ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ

Διαχείριση της διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ' τάξης Ημερησίου ΓΕΛ για το σχολικό έτος 2017-2018

Σύμφωνα με την αρ. πρωτ. 163573/Δ2/02-10-2017 εγκύκλιο του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

Μαθηματικά
Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής
Γ΄ τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ

Διδακτέα-Εξεταστέα ύλη και προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας ανά παράγραφο για το σχολικό έτος 2017-2018

Από το βιβλίο «Μαθηματικά» Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.ά. Μέρος Β΄

ΚΕΦ.	ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	ΩΡΕΣ
Κεφάλαιο 1^{o} **Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης**	1.1 – Πραγματικοί αριθμοί	1
	1.2 – Συναρτήσεις	3
	1.3 – Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση	4
	1.4 – Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	3
	1.5 – Ιδιότητες των ορίων, χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου «Τριγωνομετρικά όρια»	6
	1.6 – Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	4
	1.7 – Όρια συνάρτησης στο άπειρο	4
	1.8 – Συνέχεια συνάρτησης	12
Κεφάλαιο 2^{o} **Διαφορικός Λογισμός**	2.1 – Η έννοια της παραγώγου, χωρίς την υποπαράγραφο «Κατακόρυφη εφαπτομένη»	7
	2.2 – Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση χωρίς τις αποδείξεις των τύπων $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ στη σελίδα 106 και $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ στη σελίδα 107	2
	2.3 – Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων	5
	2.4 – Ρυθμός μεταβολής	4
	2.5 – Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού	4
	2.6 – Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής	6
	2.7 – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο 2^{ης} παραγώγου)	5

	2.8 – Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης. Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δυο τουλάχιστον φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους.	4
	2.9 – Ασύμπτωτες – Κανόνες De l' Hospital	4
	2.10 – Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	1
	Επαναληπτικές ασκήσεις	4
Κεφάλαιο 3^o **Ολοκληρωτικός Λογισμός**	3.1 – Αόριστο ολοκλήρωμα. Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση» που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος θα περιλαμβάνεται στις διδακτικές οδηγίες.	2
	3.4 – Ορισμένο ολοκλήρωμα	5
	3.5 – Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Υπόδειξη – οδηγία: Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό λογισμό. Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται στην συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και γενικότερα στη συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.	5
	3.7 – Εμβαδόν επιπέδου χωρίου, χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 230	4
	Επαναληπτικές ασκήσεις	4

Παρατηρήσεις

- Η διδακτέα-εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας Έρευνας και Θρησκευμάτων.
- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- Εξαιρούνται από την εξεταστέα-διδακτέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10.

Διαχείριση της Διδακτέας-Εξεταστέας ύλης
για το σχολικό έτος 2017-2018

Κεφάλαιο 1ο • Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

1.1 - Πραγματικοί αριθμοί. 1 ώρα

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ' υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

1.2 - Συναρτήσεις. 3 ώρες

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

Να τονιστεί ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με τη συνάρτηση μηδέν.

Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=x-|x|$ των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

1.3 - Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση. 4 ώρες

Α) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας 1-1 μέσα από γραφήματα.

Β) Στην άσκηση 3 (σελ. 38) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

Γ) Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις:

   i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$

   ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1>x_2$

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη των προτάσεων.

Απόδειξη :

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ και } x_1 \geq x_2$$

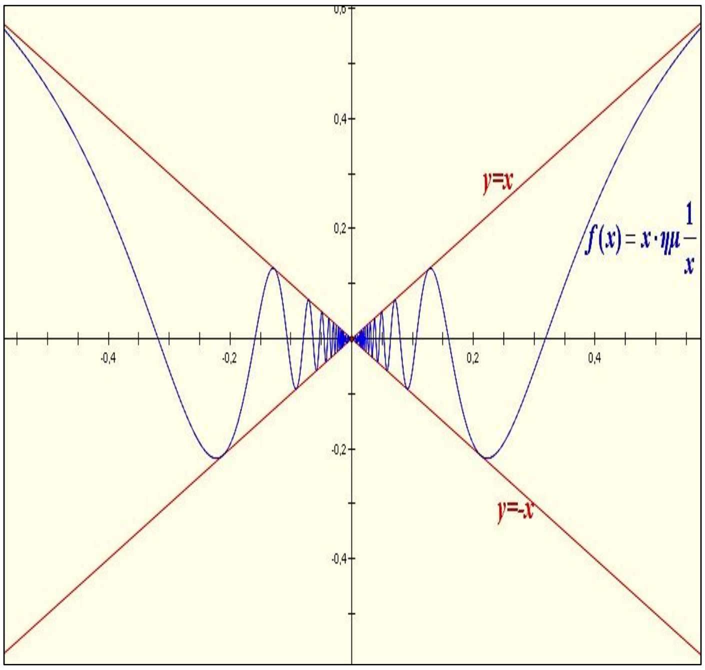
- Αν ήταν $x_1 > x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε: $f(x_1) > f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν $x_1 = x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε: $f(x_1) = f(x_2)$, που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

ii) Αντίστοιχη με την i.

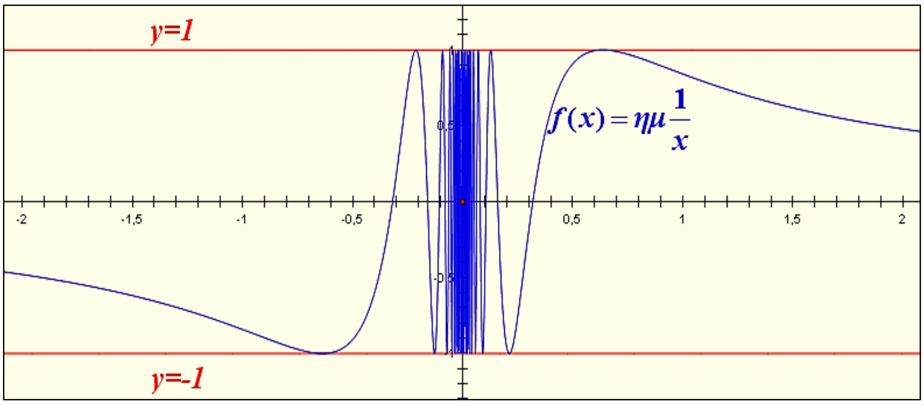
1.4 - Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$. 3 ώρες

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 43) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το x τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το x τείνει στο x_0 (σχολικό βιβλίο σελ. 40-42). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu\frac{1}{x}$ (Σχήμα 2).



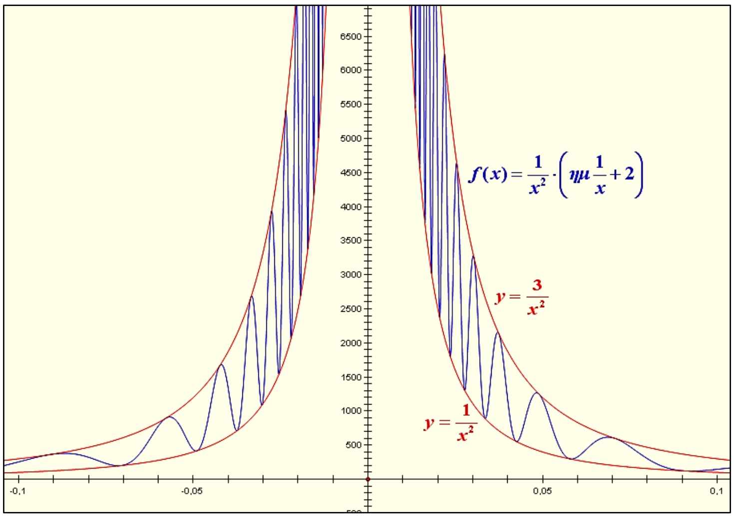
Σχήμα 2

1.5 - Ιδιότητες των ορίων.
Χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου «Τριγωνομετρικά όρι- **6 ώρες**

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-16}{x^3-8}$» (άσκηση 3i) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f(x)=\frac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x)=\frac{(x^2+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 57) να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

1.6 - Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0\in\mathbb{R}$. **4 ώρες**

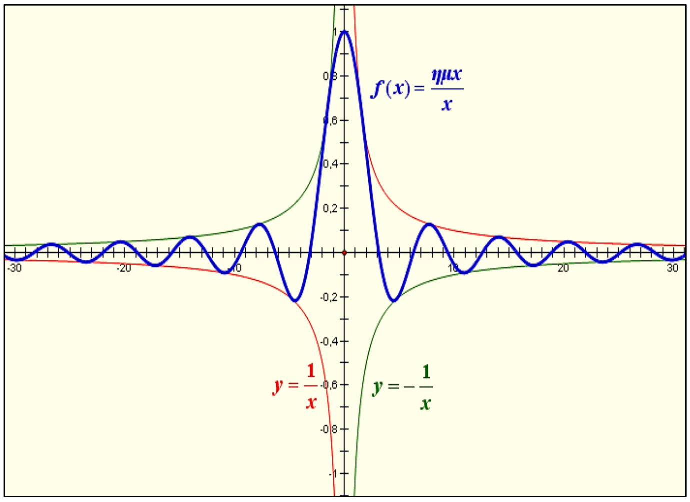
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^2}\left(\eta\mu\frac{1}{x}+2\right)$ (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

1.7 - Όρια συνάρτησης στο άπειρο. 4 ώρες

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο $+\infty$, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$



Σχήμα 4

Τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}$, να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο:

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0

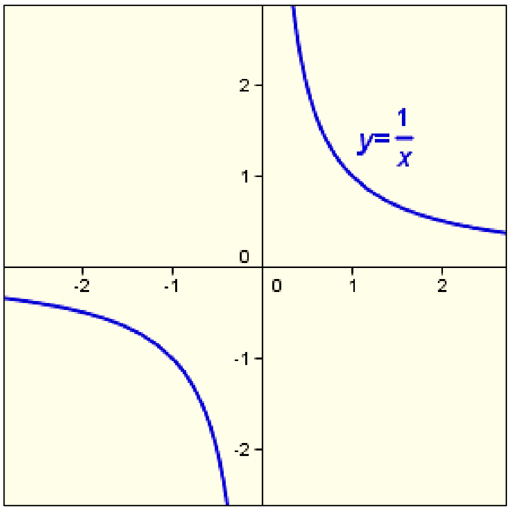
β) $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

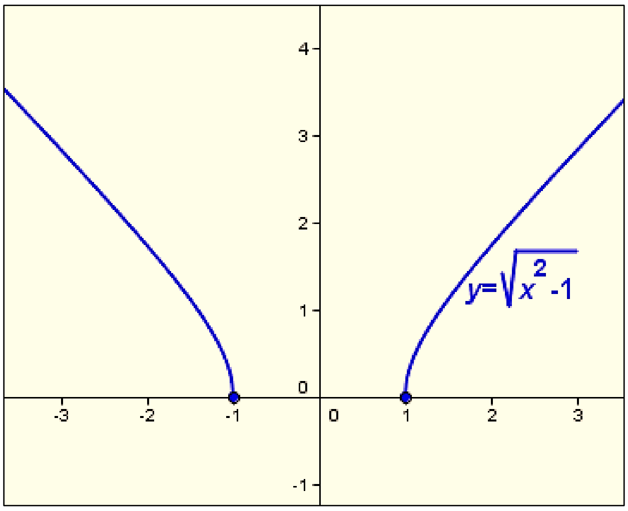
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων.

1.8 - Συνέχεια συνάρτησης. 12 ώρες

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (Σχήμα 6) και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 76). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος [α, β] του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο [α, β] και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του [α, β].

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα της σελίδας 78, τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

Κεφάλαιο 2ο • Διαφορικός Λογισμός

2.1 - Η έννοια της παραγώγου. Χωρίς την υποπαράγραφο «Κατακόρυφη εφαπτομένη». — 7 ώρες

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ. 96) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο O, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\le 0 \\ 0, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ στο σημείο O, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

2.2 - Παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Παράγωγος συνάρτηση χωρίς τις αποδείξεις των τύπων $(\text{ημ}x)'=\text{συν}\,x$ στη σελίδα 106 και $(\text{συν}\,x)'=-\text{ημ}x$ στη σελίδα 107. — 2 ώρες

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 107). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

2.3 - Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων. — 5 ώρες

Να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση της σελίδας 116 σχετικά με το ότι το σύμβολο $\dfrac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.

Στην εφαρμογή 2 (σελ. 118) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνωρίσανε στη γεωμετρία.

2.4 - Ρυθμός μεταβολής. 4 ώρες

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

2.5 - Θεώρημα Μέσης Τιμής διαφορικού λογισμού. 4 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το Θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του Θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στο [0,1] για όλες τις τιμές του λ. Έτσι φαίνεται ότι το Θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

2.6 - Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. 6 ώρες

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του πρόσημου του λόγου μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο Δ, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα Δ έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα Δ έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 135 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

2.7 - Τοπικά ακρότατα συνάρτησης. Χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο 2ης παραγώγου). **5 ώρες**

Μετά την εφαρμογή 2 σελίδα 148 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 α) i) της Β΄ Ομάδας σελίδα 152. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε x είναι $e^x \ge x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει $\ln x \le x-1$ και το «=» ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \le e^x - 1$ και το το «=» ισχύει μόνο για $e^x = 1$ δηλαδή $x=0$. Επομένως $x \le e^x - 1$ και το «=» μόνο για $x=0$. Άρα $e^x \ge x+1$ και το «=» μόνο για $x=0$.

2.8 - Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης. Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δυο τουλάχιστον φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους. **4 ώρες**

Να διατεθούν τέσσερις (4) διδακτικές ώρες

2.9 - Ασύμπτωτες - Κανόνες De l’ Hopital . **4 ώρες**

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De l' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\dfrac{0}{0}$». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

Να τονιστεί ότι οι κανόνες De l’ Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι, αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{και} \quad \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο.

Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=1$

<u>Δραστηριότητα</u>

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

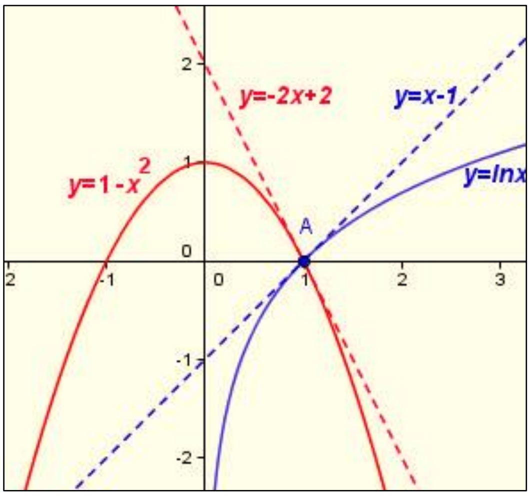
ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στο κοινό τους σημείο Α(1,0) είναι οι ευθείες ε: $y=x-1$ και ζ: $y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτόμενων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0=1$ η τιμή του πηλίκου $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\dfrac{x-1}{-2x+2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει: $\dfrac{\ln x}{1-x^2}\simeq\dfrac{x-1}{-2x+2}=\dfrac{x-1}{-2(x-1)}=\dfrac{1}{-2}$ που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών. Επομένως, «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει $\dfrac{f(x)}{g(x)}\simeq\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$ το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$

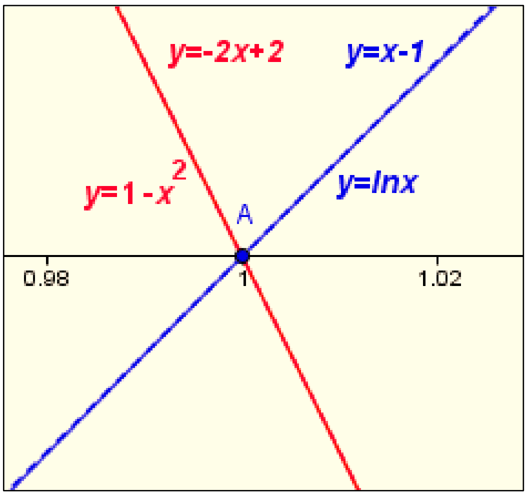
Σχόλιο

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτόμενων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=\ln x$ και $y=1-x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο Α(1,0). Θα παρατηρήσουμε ότι η $y=\ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=x-1$, ενώ η $y=1-x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=-2x+2$ (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Να τονιστεί ότι ενδέχεται μια συνάρτηση να τέμνει μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί (ευκταίο να δοθεί και το γράφημα) η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu\dfrac{1}{x}$ που έχει ασύμπτωτη την $y=x$ η οποία τέμνει την γραφική παράσταση σε άπειρα σημεία.

2.10 - Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. 1 ώρα

Να διατεθεί μια (1) διδακτική ώρα.

Οι τέσσερις (4) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Κεφάλαιο 3ο • Ολοκληρωτικός Λογισμός

3.1 - Αόριστο ολοκλήρωμα.
Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση» που συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων. **2 ώρες**

Α) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Β) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 187) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσα
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=\alpha^x$	$G(x)=\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbb{R}$

<u>Σημείωση:</u>

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 187 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση F + G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f + g και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

Οι εφαρμογές των σελίδων 188 και 189 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α' Ομάδας.

<u>Τυπογραφικό λάθος:</u> Στη διατύπωση του Θεωρήματος αντί $c \in \mathbb{R}$ να γραφεί G.

3.4 - Ορισμένο ολοκλήρωμα. 5 ώρες

Το πρώτο μέρος που αφορά τον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για τη εύρεση-υπολογισμού του εμβαδού. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα [α, β].

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- Αν, <u>επιπλέον</u>, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο [α, β] (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

<u>Τυπογραφική διόρθωση:</u> Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

3.5 - Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$. 5 ώρες

Η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_\alpha^x f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό <u>δε θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις</u> που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$ και γενικότερα στη συνάρτηση $\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt$

3.7 - Εμβαδόν επιπέδου χωρίου, χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 230. 4 ώρες

Να διατεθεί μια (1) διδακτική ώρα.

Οι τέσσερις (4) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

<u>Επισήμανση</u>

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.