

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = xe^x$

1. Να βρείτε την παράγωγο της $\varphi(x)$
2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος και την τιμή του ακροτάτου.

3. να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\varphi'(x)}{x^2 - 1}$

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \varphi(x) dx$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - 1} & \text{αν } x > 1 \\ \alpha \cdot \sqrt{x^2 + 3} & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$

Να υπολογίσετε:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$
3. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε η φ να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
4. Αν $\alpha = -1$ να βρείτε την παράγωγο της φ για $x < 1$.
5. Για την παραπάνω τιμή της παραμέτρου να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \varphi(3) - 2\varphi'(-1) - \sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου το οποίο μετάβάλεται με το χρόνο (όπου $0 \leq t \leq 10$) είναι

$$E'(t) = 2t - 10 \frac{m^2}{sec}$$

1. Να βρείτε το εμβαδό E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του χρόνου t , αν γνωρίζετε ότι το εμβαδό του τη χρονική στιγμή $t = 1sec$, είναι $21m^2$. στη συνέχεια για την παραπάνω συνάρτηση εμβαδού, να βρείτε :

- i) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό γίνεται ελάχιστο, καθώς και το ελάχιστο εμβαδό.
- ii) Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το εμβαδό ελαττώνεται.
- iii) το ολοκλήρωμα $\int_0^1 E'(t) dt$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = -x^3 + \beta x^2 - \alpha x + 2$ $\alpha, \beta \in R$

Αν γνωρίζετε ότι η φ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ την τιμή $\varphi(1) = -1$. Να υπολογίσετε:

1. τις τιμές των παραμέτρων α και β
2. Για $\alpha = 7$ και $\beta = 5$
Να μελετήσετε τη φ ως προς τη μονοτονία.
3. Για $\alpha = 7$ και $\beta = 5$
Να βρείτε τις θέσεις, το είδος των ακροτάτων και την ελάχιστη τιμή της φ
4. Για $\alpha = 7$ και $\beta = 5$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \varphi(x) dx$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x - x - 1, x > 0$

1. Να βρείτε την παράγωγο της φ .
2. Να μελετήσετε τη φ ως προς τη μονοτονία
3. Να βρείτε τη θέση το είδος και την τιμή του ακροτάτου.
4. Να δείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$
5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

ΘΕΜΑ 6^ο

Οι ημέρες απουσίας 20 μαθητών του 1ου ΕΠΑΛ Τρικάλων το μήνα Νοέμβριο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα .

Ημέρες Απουσίας x_i	Μαθητές v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$
0	6				
1	4				
2	2				
3	4				
4	3				
5					
Αθροίσματα					

2



1. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή , τη διάμεσο , την επικρατούσα τιμή , το εύρος, του παραπάνω στατιστικού δείγματος.
3. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
4. Να βρείτε το ποσοστό και το πλήθος των μαθητών που απουσίασαν
α) τουλάχιστον 3 ημέρες
β) το πολύ 1 ημέρα.

ΘΕΜΑ 7^ο

Οι τιμές πώλησης σε ευρώ, για ένα προϊόν σε 5 διαφορετικά καταστήματα είναι:

1, 2, 3, 4, 5 . Να υπολογίσετε :

- α) τη μέση τιμή, τη διάμεσο, και το εύρος των παραπάνω τιμών.
- β) τη διακύμανση , την τυπική απόκλιση .
- γ) το συντελεστή μεταβολής.
- ε) είναι το δείγμα ομοιογενές;

Δίνεται $\sqrt{2} \approx 1,4$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων

Τιμές X_i	v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$X_i v_i$
1	14				
2	20				
3	6				
4	3				
5	7				
Αθροίσματα					

1. Να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος των παρατηρήσεων.
3. Αν από τον παραπάνω πίνακα αφαιρέσουμε 5 παρατηρήσεις με τιμή 2 και 5 παρατηρήσεις με τιμή 1, να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή.

ΘΕΜΑ 9^ο

A) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν λογικές μαθηματικές εκφράσεις.

3

1. Στη στατιστική για τη σύνταξη πινάκων συλλέγονται στοιχεία που αναφέρονται σε σύνολα αντικειμένων (έμφυχων, η άφυχων), το σύνολο αυτό των αντικειμένων ονομάζεται
2. Το πλήθος των ατόμων ενός πληθυσμού ονομάζεται του συμβολίζεται με
3. Ένας πληθυσμός εξετάζεται ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του. Το χαρακτηριστικό του αυτό ονομάζεται
4. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες τις των οποίων τα χαρακτηριστικά μπορούν να μετρηθούν και στις των οποίων τα χαρακτηριστικά δεν επιδέχονται μέτρηση.
5. Η εξέταση όλων των ατόμων ενός πληθυσμού ως προς κάποιο χαρακτηριστικό λέγεται
6. Η εξέταση ενός δείγματος του πληθυσμού λέγεται
7. Τον αριθμό των εμφανίσεων μίας τιμής ονομάζουμε Της τιμής ή απλά της τιμής και συμβολίζεται με

B) Αν x_i είναι η τιμή μίας μεταβλητής X ενός στατιστικού δείγματος μεγέθους n να διατυπώσετε τους ορισμούς

1. της συχνότητας
2. της σχετικής συχνότητας
3. της αθροιστικής συχνότητας
4. της αθροιστικής σχετικής συχνότητας της τιμής x_i της μεταβλητής X .

ΘΕΜΑ 10^ο

A) Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου ενός στατιστικού δείγματος μεγέθους n .

B) Να γράψετε τον ορισμό της επικρατούσας τιμής μιας μεταβλητής X ενός στατιστικού δείγματος μεγέθους n .

Γ) Αν X η μεταβλητή με τιμές x_1, x_2, \dots, x_k και αντίστοιχες συχνότητες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

v_1, v_2, \dots, v_k , τότε να γράψετε με τι ισούται η μέση τιμή της μεταβλητής X
Δ) Αν X η μεταβλητή με τιμές $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ και αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k , και μέση τιμή $\bar{\chi}$, να γράψετε με τι ισούται η διακύμανση s^2 της μεταβλητής X .

Ε) Ένα εξεταζόμενο δείγμα ως προς μία ποσοτική μεταβλητή παρουσιάζει μέση τιμή $\bar{\chi}$ και τυπική απόκλιση s . Να γράψετε με τι ισούται ο συντελεστής μεταβολής CV

ΘΕΜΑ 11^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι Σωστές, με Λάθος αν είναι λανθασμένες.

1. Η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή είναι παράμετροι θέσης.
2. Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές.
3. Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές και εξαρτάται από όλες τις τιμές της μεταβλητής.
4. Το εύρος, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση, είναι παράμετροι διασποράς.
5. Ισχύει $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 1$, που v_1, v_2, \dots, v_k οι συχνότητες αντίστοιχα των τιμών $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ της μεταβλητής X .
6. Ισχύει $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$, όπου f_1, f_2, \dots, f_k οι σχετικές συχνότητες αντίστοιχα των τιμών $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ της μεταβλητής X .

4

ΘΕΜΑ 12^ο

Οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής είναι $4\chi, 8 + \chi, 13, 13, 15, 9\chi, 14, 14, 9, 16$, όπου $\chi \in R$. με $\chi > 0$.

Αν η μέση τιμή ισούται με $\bar{\chi} = 13$, να υπολογίσετε.

1. την τιμή του χ .
2. για $\chi = 2$ να υπολογίσετε τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή
3. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.
4. είναι το δείγμα ομοιογενές; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

ΘΕΜΑ 13^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 5sx + 3\bar{x}$, $x \in R$ και s, \bar{x} είναι η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής ενός στατιστικού δείγματος, (με $\bar{\chi} > 0$)

Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και η μέση τιμή του δείγματος είναι διπλάσια της τυπικής απόκλισης, να βρείτε.

1. Το συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.
2. Τη μέση τιμή ($\bar{\chi}$) και την τυπική απόκλιση (s) του δείγματος.
3. Στη συνέχεια αν $\bar{\chi} = 2$ και $s = 1$ να υπολογίσετε

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2}\varphi(x)}{\sqrt{\chi} - \sqrt{2}}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της φ

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ και τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 14^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων

x_i	v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
-1			10	4
0		30		
2				
3	6			
Αθροίσματα				

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

2. να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων του παραπάνω πίνακα.

ΘΕΜΑ 15^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων

x_i	συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
1		20				
2		30				
4		45				
6		50				
Αθροίσματα						

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των παρατηρήσεων του παραπάνω πίνακα.

ΘΕΜΑ 16^ο

Η βαθμολογία 20 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

5, 9, 7, 9, 7, 5, 7, 7, 9, 5, 7, 4, 9, 5, 7, 5, 4, 7, 5, 5

τιμές x_i	συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
Αθροίσματα						

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

1. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
2. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
3. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.
4. Να βρείτε
α) το πλήθος και το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βαθμό τουλάχιστον 5
β) το ποσοστό και το πλήθος των φοιτητών που πήραν το πολύ 7.

ΘΕΜΑ 17°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$

1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x)$
3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f, g

ΘΕΜΑ 18°

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{\mu x}, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε την $\varphi'(x)$ και $\varphi''(x)$
2. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου μ , αν γνωρίζετε ότι ισχύει $\varphi''(x) + \varphi'(x) - 6e^{\mu x} = 0$
3. Για $\mu = 2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - 1}{e^x - 1}$
4. Για $\mu = 2$ να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+1} dx$

ΘΕΜΑ 19°

Δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{1 - x^2} & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2} & \text{αν } x = 1 \\ \ln x + \frac{3}{2}x^2 - \mu x & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$
2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$
3. Να υπολογίσετε το μ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$
4. Αν $\mu = 3$ να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 1$
5. για $x > 1$ και $\mu = 3$ να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\varphi(x)$.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ 20^ο

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow X_0} g(x)$ και είναι $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν λογικές μαθηματικές.

1. $\lim_{x \rightarrow X_0} (f(x) + g(x)) = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow X_0} (f(x) \cdot g(x)) = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots l_2 \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \dots\dots\dots$
5. $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)^v = \dots\dots\dots v \in \mathbb{N}^*$



ΘΕΜΑ 21^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι Σωστές, με Λάθος αν είναι λανθασμένες

1. Αν $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = l$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow X_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow X_0^+} f(x) = l$
2. Μία συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του A .
3. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχής στο \mathbb{R}
4. Αν $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της
5. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

7

ΘΕΜΑ 22^ο

A.) 1. Να γράψετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

2. Θεωρούμε μία συνάρτηση φ ορισμένη στο (α, β) . Να γράψετε τον ορισμό της συνέχειας της φ στο (α, β) .

3. Θεωρούμε μια συνάρτηση $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να γράψετε τον ορισμό της συνέχειας της φ στο $[\alpha, \beta]$

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι Σωστές ή με Λάθος αν είναι λανθασμένες.

1. Έστω η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow X_0} \varphi(x) = x_0 = \varphi(x_0)$ δηλαδή φ είναι συνεχής στο \mathbb{R}

2. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}

3. Αν οι συναρτήσεις $\varphi, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε η συνάρτηση $h(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0

4. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (εφόσον ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων) είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της σύνθεσης

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')**ΘΕΜΑ 23^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha \frac{x^2}{2} + \beta x + \sqrt{2}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα $x = 1$ και $x = -2$ να υπολογίσετε:

1. Τις τιμές των παραμέτρων α, β
2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος των ακροτάτων.

ΘΕΜΑ 24^ο

Δίνεται συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{αν } x < 2 \\ \frac{4x-1}{4x^2+7x-2} & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{να υπολογίσετε}$$

1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
3. Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ΘΕΜΑ 25^ο

8

Ένα κατάστημα πουλάει διάφορα προϊόντα. Το κέρδος $K(x)$ (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση x προϊόντων σε ένα μήνα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = -x^3 + 15x^2 + 600x - 300, \quad 0 < x < 30$$

1. Να υπολογίσετε το κέρδος από την πώληση 10 προϊόντων.
2. Να βρείτε τον αριθμό των προϊόντων που πρέπει να πουληθούν σ' ένα μήνα ώστε το κατάστημα να έχει μέγιστο κέρδος καθώς και το μέγιστο κέρδος.
3. Πότε το κέρδος από την πώληση των προϊόντων αυξάνεται και πότε ελαττώνεται;
4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής του κέρδους.

ΘΕΜΑ 26^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε τη παράγωγο και τα ακρότατα της συνάρτησης f
2. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 + x \ln(x+1)}{x}$$

3. Να βρείτε την παράγουσα F της f αν γνωρίζετε ότι $F(1) = 1$
4. Αν $h(x) = e^x f'(x)$ να δείξετε ότι $h''(x) - 12e^x = h(x)$

ΘΕΜΑ 27^ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^2 + \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ και η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$,

να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β

2. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ να υπολογίσετε το εμβαδό του

χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

ΘΕΜΑ 28^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x + 2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της φ
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \varphi(x)$
3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης φ

ΘΕΜΑ 29^ο

1. Να διατυπώσετε το ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι Σωστές ή με Λάθος αν είναι λανθασμένες.
 - i) Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
 - ii) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
 - iii) Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
 - iv) Αν δύο μεγέθη χ, ψ συνδέονται με τη συνάρτηση $\psi = f(\chi)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε η παράγωγος στο χ_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους ψ ως προς χ , για τη συγκεκριμένη τιμή $\chi = \chi_0$

9

ΘΕΜΑ 30^ο

1. Έστω μία συνάρτηση $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Να γράψετε τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης φ στο (α, β)
2. Έστω μία συνάρτηση $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να γράψετε τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης φ στο $[\alpha, \beta]$
3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν λογικές μαθηματικές εκφράσεις
 1. $(c)' = \dots$ (c σταθερά)
 2. $(\chi)' = \dots$
 3. $(\chi^\alpha)' = \dots$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*, \chi > 0$
 4. $(\eta\mu\chi)' = \dots$
 5. $(\sigma\upsilon\nu\chi)' = \dots$
 6. $(e^x)' = \dots$
 7. $(\ln(x))' = \dots$

ΘΕΜΑ 31^ο

- A) Έστω μία συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε παράγουσα της f στο Δ ;
- B) 1. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο κοινό τους πεδίο ορισμού Δ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν οι αντίστοιχοι κανόνες παραγωγίσισης.
1. $(f + g)'(x) = \dots$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

2. $(f - g)'(x) = \dots\dots\dots$

3. $(cf)'(x) = \dots\dots\dots$

4. $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ όπου $g(x) \neq 0$

6. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow R$ και $g : B \rightarrow R$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει: $(g \circ f)'(x) = \dots\dots\dots$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow R$, με Δ διάστημα του R και F μία παράγουσα της f . Τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f είναι της μορφής $\dots\dots\dots$ όπου c σταθερά.

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε για κάθε περίπτωση να προκύπτει η παράγουσα F της f .

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
0	
1	
$x^a, a \neq -1, x > 0$	
$\frac{1}{x}, x > 0$	
e^x	
συνχ	
ημχ	
$\frac{1}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2}, \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$	
$\frac{1}{(\eta\mu\chi)^2}, \chi \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$	

ΘΕΜΑ 32°

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε για κάθε περίπτωση να προκύπτει η παράγουσα F της f .

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$\frac{g'(x)}{g(x)^2}, g(x) \neq 0$	
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}, g(x) > 0$	
$\frac{g'(x)}{g(x)}, g(x) > 0$	
$g(x)^a g'(x), a \in R, a \neq 0, g(x) > 0$	
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	

ΘΕΜΑ 33°

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό αν είναι Σωστές ή με Λάθος αν είναι λανθασμένες

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow R$

1. Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

2. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β)
3. Μία συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοικτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
4. Μία συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοικτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
5. Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$
6. Αν μία συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ισχύει $\varphi'(x_0) = 0$ τότε η φ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
7. Έστω μία συνάρτηση φ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $\varphi'(x) \neq 0$, τότε η φ δεν έχει ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.
8. Έστω μία συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
9. Έστω μία συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
10. Έστω μία συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της. Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα (α, x_0) και (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

11

11 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f . Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν $f''(x_0) > 0$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν $f''(x_0) < 0$.

ΘΕΜΑ 34^ο

A) Να γράψετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$

B) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν λογικές μαθηματικές εκφράσεις

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

- $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots\dots\dots$ όπου c σταθερά
- $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx = \dots\dots\dots$ όπου $\alpha < \gamma < \beta$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \dots\dots\dots$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \dots\dots\dots$
- $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \dots\dots\dots$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots\dots\dots$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots\dots\dots$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \dots\dots\dots$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

9. Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \dots \dots \dots \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

ΘΕΜΑ 35^ο

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τον αριθμό των μηνυμάτων που στέλνουν 50 μαθητές κατά τη διάρκεια μιας ημέρας.

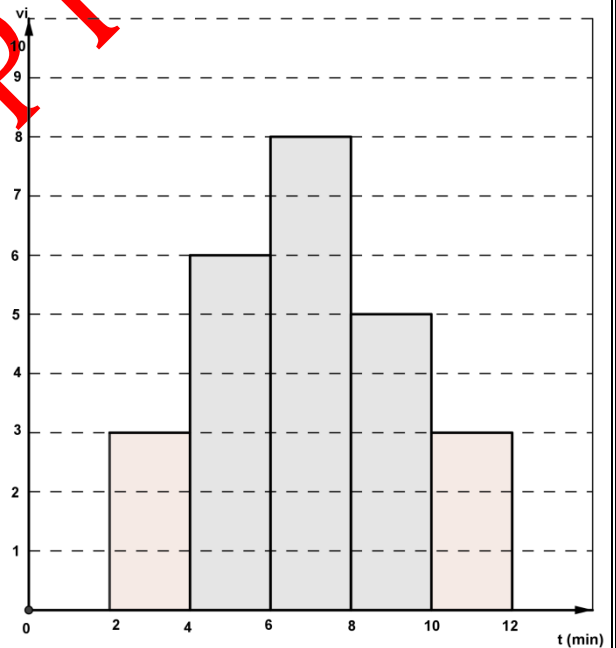
Μηνύματα X_i	συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$
[0, 2)	5			
[2, 4)	10			
[4, 6)	20			
[6, 8)	10			
[8, 10)				
Αθροίσματα				

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας
2. Να βρείτε το μέση τιμή αποστολής μνημάτων
3. Πόσοι μαθητές στέλνουν λιγότερα από 6 μηνύματα;
4. Να βρείτε τη διακύμανση της κατανομής,

ΘΕΜΑ 36^ο

Οι χρόνοι καθυστέρησης που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια Λεωφορείων του ΚΤΕΛ Τρικάλων Δίνονται στο διπλανό ιστόγραμμα.

1. Με τη βοήθεια του διπλανού ιστογράμματος να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας



Διάστημα	συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10, 12)					
Αθροίσματα					

2. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστέρησης των δρομολογίων

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

3. Πόσα δρομολόγια έχουν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

4. Ποιό ποσοστό δρομολογίων είχε καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

ΘΕΜΑ 37^ο

Μία δεξαμενή σε σχήμα οθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις, μήκος $\alpha = 2m$, πλάτος $\beta = 1m$, ύψος $\gamma = 2m$. Τη δεξαμενή αρχίζουμε να τη γεμίζουμε με νερό, όπου το ύψος της στάθμης του νερού

ως συνάρτηση του χρόνου t (min), είναι $h(t) = \frac{t^2}{36}$

1. Να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο $t = 3min$.

2. Να βρείτε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από t min.

3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού σε χρόνο $t = 9min$

4. Βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

ΘΕΜΑ 38^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 20\ln x - 10x^2, x > 0$.

1. Να βρείτε την παράγωγο f'

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

3. Για ποία τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο; Να βρείτε την τιμή του ακροτάτου.

4. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -10$ για κάθε $x > 0$

ΘΕΜΑ 39^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}, & x \geq 1 \\ x+1, & x < 1 \end{cases} \alpha \in R$

1. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = 1$

2. Για $a = 2$ να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

3. Για $a = 2$ να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

4. Για $a = 2$ να βρείτε την παράγωγο της f στο $x = 1$

ΘΕΜΑ 40^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

2. Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3. Να βρείτε την παράγωγο της f

4. Για $x > -1$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα



ΘΕΜΑ 41^ο

Αν η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με συνεχή δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\chi = -1$ με τιμή 3, ενώ η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $\varphi'(0) = 2$ να υπολογίσετε το

$$\int_{-1}^0 [2\varphi''(\chi) + 3\varphi'(\chi)] dx$$

ΘΕΜΑ 42^ο

Αν για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $f'(\chi) = 2\chi - 2$ και $f(1) = 2$

1. να βρείτε τη συνάρτηση f
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $\chi' \chi$ και τις ευθείες $\chi = -1$ και $\chi = 2$.

14

