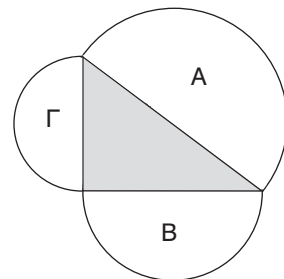
Έχουμε τρεις κυκλικές πίτσες (ίσου πάχους) διαφορετικού μεγέθους: διαμέτρων 30 cm, 40 cm, 50 cm αντίστοιχα, τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε σε τέσσερα παιδιά. Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό πλήθος κομματιών που μπορούμε να κόψουμε τις πίτσες, ώστε να μοιραστούν στα τέσσερα παιδιά χωρίς να αδικήσουμε κανένα από αυτά;

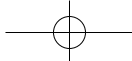
Λύση

Το μυστικό, για να λυθεί το πρόβλημα, είναι ότι οι τρεις διαμέτροι των κύκλων σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο, αφού ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Επομένως, οι δύο μικρές πίτσες έχουν εμβαδόν ίσο με αυτό της μεγάλης. Χωρίζουμε λοιπόν τη μεγάλη στη μέση και δίνουμε από ένα κομμάτι στα δύο πρώτα παιδιά.

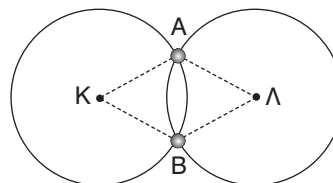
Για να μοιράσουμε τη μεσαία και τη μικρή πίτσα σε δύο μέρη, τοποθετούμε τη μικρή πάνω στη μεσαία και κόβουμε το δακτύλιο που περισεύει στη μέση.





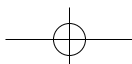
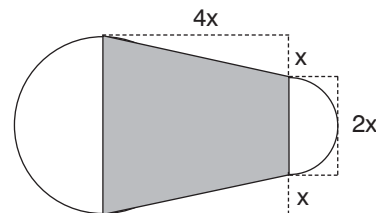
Επαναληπτικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

1. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και η εγγεγραμμένη του γωνία $\widehat{B\hat{A}G} = 45^\circ$. Αν $B\Gamma = 5$ cm, να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ και το εμβαδόν του κύκλου.
2. Να γράψετε έναν κύκλο με διάμετρο AB και στη συνέχεια από τυχαίο σημείο Γ του κύκλου, να φέρετε τις χορδές GA και GB . Αν είναι $GB = 12$ cm και $GA = 5$ cm, να βρείτε:
 - α) το μήκος του κύκλου,
 - β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς $a = 3$ cm. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα 3 cm σχηματίζουμε τα τόξα \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma}$.
 - α) Να υπολογίσετε σε rad τα μήκη των τόξων \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma}$.
 - β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του «καμπυλόγραμμου» τριγώνου $AB\Gamma$.
 - γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



4. Δύο ίσοι κύκλοι κέντρων K και Λ αντίστοιχα τέμνονται στα σημεία A και B . Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $\widehat{A\hat{K}B}$ και $\widehat{A\hat{\Lambda}B}$ είναι ίσες.
5. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έτσι, ώστε να ισχύει $\widehat{B\Gamma} = 160^\circ$. Φέρνουμε τη διάμετρο AD . Αν $\widehat{B\Gamma} = 30^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
6. Σε έναν κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 68^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 106^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
7. Σε έναν κύκλο να γράψετε δύο παράλληλες χορδές AB και $\Gamma\Delta$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες.
8. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\rho = 4$ cm.
9. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 10 cm. Το ίδιο ισχύει και για το μήκος ενός κύκλου. Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;
10. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) . Αν $AB = 6$ cm και $A\Gamma = 8$ cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, την πλευρά $B\Gamma$ και το εμβαδόν του κύκλου.
11. Δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) τέμνονται στο E . Αν $\widehat{AD} = 65^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 40^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{A\hat{E}\Delta}$.

12. Το χωρίο του σχήματος αποτελείται από δύο ημικύκλια και ένα ισοσκελές τραπέζιο.
 - α) Να εκφράσετε την περίμετρο του χωρίου ως συνάρτηση του x .
 - β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του χωρίου ως συνάρτηση του x .
 - γ) Να βρείτε τις τιμές της περιμέτρου και του εμβαδού, όταν $x = 3$ cm.



Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 1

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

α) Να κάνετε την αντιστοίχιση ανάμεσα στα τόξα και τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες:

Τόξο	Επίκεντρη γωνία
Κύκλος	180°
Ημικύκλιο	30°
Τεταρτοκύκλιο	360°
$\frac{1}{12}$ του κύκλου	90°

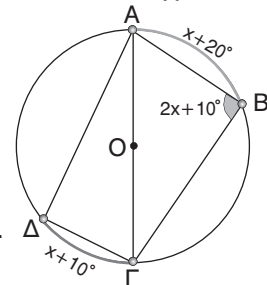
β) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) σωστή ή (Λ) λανθασμένη τις παρακάτω προτάσεις.

- ΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ
- i) Αν σε δύο κύκλους έχουμε δύο ίσες επίκεντρες γωνίες, τότε τα τόξα στα οποία βαίνουν είναι ίσα.
- ii) Η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια κάθε εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- iii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- iv) Αν μια εγγεγραμμένη και η αντίστοιχη επίκεντρή της είναι ίσες, τότε και οι δύο είναι 0° .

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:
Α: 30° , Β: 60° , Γ: 90° , Δ: 180°
- β) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο είναι ίσο με:
Α: 30° , Β: 45° , Γ: 60° , Δ: 90°
- γ) Δίνεται τόξο $\widehat{AB} = 100^\circ$ κύκλου (O, ρ) και η διχοτόμος $\Gamma\Delta$ της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$. Τότε η επίκεντρη γωνία $\widehat{A\hat{O}\Delta}$ είναι ίση με:
Α: 25° , Β: 50° , Γ: 75° , Δ: 100°
- δ) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) για το οποίο ισχύει:
 $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$. Τότε το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ είναι ίσο με:
Α: 45° Β: 90° Γ: 180° Δ: 360°



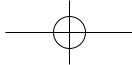
■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Στο διπλανό σχήμα η $A\Gamma$ είναι διάμετρος και $\widehat{AB\Gamma} = 2x + 10^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = x + 10^\circ$, $\widehat{AB} = x + 20^\circ$.

Να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

■ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Δυο κύκλοι (O_1, ρ_1) και (O_2, ρ_2) τέμνονται στα σημεία A και B. Έστω $A\Gamma$ η διάμετρος του κύκλου (O_1, ρ_1) και $A\Delta$ η διάμετρος του κύκλου (O_2, ρ_2) . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ , B και Δ είναι συνευθειακά.



Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης 2

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	Γωνία κανονικού πολυγώνου	Κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου
3		
		72°
6		
		40°
	144°	

■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να κατασκευάσετε ένα κανονικό πεντάγωνο και ένα κανονικό δωδεκάγωνο.

■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία ίση με την κεντρική γωνία.

■ ΑΣΚΗΣΗ 4:

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και ΑΖ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΓΑΒ}$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΖ και ΑΕ είναι κάθετες.

Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Εγγεγραμμένες γωνίες – Κανονικά πολύγωνα.

Στόχοι: Να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση εγγεγραμμένης γωνίας με την αντίστοιχη επίκεντρη και τους τύπους των κανονικών πολυγώνων.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

1. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $\widehat{ΑΟΒ}$ είναι ίση με 60°. Να σχηματίσετε τις γωνίες που έχουν κορυφή τα σημεία Δ, Ε, Ζ, Γ και πλευρές που διέρχονται από τα σημεία Α, Β. Με ένα μοιρογνωμόνιο να μετρήσετε τις γωνίες που σχηματίσατε. Είναι:

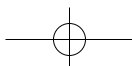
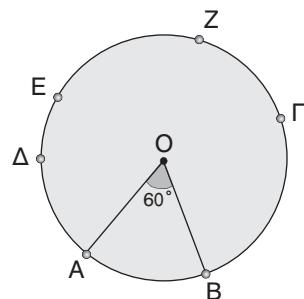
$$\widehat{ΑΔΒ} = \dots, \widehat{ΑΕΒ} = \dots, \widehat{ΑΖΒ} = \dots \text{ και } \widehat{ΑΓΒ} = \dots$$

Καθεμία από τις γωνίες $\widehat{ΑΔΒ}$, $\widehat{ΑΕΒ}$, $\widehat{ΑΖΒ}$, $\widehat{ΑΓΒ}$ βαίνει στο τόξο και είναι ίση με το μισό της $\widehat{ΑΟΒ}$.

ΓΕΝΙΚΑ: κάθε εγγεγραμμένη γωνία

.....

.....



92

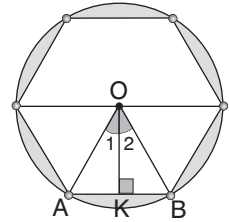
2. Σε ένα κανονικό n -γωνο για την κεντρική του γωνία ω και τη γωνία του φ ισχύουν οι σχέσεις:

$\omega = \frac{360}{n}$, $\varphi + \omega = \dots\dots$. Αν λύσουμε τον πρώτο τύπο ως προς n βρίσκουμε $n = \frac{360}{\omega}$. Από το

δεύτερο τύπο βρίσκουμε $\omega = \dots\dots$ ή $\varphi = \dots\dots$. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα που αναφέρεται σε τέσσερα κανονικά πολύγωνα.

Πλήθος πλευρών n	Κεντρική γωνία ω	γωνία φ
	20°	
	30°	
		108°
	70°	

3. Σε κύκλο με ακτίνα 2 cm να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξαγώνο. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του και να βρείτε το εμβαδόν του.



Λύση

Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι $\omega = \frac{360}{6} = 60^\circ$.

Σχεδιάζουμε έξι ίσες διαδοχικές 60° γωνίες. Αυτές διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα 60° και οι αντίστοιχες χορδές τους είναι οι 60° του εξαγώνου.

Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με μια γωνία 60° , επομένως είναι 60° και έτσι $AB = \dots$ cm.

Είναι $\widehat{O}_1 = \dots^\circ$ και $\text{syn}\widehat{O}_1 = \frac{OK}{\dots}$ ή $\dots = \frac{OK}{\dots}$ ή $OK = \dots$ cm.

Είναι $(OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dots = \dots$ cm².

Το εμβαδόν του εξαγώνου είναι $E = 6 \cdot (OAB) = \dots$ cm².

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Ενότητα: Μέτρηση κύκλου.

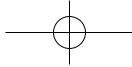
Στόχοι: Να εξοικειωθούν οι μαθητές με τα προβλήματα που σχετίζονται με τη μέτρηση του κύκλου (μήκος κύκλου, μήκος τόξου, εμβαδόν κύκλου και κυκλικού τομέα).

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη - ανακαλυπτική).

• Φύλλο εργασίας •

1. α) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι $L = \dots$. Αν λύσουμε τον τύπο αυτό ως προς ρ , έχουμε $\rho = \frac{L}{2\pi}$.

- β) Ένα τόξο του οποίου η αντίστοιχη γωνία είναι 1° , έχει μήκος ίσο με το $\frac{1}{360}$ του \dots δηλαδή ίσο με $\frac{1}{360} \cdot 2\pi\rho = \frac{L}{360}$. Επομένως, ένα τόξο με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ° έχει μήκος \dots



2. α) Το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα ρ είναι $E = \dots$. Για να λύσουμε τον τύπο αυτό ως προς ρ έχουμε: $E = \dots$ ή $\rho^2 = \dots$ ή $\rho = \sqrt{\dots}$
- β) Ένας κυκλικός τομέας του οποίου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι 1° έχει εμβαδόν ίσο με το \dots του εμβαδού του κύκλου. Επομένως, ένας κυκλικός τομέας με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ° έχει εμβαδόν ίσο με $E = \dots$

3. Τυπολόγιο

Μήκος κύκλου:

Μήκος τόξου μ° :

Εμβαδόν κύκλου:

Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° :

4. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Ακτίνα κύκλου	Μήκος κύκλου	Εμβαδόν κύκλου
$\rho = 5$		
	12,56	
		28,26

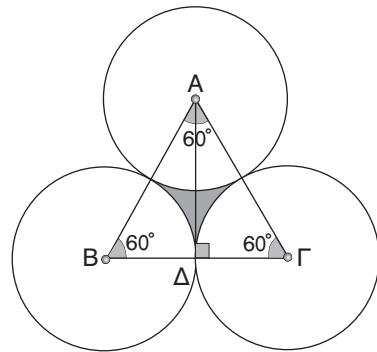
5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα κύκλου	Επίκεντρη ($^\circ$)	Μήκος αντίστοιχου τόξου	Εμβαδόν αντίστοιχου κυκλικού τομέα
$\rho = 5$	$\omega = 60^\circ$		
$\rho = 4$		0,785	
			19,625

6. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4 cm. Οι κύκλοι έχουν κέντρα τις κορυφές των τριγώνων και ακτίνα 2 cm. Για να βρούμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος (μεικτόγραμμο τρίγωνο), αρκεί από το \dots να αφαιρέσουμε 3 φορές το \dots που έχει αντίστοιχη επίκεντρη γωνία 60° . Δηλαδή $E = E_{\text{τριγ.}} - 3E_{\text{τομέα}}$. Το ύψος AD του τριγώνου είναι:

$$AD = AB \cdot \sin 30^\circ = \dots$$

$$E_{\text{τριγ.}} = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon = \dots, E_{\text{τομέα}} = \dots = \dots \text{ οπότε } E = \dots$$



Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

3.1

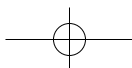
ΑΣΚΗΣΗ 4

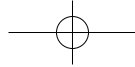
Το άθροισμα των επίκεντρων γωνιών είναι ίσο με 360° .

Συνεπώς έχουμε $2\varphi + 90^\circ + 2\varphi + 30^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ή

$$2\varphi + 2\varphi = 360^\circ - 90^\circ - 30^\circ - 120^\circ \quad \text{ή}$$

$$4\varphi = 120^\circ \quad \text{ή} \quad \varphi = 30^\circ$$





3.2

ΑΣΚΗΣΗ 4

Για την γωνία φ ισχύει $\varphi = \frac{5}{3} \cdot 90^\circ$ ή $\varphi = 150^\circ$. Άρα, η κεντρική γωνία του πολυγώνου θα είναι $\omega = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 150^\circ$ ή $\omega = 30^\circ$.

Συνεπώς $\omega = \frac{360^\circ}{v}$ ή $30^\circ = \frac{360^\circ}{v}$ ή $\omega = \frac{360^\circ}{30^\circ}$ ή $v = 12$ πλευρές.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Αν η κεντρική γωνία ω είναι 16° τότε $v = \frac{360^\circ}{16^\circ} = 22,5$. Το 22,5 δεν είναι ακέραιος

αριθμός, άρα δεν υπάρχει πολύγωνο με $\omega = 16^\circ$.

β) Αν η γωνία φ είναι 130° , τότε $\omega = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ και $v = \frac{360^\circ}{50^\circ} = 7,2$. Το 7,2 όμως

δεν είναι ακέραιος αριθμός, άρα δεν υπάρχει πολύγωνο με $\varphi = 130^\circ$.

3.3

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Έχουμε $L_1 = \pi \cdot \delta_1$ και $L_2 = \pi \cdot \delta_2$. Αφού $\frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{1}$ τότε $\frac{\pi\delta_1}{\pi\delta_2} = \frac{2}{1}$ ή $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2}{1}$.

β) Έχουμε $L_1 = 2\pi r_1$ και $L_2 = 2\pi r_2$. Αφού $\frac{L_1}{L_2} = \frac{2}{1}$ τότε $\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{2}{1}$ ή $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1}$.

3.4

ΑΣΚΗΣΗ 7

Για τον κύκλο με ακτίνα $r_1 = 1$ cm είναι $\ell_1 = 2\pi r_1 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ ή $\ell_1 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ή $\ell_1 = \frac{\pi}{4}$ cm.

Για τον κύκλο με ακτίνα $r_2 = 1,5$ cm είναι $\ell_2 = 2\pi r_2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ ή $\ell_2 = 2\pi \cdot 1,5 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ή $\ell_2 = \frac{3\pi}{8}$ cm.

Για τον κύκλο με ακτίνα $r_3 = 2$ cm είναι $\ell_3 = 2\pi r_3 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ ή $\ell_3 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ή $\ell_3 = \frac{\pi}{2}$ cm.

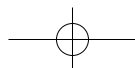
3.5

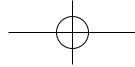
ΑΣΚΗΣΗ 7

Η διαγώνιος δ του τετραγώνου είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου. Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε $\delta^2 = 6^2 + 6^2 = 72$ ή $\delta = 6\sqrt{2}$ (cm).

Άρα η ακτίνα του κυκλικού δίσκου είναι $\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ ή $\rho = 3\sqrt{2}$ (cm) και το εμβαδόν

του θα είναι $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot (3\sqrt{2})^2$ ή $E = 56,52$ (cm²).





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - Γεωμετρικά στερεά - Μέτρηση στερεών

Ενδεικτικός προγραμματισμός 4ου Κεφαλαίου

4.1	Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	2 ώρες
4.2	Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	2 ώρες
4.3	Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	2 ώρες
4.4	Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	2 ώρες
4.5	Ο κώνος και τα στοιχεία του	2 ώρες
4.6	Η σφαίρα και τα στοιχεία της	2 ώρες
4.7	Γεωγραφικές συντεταγμένες	1 ώρα
ΣΥΝΟΛΟ		13 ώρες

4.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τις σχετικές θέσεις δύο επιπέδων, δύο ευθειών και μιας ευθείας και ενός επιπέδου.
- Μία ώρα για ευθεία κάθετη σε επίπεδο, απόσταση σημείου από επίπεδο και απόσταση παράλληλων επιπέδων.

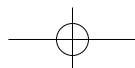
2. Διδακτικοί Στόχοι

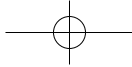
Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν τη σχετική θέση δύο επιπέδων στο χώρο, δύο ευθειών στο χώρο και μιας ευθείας και ενός επιπέδου,
- να διαπιστώνουν αν μια ευθεία είναι κάθετη σ' ένα επίπεδο.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Από την Α' Γυμνασίου οι μαθητές γνωρίζουν να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν επίπεδα και επίσης γνωρίζουν ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται μόνο ένα επίπεδο, ενώ από ένα σημείο ή από δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- Οι έννοιες της παραλληλίας και της καθετότητας επεκτείνονται στο χώρο και αποσαφηνίζονται με παραδείγματα από τον φυσικό κόσμο. Για παράδειγμα, αν η αίθουσα διδασκαλίας έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, τότε οι απέναντι τοίχοι και το δάπεδο με την οροφή ορίζουν παράλληλα επίπεδα, ενώ δύο διαδοχικοί τοίχοι ορίζουν δύο επίπεδα που τέμνονται κατά μία ευθεία που είναι κάθετη στο δάπεδο.
- Οι μαθητές προτείνεται να εξασκηθούν στη σχεδίαση σχημάτων που παριστάνουν παράλληλα ή τεμνόμενα επίπεδα και σε ευθείες κάθετες σε επίπεδα και να τα παρουσιάζουν από διάφορες οπτικές γωνίες. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν τα δύο τεμνόμενα επίπεδα που ορίζουν τα εξώφυλλα ενός μισάνοιχτου βιβλίου, όταν το κοιτάζουν από εμπρός, πλάγια ή πίσω και με διαφορετικά ανοίγματα του βιβλίου.





4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό πρίσματος, τα στοιχεία του και το εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος.
- Μία ώρα για τον ορισμό κυλίνδρου, τα στοιχεία του και το εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου.
- Μία ώρα για επίλυση προβλημάτων σε εμβαδά πρισμάτων και κυλίνδρων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πρίσμα και το είδος του πρίσματος,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας πρίσματος,
- να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται:

- α) ο ορισμός, τα στοιχεία και το εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος.
- β) ο ορισμός, τα στοιχεία και το εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές τα βασικά στοιχεία του πρίσματος και του κυλίνδρου, ενώ ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειάς τους με το ανάπτυγμά της.

4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

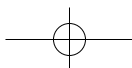
1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

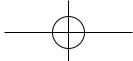
- Μία ώρα για τις μονάδες όγκου και τους τύπους εύρεσης του όγκου πρίσματος και κυλίνδρου.
- Μία ώρα για την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε εμβαδά και όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης όγκου στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τις μεταξύ τους σχέσεις και το συμβολισμό τους,
- να υπολογίζουν τον όγκο πρίσματος και κυλίνδρου.





3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η θεματική ενότητα αυτή χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη:

- α) τις μονάδες μέτρησης όγκου,
- β) τον υπολογισμό όγκου πρίσματος και κυλίνδρου.

Προτείνεται να δοθεί προσοχή στην εξήγηση της έννοιας του όγκου με μονάδα μέτρησης τον κύβο και στην αιτιολόγηση του υπολογισμού του όγκου πρίσματος και κυλίνδρου μέσα από ένα παράδειγμα της καθημερινής εμπειρίας (σύριγγα με νερό), που εκμεταλλεύεται την κίνηση.

Επίσης, το κεφάλαιο αυτό προσφέρεται για την εξάσκηση των μαθητών σε πράξεις με το χέρι αλλά και με τον υπολογιστή στέπης, καθώς και για εξάσκηση στις μετατροπές μονάδων.

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό πυραμίδας, τα στοιχεία της και το εμβαδόν της.
- Μία ώρα για τον όγκο της πυραμίδας και την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε εμβαδά και όγκους πυραμίδας.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της πυραμίδας και το είδος της,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κανονικής πυραμίδας,
- να υπολογίζουν τον όγκο μίας πυραμίδας.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η θεματική ενότητα αποτελείται από τρία μέρη:

- α) τον ορισμό, τα στοιχεία και το είδος της πυραμίδας,
- β) το εμβαδόν επιφάνειας της πυραμίδας,
- γ) τον υπολογισμό του όγκου της πυραμίδας.

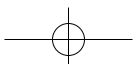
Προτείνεται να δοθεί προσοχή στον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας της πυραμίδας μέσω του αναπτύγματος, καθώς και στην αιτιολόγηση του υπολογισμού του όγκου της πυραμίδας από τη σύγκριση με τον όγκο πρίσματος πειραματικά με το γέμισμα ενός πρίσματος από τρεις πυραμίδες.

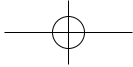
4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό κώνου, τα στοιχεία του και το εμβαδόν του.
- Μία ώρα για τον όγκο του κώνου και την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε εμβαδά και όγκους κώνων.





2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν τα στοιχεία του κώνου,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κώνου,
- να υπολογίζουν τον όγκο του κώνου.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η θεματική ενότητα αποτελείται από τρία μέρη:

- α) τον ορισμό και τα στοιχεία του κώνου,
- β) το εμβαδόν επιφάνειας του κώνου,
- γ) τον υπολογισμό του όγκου του κώνου.

Προτείνεται να δοθεί προσοχή στον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας του κώνου μέσω του αναπτύγματος, καθώς και στην αιτιολόγηση του υπολογισμού του όγκου του κώνου από τη σύγκρισή του με τον όγκο κυλίνδρου μέσα από τη δραστηριότητα, όπου πειραματικά γίνεται το γέμισμα ενός κυλίνδρου από τρεις κώνους.

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μία ώρα για τον ορισμό σφαίρας, τα στοιχεία της και το εμβαδόν της επιφάνειάς της.
- Μία ώρα για τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας και την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε εμβαδά και όγκους σφαίρας.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

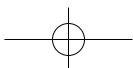
- να κατανοήσουν τον ορισμό της σφαίρας και ως στερεό εκ περιστροφής και ως γεωμετρικό τόπο,
- να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της σφαίρας,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου,
- να υπολογίζουν τον όγκο της σφαίρας.

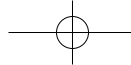
3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η θεματική ενότητα αποτελείται από τρία μέρη:

- α) τον ορισμό και τα στοιχεία της σφαίρας,
- β) το εμβαδόν επιφάνειας της σφαίρας,
- γ) τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας.

Προτείνεται να εξηγηθεί αναλυτικά ο υπολογισμός του εμβαδού επιφάνειας της σφαίρας μέσω της σύγκρισής της με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Να δοθεί, επίσης, έμφαση και στην αιτιολόγηση του υπολογισμού του όγκου της σφαίρας από τη σύγκρισή της με τον όγκο κυλίνδρου, μετά από τη δραστηριότητα, όπου πειραματικά γίνεται το γέμισμα δύο κυλίνδρων από τρεις σφαίρες.





4.7. Γεωγραφικές συντεταγμένες

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 1 ώρα

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

Μία ώρα για τις Γεωγραφικές συντεταγμένες και εξάσκηση σε αυτές.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται να γνωρίζουν τον άξονα περιστροφής, τα ημισφαίρια, τις παραλλήλους και τους μεσημβρινούς, το γεωγραφικό μήκος και πλάτος και να προσανατολίζονται στοιχειωδώς στην επιφάνεια της Γης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

Προτείνεται να γίνει πρακτική εξάσκηση των μαθητών σε υδρόγειο ή σε γεωγραφικούς χάρτες. Οι ερωτήσεις για διασκέδαση μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιαιτερότητες της σφαιρικής γεωμετρίας.

Για διασκέδαση

Απαντήσεις:

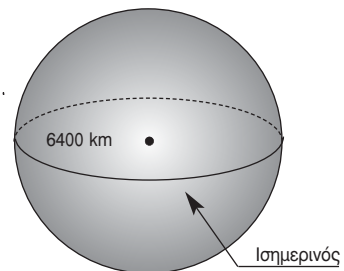
- ✓ Αν βρίσκεται στο Βόρειο Πόλο.
- ✓ Το σφαιρικό τρίγωνο σχηματίζεται, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε το Βόρειο Πόλο και δύο σημεία του Ισημερινού έτσι ώστε να απέχουν μεταξύ τους ένα τεταρτοκύκλιο της περιφέρειας της Γης.
- ✓ Ο ταξιδιώτης έκανε το γύρο του κόσμου. Το κεφάλι του βρίσκεται δύο μέτρα από το έδαφος οπότε η ακτίνα του κύκλου που διέγραψε το κεφάλι του είναι 2 μέτρα μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου που διέγραψαν τα πόδια του. Επομένως, το κεφάλι του διένυσε επιπλέον $2\pi \cdot 2 = 4\pi = 12,56$ m.
- ✓ Η αρκούδα είναι άσπρη, γιατί η σπηλιά της είναι στο Βόρειο Πόλο.

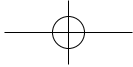
Δραστηριότητα 1

«Αποστάσεις πάνω στη Γη»

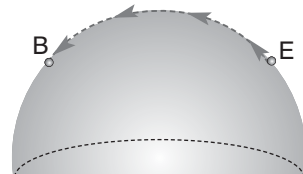
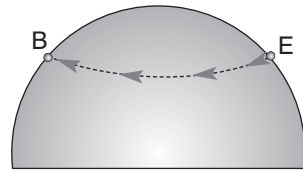
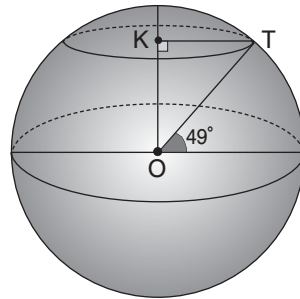
Στα παρακάτω θεωρούμε ότι η Γη είναι σφαιρική ακτίνας 6400 km.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του Ισημερινού.





- β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα και τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου, για να υπολογίσετε το μήκος του παράλληλου κύκλου που έχει γεωγραφικό πλάτος 49° (δηλαδή τον 49ο παράλληλο).
- γ) Δίνονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες των πόλεων Βανκούβερ (Καναδάς): 122°W 49°N και Έμπι (Καζακστάν): 58°E 49°N . Εκτός του ότι βρίσκονται και οι δύο στον 49ο παράλληλο, τι άλλο μπορούμε να παρατηρήσουμε για τις πόλεις αυτές;
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση Έμπι – Βανκούβερ, αν ακολουθήσουμε τον 49ο παράλληλο.
- ε) Να υπολογίσετε την απόσταση Έμπι – Βανκούβερ, αν περάσουμε από το Βόρειο Πόλο.
- στ) Ποια από τις δύο προηγούμενες διαδρομές είναι συντομότερη;

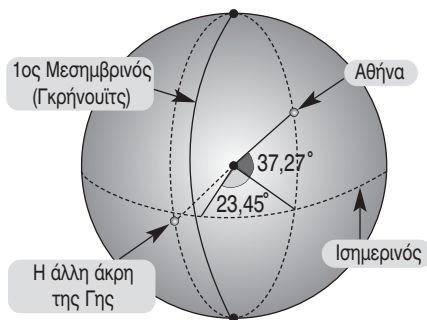


Δραστηριότητα 2

«Ποιος βρίσκεται από κάτω; Πώς στέκεται ανάποδα;»

Η Αθήνα έχει γεωγραφικές συντεταγμένες $37,27^\circ\text{N}$ $23,45^\circ\text{E}$.

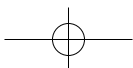
- α) Ποιες είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες του τόπου που βρίσκεται ακριβώς στην «άλλη άκρη» της Γης;
- β) Να βρείτε τις γεωγραφικές συντεταγμένες της πόλης που ζείτε, και τις γεωγραφικές συντεταγμένες του τόπου που βρίσκεται ακριβώς στην άλλη άκρη της Γης. Ποια πόλη είναι πλησιέστερα σ' αυτόν τον τόπο; Τι γλώσσα μιλούν οι άνθρωποι εκεί;

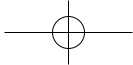


- Διευθύνσεις στο διαδίκτυο, χρήσιμες για τη δραστηριότητα αυτή:

<http://www.astrovox.gr/coordinates-geo.html>

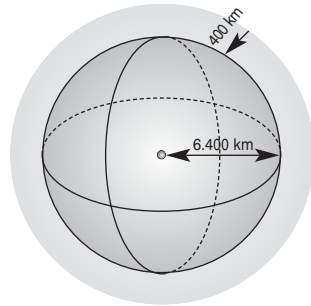
<http://www.geoapikonisis.gr/online-maps-greek.htm>



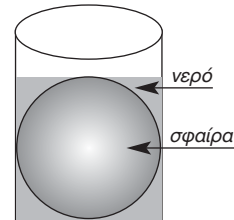


Επαναληπτικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

1. Το σχήμα της Γης είναι περίπου σφαιρικό με ακτίνα περίπου 6.400 km. Η ατμόσφαιρα καλύπτει γύρω-γύρω τη Γη σε ένα μέσο ύψος 400 km. Να υπολογίσετε τον όγκο του αέρα που βρίσκεται γύρω από τη Γη. Γνωρίζοντας ότι η μέση μάζα του αέρα ενός λίτρου είναι 1 γραμμάριο, να εκφράσετε σε τόνους τη συνολική μάζα της ατμόσφαιρας.

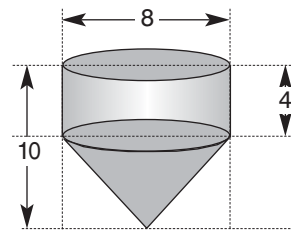


2. Σε ένα κυλινδρικό ποτήρι με ακτίνα βάσης $\rho = 3$ cm βυθίζουμε μια σφαίρα που έχει ακριβώς την ίδια ακτίνα. Στη συνέχεια ρίχνουμε νερό στο ποτήρι μέχρι να καλύψουμε ακριβώς τη σφαίρα.



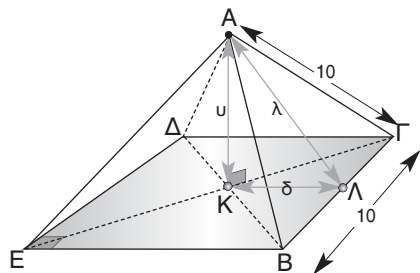
- Να υπολογίσετε τον όγκο V_1 της σφαίρας.
- Να υπολογίσετε το ύψος του νερού στον κύλινδρο όταν υπάρχει η σφαίρα.
- Να υπολογίσετε τον όγκο V_2 της σφαίρας μαζί με το νερό.
- Να υπολογίσετε τον όγκο V_3 του νερού που θα μείνει στο ποτήρι, όταν βγάλουμε τη σφαίρα.
- Να υπολογίσετε το ύψος του νερού που θα μείνει στο ποτήρι, όταν βγάλουμε τη σφαίρα.

3. Ένα δοχείο είναι κατασκευασμένο από ένα κύλινδρο και ένα κώνο με διαστάσεις σε cm που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

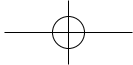


- Να υπολογίσετε τον όγκο του δοχείου.
- Αν το δοχείο είναι ανοικτό από πάνω και το υλικό κατασκευής του κοστίζει 0,2 € το κάθε cm^2 , να υπολογίσετε το συνολικό κόστος του υλικού που θα χρειαστεί για την κατασκευή 12 δοχείων.

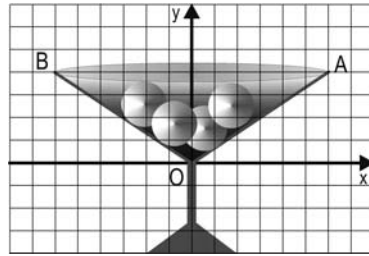
4. Στο διπλανό σχέδιο φαίνεται η στέγη μιας αγροικίας που έχει το σχήμα πυραμίδας. Η βάση της πυραμίδας είναι το τετράγωνο ΒΓΔΕ πλευράς 10 m ενώ τα τρίγωνα με κορυφή το Α είναι ισόπλευρα.



- Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $u = AK$, $\lambda = AL$ και $\delta = KL$.
- Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
- Τα δοκάρια ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΒ κοστίζουν 10 € το μέτρο ενώ τα δοκάρια ΕΓ και ΒΔ κοστίζουν 20 € το μέτρο. Το υλικό με το οποίο έχουν καλυφθεί οι τριγωνικές έδρες της πυραμίδας κοστίζει 15 € το τετραγωνικό μέτρο. Πόσο κοστίζουν συνολικά τα υλικά αυτά για τη συγκεκριμένη στέγη;

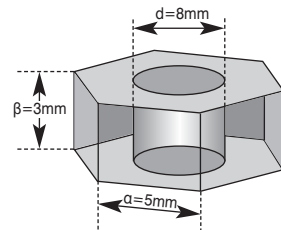


5. Το πάνω μέρος ενός ποτηριού του λικέρ έχει σχήμα κώνου του οποίου οι διαστάσεις (σε cm) φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Βάζουμε μέσα στο ποτήρι τέσσερα σφαιρικά παγάκια ακτίνας 1 cm και στη συνέχεια γεμίζουμε τελείως το ποτήρι με ποτό.



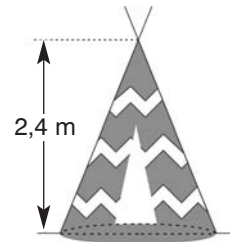
- α) Να υπολογίσετε τον όγκο που καταλαμβάνουν τα παγάκια.
 β) Να υπολογίσετε τον όγκο του ποτού που βρίσκεται μέσα στο ποτήρι.
 γ) Όταν λιώνουν τα παγάκια και γίνονται νερό, ο όγκος του νερού που προκύπτει είναι το 90% του όγκου του πάγου. Να υπολογίσετε τον όγκο του υγρού που βρίσκεται μέσα στο ποτήρι, όταν λιώσουν τελείως τα παγάκια.

6. Θέλουμε να κατασκευάσουμε από μέταλλο ένα «παξιμάδι», δηλαδή ένα ορθό εξαγωνικό πρίσμα με βάση κανονικό εξαγώνο πλευράς $a = 5$ mm και ύψους $\beta = 3$ mm με κυλινδρική οπή στο κέντρο διαμέτρου $d = 8$ mm.

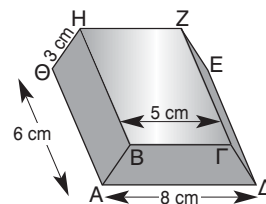


- α) Να υπολογίσετε τον όγκο V_1 του ορθού εξαγωνικού πρίσματος, τον όγκο V_2 της κυλινδρικής οπής και τον όγκο V του «παξιμαδιού».
 β) Αν το μέταλλο κοστίζει 8.000 € ανά κυβικό μέτρο και η εργασία κατασκευής του παξιμαδιού είναι 230 € ανά χιλιάδα, να υπολογίσετε το κόστος για την κατασκευή 20.000 τέτοιων «παξιμαδιών».

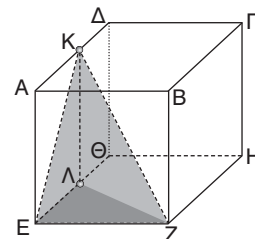
7. Η σκηνή του ινδιάνου έχει το σχήμα κώνου, με ύψος 2,4 m και όγκο $1,23$ m³. Πόσο ύφασμα χρειάστηκε ο ινδιάνος για να φτιάξει τη σκηνή του;

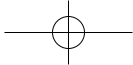


8. Μία ράβδος χρυσού ΑΒΓΔΕΖΗΘ είναι ένα στερεό πρίσμα με βάση ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ και διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας ΔΕΘΓ.



9. Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο της πυραμίδας ΚΛΕΖ, αν γνωρίζετε ότι το ΑΒΓΔΕΖΗΘ είναι κύβος ακμής 5 cm και τα Κ, Λ μέσα των πλευρών ΑΔ και ΕΘ αντίστοιχα.



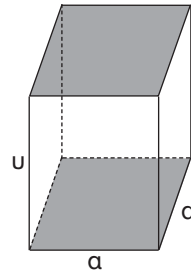


Ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης

■ ΑΣΚΗΣΗ 1:

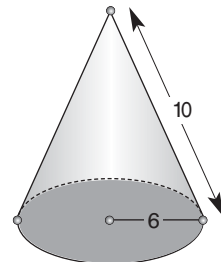
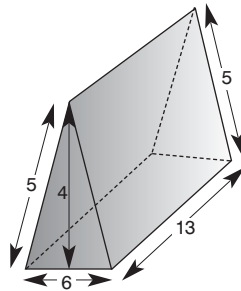
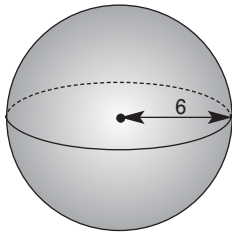
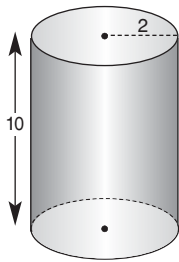
Το πρίσμα του παρακάτω σχήματος έχει βάση τετράγωνο πλευράς a και ύψος u . Αν E είναι το ολικό εμβαδόν του πρίσματος και V ο όγκος του, να συμπληρώσετε τα κενά στις στήλες του παρακάτω πίνακα:

$a =$	3	4	2	
$u =$	5			4
$E =$		64		
$V =$			80	100



■ ΑΣΚΗΣΗ 2:

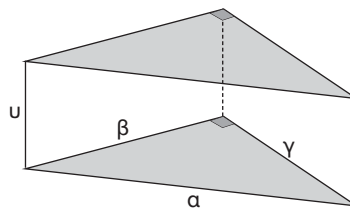
Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο των παρακάτω στερεών σωμάτων:

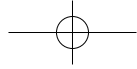


■ ΑΣΚΗΣΗ 3:

Το πρίσμα του παρακάτω σχήματος έχει ύψος u και βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές β , γ και υποτείνουσα a . Αν E είναι το ολικό εμβαδόν του πρίσματος και V ο όγκος του, να συμπληρώσετε τα κενά στις στήλες του παρακάτω πίνακα:

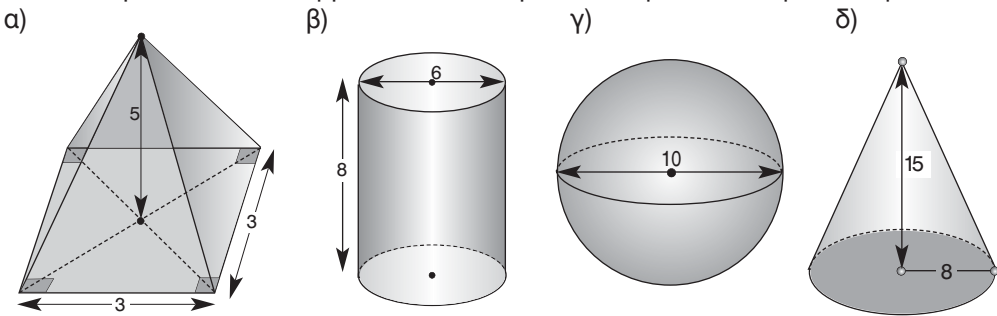
$a =$		13	10	
$\beta =$	4		6	8
$\gamma =$	3	5		15
$u =$	4	3	2	
$E =$				
$V =$				120





ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο των παρακάτω στερεών σωμάτων:



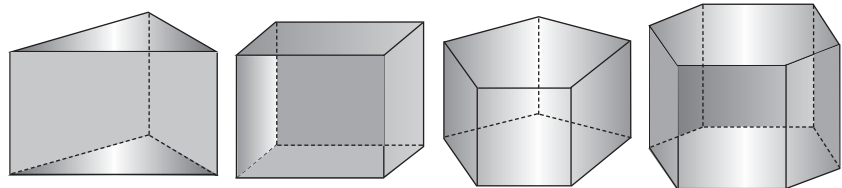
Παραδείγματα διδασκαλίας με φύλλο εργασίας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Ενότητα: Πρίσμα – Κύλινδρος. Ανάλογα ποσά. Γραφική παράσταση ευθείας.
Στόχοι: Η εμπέθυνση των μαθητών στην ενοποιητική έννοια της αναλογίας και της γραμμικότητας διαφόρων μεγεθών, η εξάσκησή τους στη μετάβαση από το μερικό στο γενικό και στη χρησιμοποίηση γραμμικού μοντέλου αναπαράστασης.
Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική).

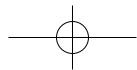
• Φύλλο εργασίας •

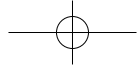
1. α) Δίνονται τα παρακάτω τέσσερα πρίσματα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:



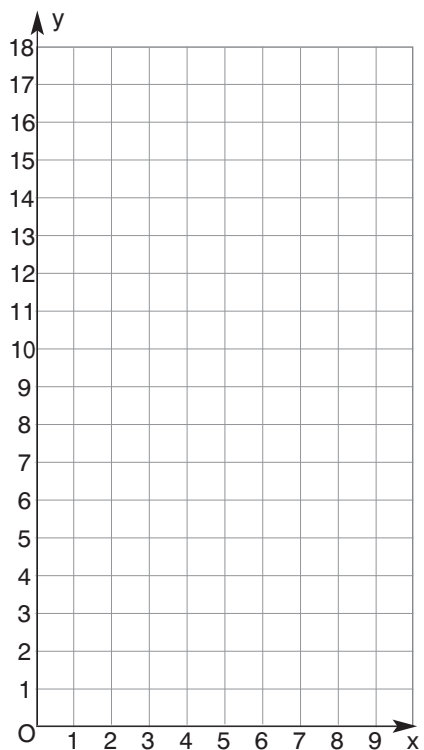
	τριγωνικό	τετραπλευρικό	πενταγωνικό	εξαγωνικό
πλήθος πλευρών της βάσης x	3	4	5	6
πλήθος ακμών y	9			
πλήθος των κορυφών ω	6			
πλήθος εδρών z	5			

- β) Τα μεγέθη x και y είναι γιατί ο λόγος
 Η σχέση που εκφράζει το y ως συνάρτηση του x είναι η $y =$
- γ) Τα μεγέθη x και ω είναι γιατί ο λόγος
 Η σχέση που εκφράζει το ω ως συνάρτηση του x είναι η $\omega =$
- δ) Τα μεγέθη x και z δεν είναι γιατί ο λόγος
 Η σχέση που εκφράζει το z ως συνάρτηση του x είναι η $z =$





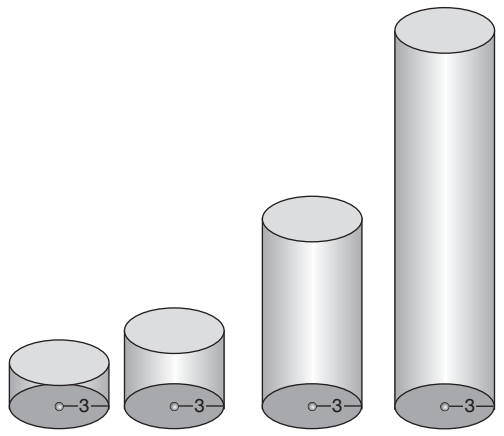
- ε) Να βρείτε το πλήθος των ακμών, των κορυφών και των εδρών ενός πρίσματος με βάση κανονικό εικοσιπεντάγωνο.
.....
- στ) Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει πρίσμα με 101 ακμές.
.....
- ζ) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων:
Να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) τα οποία ανήκουν στην ευθεία
.....
Επίσης να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (x, ω) τα οποία ανήκουν στην ευθεία
.....
Επίσης να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (x, z) τα οποία ανήκουν στην ευθεία
.....
- η) Ένα πρίσμα έχει 64 κορυφές. Πόσες έδρες και πόσες ακμές έχει;
- θ) Ένα πρίσμα έχει 52 έδρες. Πόσες ακμές έχει;



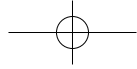
2. Οι διπλανοί κύλινδροι έχουν όλοι ακτίνα βάσης $\rho = 3\text{cm}$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

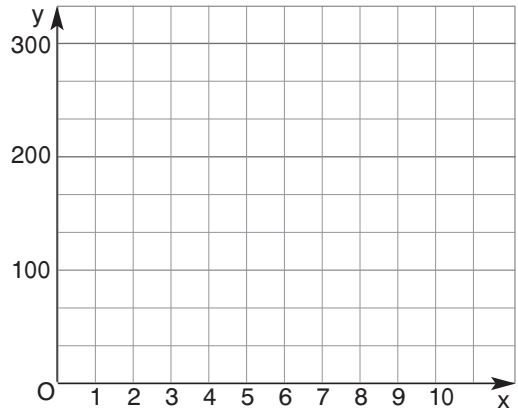
ύψος κυλίνδρου u	1	2	5	10
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας E_{π}				
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$				
όγκος κυλίνδρου V				



- β) Τα μεγέθη u και E_{π} είναι
γιατί ο λόγος
Η σχέση που εκφράζει το E_{π} ως συνάρτηση του u είναι η $E_{\pi} =$
- γ) Τα μεγέθη u και V είναι γιατί ο λόγος
Η σχέση που εκφράζει το V ως συνάρτηση του u είναι η $V =$
- δ) Τα μεγέθη u και $E_{ολ}$ δεν είναι γιατί ο λόγος
Η σχέση που εκφράζει το $E_{ολ}$ ως συνάρτηση του u είναι η $E_{ολ} =$



ε) Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα μη κανονικό σύστημα συντεταγμένων (οι μονάδες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ δεν έχουν το ίδιο μήκος):
 Να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (u, E_{π}) τα οποία ανήκουν στην ευθεία
 Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή.
 Επίσης να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (u, V) τα οποία ανήκουν στην ευθεία
 Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή.
 Επίσης να τοποθετήσετε τα σημεία με συντεταγμένες (u, E_{ω}) τα οποία ανήκουν στην ευθεία Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή.



■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

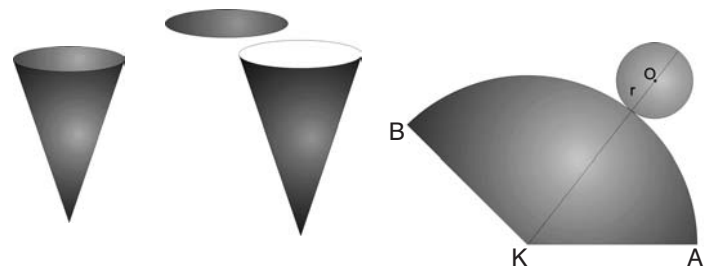
Ενότητα: Εμβαδόν – Όγκος κώνου.

Στόχοι: Να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν εμβαδά και όγκους κώνων και να τα εφαρμόζουν σε πρακτικά προβλήματα.

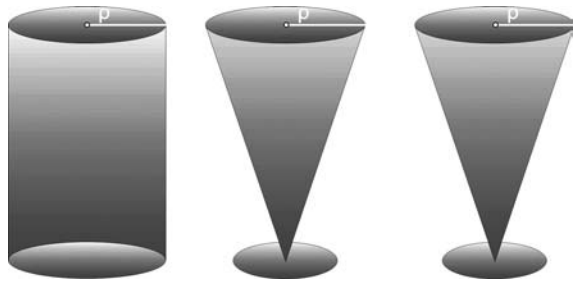
Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική)

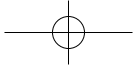
• Φύλλο εργασίας •

1. «Ξεδιπλώστε» έναν κώνο στο ακόλουθο επίπεδο σχήμα κυλώντας τον στο επίπεδο. Υπολογίστε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου, αν $\angle AKB = 120^\circ$ και $KB = 10 \text{ cm}$.

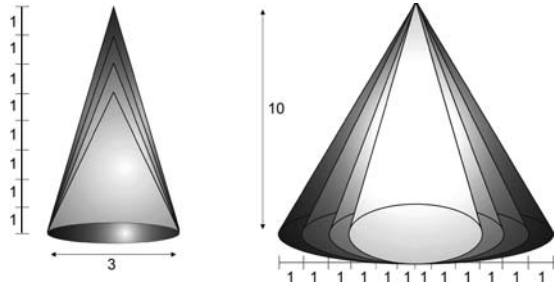


2. Στο κυλινδρικό δοχείο ο Μιχαλάκης έχει αναψυκτικό για τους φίλους του: τον Αλέκο, τη Μπόννη, τον Βασίλη και τη Μπούλα. Πόσοι από τους φίλους του θα πιουν αναψυκτικό, αν ο Μιχαλάκης γεμίζει ποτήρια όπως αυτά του διπλανού σχήματος;





3. α) Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο καθενός από τους τέσσερις κώνους των δύο σχημάτων.
- β) Τι αναλογία ακολουθούν;
- γ) Μπορείτε να γενικεύσετε το συμπέρασμα;



4. Για να φτιάξουμε το κάλυμμα ενός πολύφωτου, γνωστού ως αμπαζούρ (abat – jour), χρησιμοποιούμε ειδικό πάπυρο. Το σχήμα του καλύμματος αυτού ουσιαστικά προκύπτει από τη διαφορά δύο κώνων.

- α) Σχεδιάστε τους δύο κώνους των οποίων η διαφορά σχηματίζει το κάλυμμα.
- β) Αν ο μεγάλος κώνος έχει ύψος 70 cm και ακτίνα βάσης 15 cm, ενώ ο μικρός έχει ύψος 20 cm και ακτίνα βάσης 10 cm, πόσο είναι το εμβαδόν του παπύρου που χρειαζόμαστε; Αν ο πάπυρος κοστίζει 30 € το τετραγωνικό μέτρο, πόσο θα κοστίσει το κάλυμμα;
- γ) Μέσα στο φωτιστικό αυτό τοποθετούμε μία λάμπα 60 Watt. Για να υπολογίσουμε τα τετραγωνικά μέτρα S που φωτίζει επαρκώς η λάμπα, χρησιμοποιούμε τον τύπο: $S = \sqrt{V}$.
Να βρείτε σε τι δωμάτιο μπορούμε να τη τοποθετήσουμε, ώστε να το φωτίζει πλήρως.



■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:

Ενότητα: Εμβαδόν – Όγκος σφαίρας.

Στόχοι: Να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν εμβαδά και όγκους σφαιρών και να τα εφαρμόζουν σε πρακτικά προβλήματα.

Μέθοδος: Μεικτή (καθοδηγούμενη – ανακαλυπτική)

• Φύλλο εργασίας •

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σ** (σωστή) ή **Λ** (λανθασμένη), χωρίς να κάνετε υπολογισμούς.

Μια σφαίρα διαμέτρου 1 m:

- α) έχει εμβαδόν:

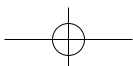
- μεγαλύτερο από π m²
- ίσο με π m²
- μικρότερο από π m²

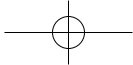
- β) έχει όγκο:

- μεγαλύτερο από 1 m³
- ίσο με 1 m³
- μικρότερο από 1 m³

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



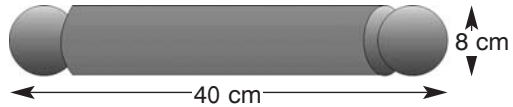


108

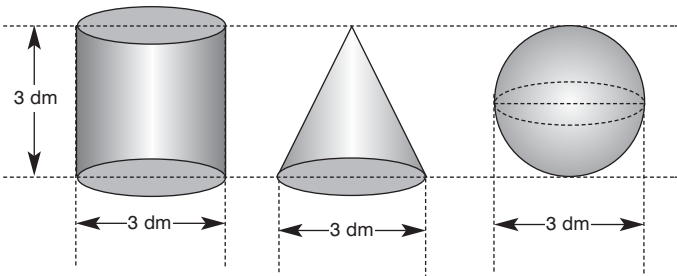
Μέρος Β' - Κεφάλαιο 4ο - Γεωμετρικά στερεά - Μέτρηση στερεών

2. Η ακτίνα της γήινης σφαίρας είναι περίπου 6.400 Km. Να υπολογίσετε:
- το μήκος του ισημερινού.
 - το εμβαδόν της επιφάνειας της Γης.
 - τον όγκο της Γης.

3. Ο ξύλινος πλάστης ζαχαροπλαστικής της Μαιρούλας αποτελείται από ένα κύλινδρο και δύο σφαίρες στα άκρα με διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Να υπολογίσετε τον όγκο του πλάστη.
 - Να υπολογίσετε το βάρος του πλάστη, αν γνωρίζουμε ότι 1 cm^3 ξύλου ζυγίζει 0,5 g.
4. α) Να υπολογίσετε τους όγκους V_1, V_2, V_3 της σφαίρας, του κυλίνδρου και του κώνου αντίστοιχα.
- β) Να συγκρίνετε τους όγκους $V_2, V_1 + V_3$. Τι παρατηρείτε και πώς το εξηγείτε;



Υποδειγματικές λύσεις ασκήσεων

4.2

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η συνολική επιφάνεια του δωματίου αποτελείται από δύο τοίχους διαστάσεων 4m, 3m και δύο τοίχους διαστάσεων 5m, 3m.

Οπότε $E = 2(4 \cdot 3) + 2(5 \cdot 3)$ ή $E = 54 \text{ m}^2$.

Αφού ένα κιλό χρώματος καλύπτει 9 m^2 , συνολικά θα χρειαστούν $\frac{54}{9} = 6$ κιλά χρώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $E_{\text{ολ}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot u = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5$ ή $E_{\text{ολ}} = 150,72 \text{ cm}^2$.

β) Αφού η διάμετρος είναι 4 cm, τότε η ακτίνα είναι 2 cm.

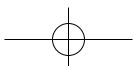
$$E_{\text{ολ}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot u = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \text{ ή } E_{\text{ολ}} = 100,48 \text{ cm}^2.$$

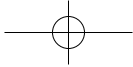
γ) Αφού η περίμετρος της βάσης είναι 15,7 cm, τότε $2\pi r = 15,7$ ή $r = 2,5 \text{ cm}$.

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot u = 2\pi \cdot 2,5^2 + 2\pi \cdot 2,5 \cdot 32 = 541,65 \text{ cm}^2.$$

δ) Αφού το εμβαδόν της βάσης είναι $50,24 \text{ cm}^2$, τότε $\pi r^2 = 50,24$ ή $r^2 = \frac{50,24}{3,14}$ ή $r = 4 \text{ cm}$ και το ύψος είναι $2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$.

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot u = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 20 = 602,88 \text{ cm}^2.$$





4.3

ΑΣΚΗΣΗ 3

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας για το τετραγωνικό πρίσμα είναι $E_{\pi} = 4a \cdot u$, όπου a η πλευρά του τετραγώνου.

Αφού το ολικό εμβαδόν του πρίσματος είναι τριπλάσιο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας έχουμε:

$$E_{ολ} = 3E_{\pi} \text{ ή } E_{\pi} + 2E_{\beta} = 3E_{\pi} \text{ ή } 2E_{\beta} = 2E_{\pi} \text{ ή } E_{\beta} = E_{\pi} \text{ ή } a^2 = 4a \cdot u, \text{ άρα } a = 4u.$$

4.4

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας θα είναι $E_{\beta} = 12^2$ ή $E_{\beta} = 144 \text{ cm}^2$.

Άρα ο όγκος της πυραμίδας είναι $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης) \cdot ύψος ή $V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 10$
ή $V = 480 \text{ cm}^3$.

4.5

ΑΣΚΗΣΗ 6

Το στερεό που σχηματίζεται έχει όγκο ίσο με το άθροισμα των όγκων των δύο κώνων. Συνεπώς:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot u_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot u_2 = \frac{1}{3} 3,14 \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{3} 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 = 335 \text{ cm}^2.$$

4.6

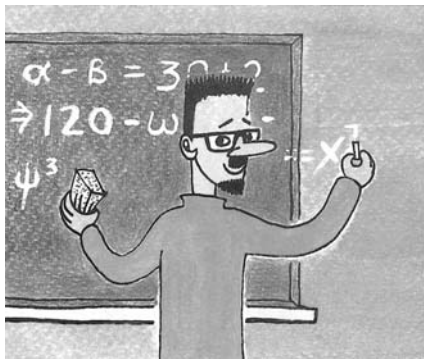
ΑΣΚΗΣΗ 7

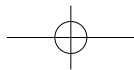
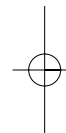
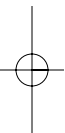
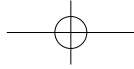
Ο όγκος της σφαίρας είναι $V_{\sigma\phi} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 40^3$ ή $V_{\sigma\phi} = 267946,67 \text{ (cm}^3\text{)}$.

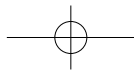
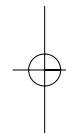
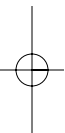
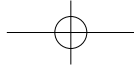
Η διάμετρος της σφαίρας είναι ίση με το μήκος a της πλευράς του κύβου. Άρα ο όγκος του κύβου είναι $V_{\kappa} = a^3 = (2 \cdot 40)^3$ ή $V_{\kappa} = 512000 \text{ (cm}^3\text{)}$.

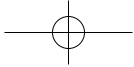
Συνεπώς το μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο είναι

$$V = V_{\kappa} - V_{\sigma\phi} = 512000 - 267946,67 \text{ ή } V = 244053,33 \text{ (cm}^3\text{)}.$$









Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α').

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

