# ΑΛΓΕΒΡΑ

## Α΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ

**Οδηγίες για τη διδασκαλία της Άλγεβρας Α΄ τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ κατά το σχολικό έτος 2017-2018**

**Σύμφωνα με την αρ. πρωτ. 163561/Δ2/2-10-2017 εγκύκλιο του ΥΠ.Π.Ε.Θ.**

**Δημήτριος Σπαθάρας**
**Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών**

**www.pe03.gr**

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

# Εισαγωγή

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α' Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεών τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

## Διδακτέα ύλη και προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας ανά παράγραφο για το σχολικό έτος 2017-2018

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

| ΚΕΦΑΛΑΙΟ | ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ | ΩΡΕΣ |
|---|---|---|
| **Εισαγωγή** | Ε.2 – Σύνολα | 2 |
| **Κεφάλαιο $2^{ο}$**<br>**Οι πραγματικοί αριθμοί** | 2.1 – Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους | 5 |
| | 2.2 – Διάταξη πραγματικών αριθμών, εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4 | 5 |
| | 2.3 – Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού | 6 |
| | 2.4 – Ρίζες πραγματικών αριθμών, εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4 | 3 |
| **Κεφάλαιο $3^{ο}$**<br>**Εξισώσεις** | 3.1 – Εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού | 5 |
| | 3.2 – Η εξίσωση $x^{ν}=α$ | 2 |
| | 3.3 – Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού | 7 |
| **Κεφάλαιο $4^{ο}$**<br>**Ανισώσεις** | 4.1 – Ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού | 4 |
| | 4.2 – Ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού | 5 |
| **Κεφάλαιο $5^{ο}$**<br>**Πρόοδοι** | 5.1 – Ακολουθίες | 2 |
| | 5.2 – Αριθμητική πρόοδος, εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου | 4 |
| | 5.3 – Γεωμετρική πρόοδος, εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου | 4 |
| **Κεφάλαιο $6^{ο}$**<br>**Βασικές έννοιες των συναρτήσεων** | 6.1 – Η έννοια της συνάρτησης | 7 |
| | 6.2 – Γραφική παράσταση συνάρτησης | |
| | 6.3 – Η Συνάρτηση $f(x)=αx+β$, εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής | 4 |
| **Κεφάλαιο $7^{ο}$**<br>**Μελέτη βασικών συναρτήσεων** | 7.1 – Μελέτη της συνάρτησης: $f(x)=αx^2$ | 5 |
| | 7.3 – Μελέτη της συνάρτησης: $f(x)=αx^2+βx+γ$ | 5 |
| | **Σύνολο ωρών** | **75** |

# Διαχείριση της διδακτέας ύλης για το σχολικό έτος 2017-2018

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8-6-2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ:

http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php

## Εισαγωγικό Κεφάλαιο

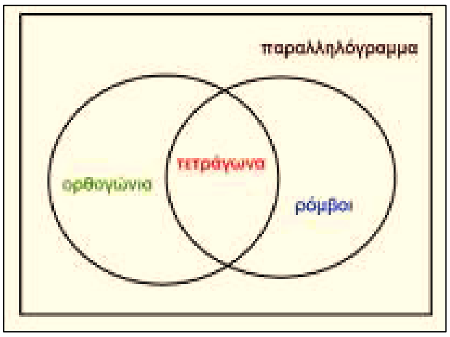
Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην §Ε.1, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

### Ε2 - Σύνολα — 2 ώρες

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου. Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.




Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείστε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων και ρόμβων.

Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- ✓ Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- ✓ Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- ✓ Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι.

# Κεφάλαιο 2ο • Οι πραγματικοί αριθμοί

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κλπ.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

## 2.1 - Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους — 5 ώρες

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, $1{,}333\ldots$, $1{,}010101\ldots$, $1{,}101001000\ldots$ καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\pi}{6}$, $-1{,}333\ldots$ κ.ά.) Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$, $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού: $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$. Η δραστηριότητα Δ9 του ΑΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα 3+11 είναι άρτιος και το γινόμενο 3x11 είναι περιττός. Κατόπιν αυτών:

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι: αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό τους είναι περιττός.

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι: αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) Το γινόμενο δύο φυσικών είναι 1271. Αν υποθέσουμε ότι έχει δίκιο ο Κώστας ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

   i. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα άρτιος

   ii. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα περιττός

   iii. δεν είναι σίγουρο αν το άθροισμα είναι περιττός ή άρτιος μέχρι να μάθουμε ποιοι είναι οι αριθμοί.

γ) Είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## 2.2 - Διάταξη πραγματικών αριθμών, εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4 — 5 ώρες

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες: $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0$ ενώ $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ και στα σχόλια 1 και 2 της σελίδας 56

## 2.3 - Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού — 6 ώρες

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί η αναγκαιότητα του «πρέπει» ( $\Rightarrow$ ) και του «αρκεί» ( $\Leftarrow$ ) σε αυτές.

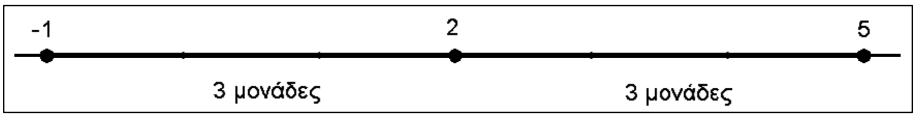
Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

- $|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,\ x_0+\rho) \Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$
- $|x-x_0|>\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,\ x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,\ +\infty) \Leftrightarrow x<x_0-\rho$ ή $x>x_0+\rho$

καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα.

(π.χ. η ανίσωση $|x-2|<3$ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ. $|x-2|<3 \Leftrightarrow d(x,2)<3 \Leftrightarrow -1<x<5$ )




Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων

- $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$
- $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$

Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς –2, 7 και x αντίστοιχα, με $-1<x<7$ .

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: i. $|x+2|$ ii. $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

### 2.4 - Ρίζες πραγματικών αριθμών, εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4 — 3 ώρες

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα της χρήσης των ιδιοτήτων των ριζών, έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2\cdot\frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left(-2\right)^{\frac{2}{4}\cdot 2} = (-2)^1 = -2$

# Κεφάλαιο 3ο • Εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ . Ειδικότερα:

### 3.1 - Εξισώσεις 1ου βαθμού — 5 ώρες

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha x+\beta=0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής $\alpha x+\beta=0$, για δυο κυρίως λόγους:

α) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και

β) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του λ (π.χ. $\lambda=2$ , $\lambda=5$ , $\lambda=1$ , $\lambda=-1$ ) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α΄ Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η $|x-5|=-3$ , την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

### 3.2 - Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ — 2 ώρες

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^{\nu}=\alpha$ να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

### 3.3 - Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού — 7 ώρες

Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε ασκήσεις με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$.

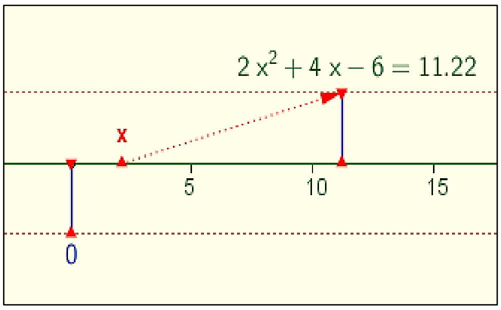
α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175$ m;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132




# Κεφάλαιο 4ο • Ανισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού. Ειδικότερα:

### 4.1 - Ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού — 4 ώρες

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων $1^{ου}$ βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι $|x-5|<-3$ ή $|x-5|>-3$, των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1$^{ου}$ βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α΄ Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## 4.2 - Ανισώσεις 2$^{ου}$ βαθμού — 5 ώρες

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2$^{ου}$ βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α΄ Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta<0$, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές). Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «$+$» και «$-$», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2$^{ου}$ βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του πρόσημου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2$^{ου}$ βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 2ου βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

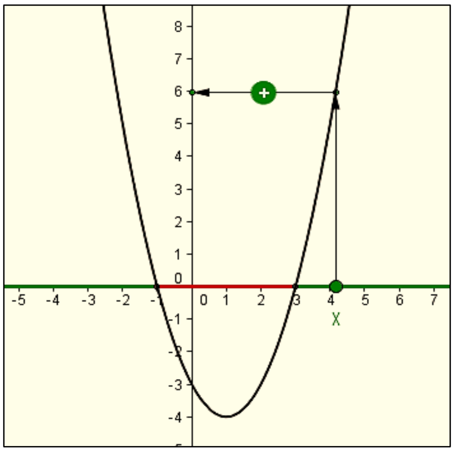
α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ και $M=\left(\sqrt{37}\right)^2-5\sqrt{37}-6$. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;



Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής x, ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752

# Κεφάλαιο 5$^{ο}$ • Πρόοδοι

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

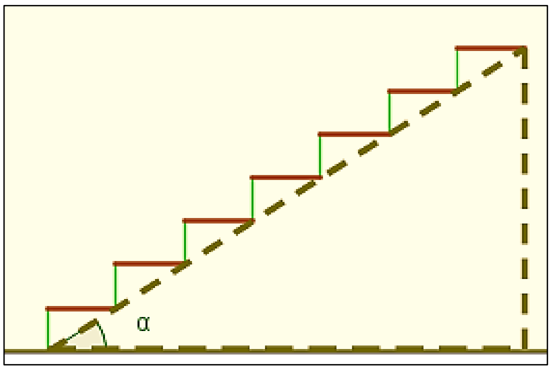
## 5.1 - Ακολουθίες — 2 ώρες

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μα-θητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας α, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό $α_1$ που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτό δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ ).

## 5.2 - Αριθμητική πρόοδος, εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου». — 4 ώρες

Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το ν-οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ χωρίς τα ερωτήματα γ) και δ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α' Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δεν θα διδαχθεί.




Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155

**5.3 - Γεωμετρική πρόοδος, εκτός της απόδειξης για το άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου».** **4 ώρες**

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19 (χωρίς τα ερωτήματα δ και ε) και Δ.21 (χωρίς το ερώτημα δ) του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του ν-στού όρου γεωμετρικής προόδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου να μην διδαχθεί.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα $12^{\alpha}$ γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα $21^{\alpha}$ γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα $21^{\alpha}$ γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα $15^{\alpha}$ και στα $21^{\alpha}$ γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

# Κεφάλαιο 6$^{\text{ο}}$ • Βασικές έννοιες των συναρτήσεων

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α΄ Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία - ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής: $f(x)=\alpha x+\beta$ (§6.3), $f(x)=\alpha x^2$ (§7.1) και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (§7.3). Ειδικότερα:

**6.1 - Η έννοια της συνάρτησης**
**6.2 - Γραφική παράσταση συνάρτησης** **7 ώρες**

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος) Ο τυπικός ορισμός της μονοτονίας θα συζητηθεί στην Β τάξη. Μπορεί όμως κατά την κρίση του διδάσκοντα να εισαχθούν διαισθητικά οι έννοιες της μονοτονίας και ακρότατων και να γίνει η αναγνώριση τους σε γραφικές παραστάσεις. Οι έννοιες αυτές δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

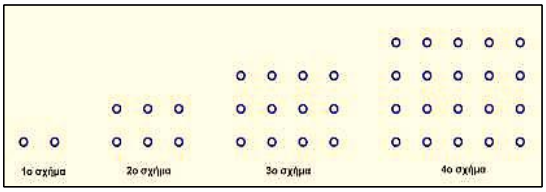
Τονίζεται ότι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων αποτελεί μία άλλη έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με όρους συντεταγμένων, ανακαλεί τις έννοιες των παραγράφων 2.3 και 2.4 . και προσφέρεται για υπολογισμούς. Επισημαίνεται ότι:

α) Η απόδειξη του τύπου δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης και ως εφαρμογές του θα διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5.

β) Δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.15 και Δ.26 του ΑΠΣ.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>




i) Ποιόν κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το $7^{ο}$ σχήμα ;

ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το $27^{ο}$ σχήμα ;

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Αν με Δ παραστήσουμε μια δόση αμπικιλλίνης (η αμπικιλλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με W παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση Δ = 50W δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

α) Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;

γ) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

## 6.3 - Η Συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής — 4 ώρες

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x+\beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y΄y στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου α σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

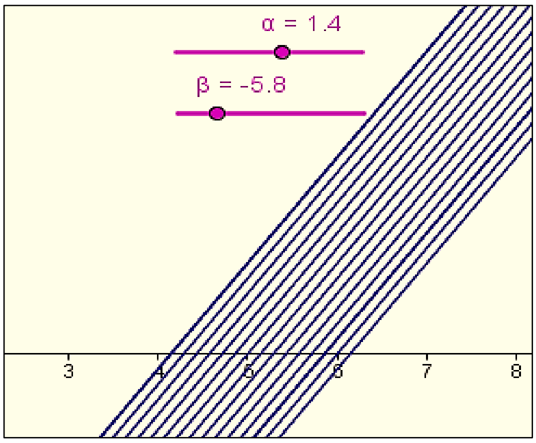
  i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$

  ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βi), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην $y=\alpha x+\beta$ από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για α σταθερό και β μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774

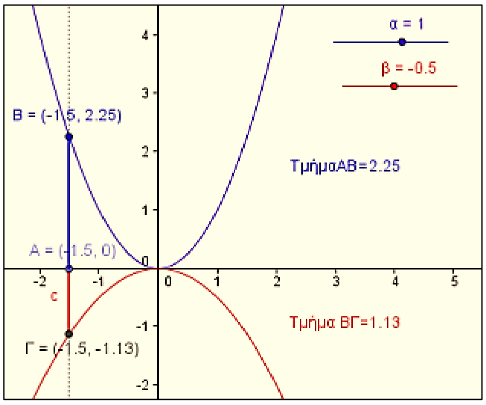



# Κεφάλαιο 7ο • Μελέτη βασικών συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τη συνάρτηση $y=\alpha x^2$ και τις ιδιότητές της. Επίσης με αφετηρία την $y=\alpha x^2$, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της f. Ειδικότερα:

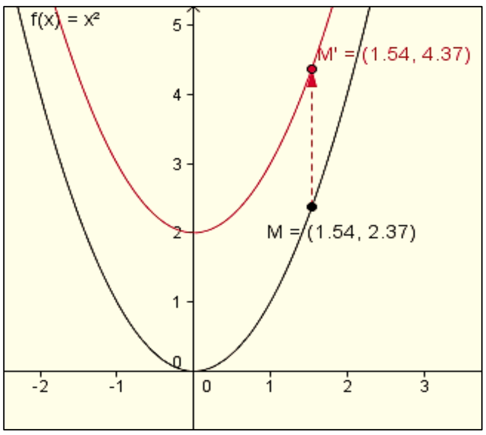
## 7.1 - Μελέτη της συνάρτησης: $f(x)=\alpha x^2$ — 5 ώρες

Οι μαθητές χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2$. Μέσα από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης και των τιμών διερευνούν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων $g(x)=x^2$ και $h(x)=-x^2$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης γενικεύουν τα παραπάνω συμπεράσματα για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ ή η χρήση λογισμικού) και τα εκφράζουν συμβολικά.




Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το μικροπείραμα «Οι μεταβολές της συνάρτησης $y=\alpha x^2$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για τη μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης $y=\alpha x^2$ όταν $\alpha>0$ ή $\alpha<0$.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1729




Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Μετατοπίσεις της $y=\alpha x^2$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά από τους μαθητές για την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της $y=\alpha x^2$ αλλά και την εύρεση του τύπου της στη νέα θέση και να πειραματιστούν για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μετατοπίσεων.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1748

## 7.3 - Μελέτη της συνάρτησης: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ — 5 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και στη διαισθητική μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Η γενίκευση των παραπάνω εννοιών θα διδαχτούν στην Β΄ Λυκείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές χρησιμοποιούν είτε πίνακες τιμών είτε λογισμικό για να χαράξουν τη γραφική παράσταση της $y=\alpha x^2+\kappa$ και να την συγκρίνουν με την $y=\alpha x^2$, ομοίως για την $y=\alpha(x+\lambda)^2$ και τελικά για την $y=\alpha(x+\lambda)^2+\kappa$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται διαισθητικά στις μετατοπίσεις, τις οποίες θα γενικεύσουν στην Β΄ Λυκείου. Αν χρησιμοποιηθεί λογισμικό, οι μαθητές μπορούν αφού χαράξουν τη γραφική παράσταση της $g(x)=\alpha x^2$ για διάφορες τιμές του α να την μετατοπίσουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και να παρατηρήσουν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια να μετατοπίσουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής $f(x)=\alpha(x+\kappa)^2+\lambda$

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x)=\alpha x^2$, να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της f. Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της f και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $g(x)=\alpha x^2$ στην $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2 (ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ). Διδακτικά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να σχεδιαστούν οι έξι βασικές περιπτώσεις που αφορούν στις τιμές της διακρίνουσας ($\Delta>0$, $\Delta=0$ και $\Delta<0$) συνδυαζόμενες με το πρόσημο του α ($\alpha>0$ , $\alpha<0$) ώστε να μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα αλγεβρικά συμπεράσματα που ήδη χρησιμοποιούν.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

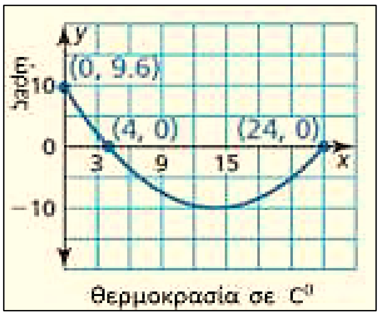
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων: $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(x-3)^2$, $g(x)=(x+3)^2$

| x | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)=x^2$ | | | | | 0 | | | | |
| $f(x)=(x-3)^2$ | | | | | | | | 0 | |
| $g(x)=(x+3)^2$ | | 0 | | | | | | | |

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, f και g.

γ) Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ, δίνει τη γραφική παράσταση της f και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ δίνει τη γραφική παράσταση της g.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>




Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το x είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το y είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).

α) Βρείτε τη συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

**Σημείωση**

Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση

https://www.geogebra.org/download

ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση

http://photodentro.edu.gr/edusoft/.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

# Απόσπασμα από το αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στην Άλγεβρα Α΄ τάξης ΓΕΛ ΦΕΚ: 1168/τ. Β΄/08-06-2011

## Ενδεικτικές δραστηριότητες

**Δ.1** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα $\in$ και $\notin$, αν ο κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

| | $-5,5$ | $\pi$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{144}$ | $-\frac{13}{3}$ | $\frac{40}{5}$ | $\sqrt{2}$ | $0,\overline{3}$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | | | | | | | | | |
| $\mathbb{Z}$ | | | | | | | | | |
| $\mathbb{Q}$ | | | | | | | | | |
| $\mathbb{R}$ | | | | | | | | | |

**Δ.2** Έστω $\Omega=\{1,2,3,...,10\}$ ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού $A=\{1,2,4,7,8\}$, $B=\{3,4,8,10\}$ και $\Gamma=\{2,4,5,10\}$

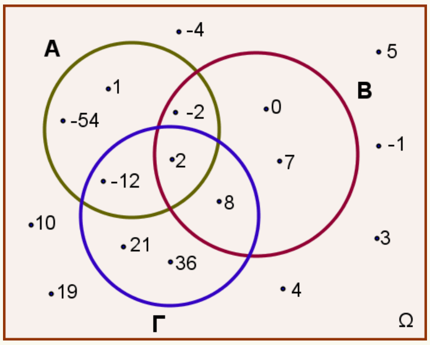
α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα: i) $A\cup B$ ii) $B\cap\Gamma$ iii) $A\cup(B\cap\Gamma)$ iv) $(A\cap B)\cup\Gamma$ v) $A\cap B\cap\Gamma$

**Δ.3** Στο διπλανό παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολά του Α, Β και Γ.

α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α, Β και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:
i) $A\cup B$ ii) $B\cap\Gamma$ iii) $A\cup(B\cap\Gamma)$ iv) $A\cap B\cap\Gamma$ v) $A'$




**Δ.4** Ποια από τα παρακάτω πειράματα είναι πειράματα τύχης; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών εκλείψεων του ήλιου.

β) το πλήθος των παιδιών που έχει μία οικογένεια.

γ) το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος μια συγκεκριμένη ημέρα.

δ) ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σε ένα αεροδρόμιο εντός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.

ε) ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό γνωστή απόσταση s με σταθερή ταχύτητα v.

στ) ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο

**Δ.5** Δύο φίλοι παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Με χρήση δενδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και να δημιουργήσετε έτσι το δειγματικό χώρο του πειράματος αυτού. Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο «ισοπαλία».

**Δ.6** Σε μια ομάδα 20 ατόμων, 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

α) να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά.

β) να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

**Δ.7** Από τους μαθητές ενός λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής Φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα Α: «ο μαθητής να είναι κορίτσι» και Β: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα», να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: i) $A\cup B$ ii) $A\cap B$ iii) $B-A$ iv) $A-B$ v) $A'$ vi) $A'\cup B$

**Δ.8** Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 32 μαθητές συμμετέχουν σε μια θεατρική ομάδα, 28 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δυο ομάδες;

β) να συμμετέχει μόνο σε μία από τις δυο ομάδες;

γ) να μη συμμετέχει σε καμία από τις δυο ομάδες;

**Δ.9** Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και στο $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: «ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός;

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

ε) Υπάρχει ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99… και στον 1; Ανάμεσα στον 0,899… και στον 0,9; Τι παρατηρείτε;

**Δ.10** Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το σφάλμα της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του δίσκου, τότε:

α) Να παραστήσετε την παραπάνω παραδοχή στην αριθμογραμμή.

β) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόλυτης τιμής.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της D.

**Δ.11** Δίνεται η παράσταση: $\left(\sqrt[6]{2^3}+4\right)\cdot\left(\sqrt[6]{2^3}-4\right)$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της D.

**Δ.12** Ο τιμοκατάλογος των TAXI στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

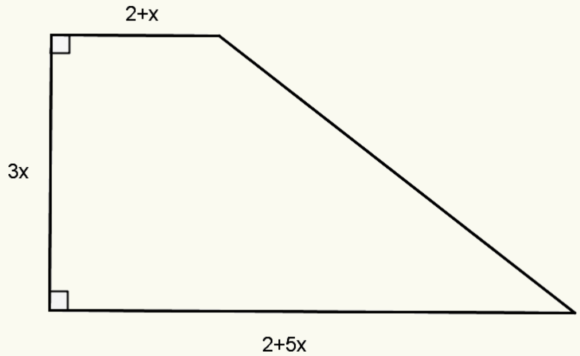
β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το TAXI περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

**Δ.13** Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

**Δ.14** Ένας μαραθωνοδρόμος διάνυσε απόσταση 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε 1/10 της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

**Δ.15** Στο διπλανό τραπέζιο οι πλευρές του είναι σε m.




α) Να εκφράσετε την περίμετρό του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39 m και το εμβαδόν του το πολύ 99 $m^2$ .

**Δ.16** Η ακολουθία 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,… ονομάζεται ακολουθία Fibonacci (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175-1250).

α) Ας αντιστοιχίσουμε, λοιπόν, τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας $x_ν$, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

| ν | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_ν$ | 0 | 1 | | | | | | | | | |

β) Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον $x_3$ και μετά. Μπορείτε να υπολογίσετε το 12ο όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του 12ου όρου;

γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

**Δ.17** Δέκα αδέλφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει α ευρώ περισσότερα από τον αμέσως μικρότερό του. Ο 7ος στη σειρά αδελφός παίρνει 7 ευρώ.

α) Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τα αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;

**Δ.18** Ένα έλκηθρο αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια χιονισμένη πλαγιά. Το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση 3cm, το δεύτερο δευτερόλεπτο διανύει απόσταση 5cm, το τρίτο δευτερόλεπτο 7cm, το τέταρτο δευτερόλεπτο 9cm κ.ο.κ. Η κίνηση θα διαρκέσει 60 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο διάστημα θα διανύσει στο 20-στό δευτερόλεπτο της κίνησης του;

β) Αν τοποθετήσουμε τα διαστήματα που έχει διανύσει το έλκηθρο στα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του με τον παρακάτω τρόπο:

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
41 39 37 35 33 31 29 27 25 23 21 19 17 15 13 11 9 7 5 3

Ποιο είναι το άθροισμα της κάθε στήλης; Μπορείτε να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των πρώτων 20 δευτερολέπτων με ένα γρήγορο τρόπο;

γ) Ποιο είναι το διάστημα που θα διανύσει στο ν-οστό δευτερόλεπτο της κίνησής του, με $ν \le 60$;

δ) Να αποδείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των ν πρώτων δευτερολέπτων, με $ν \le 60$, είναι: $ν(ν+2)$ cm.

**Δ.19** Ένας θρύλος αναφέρει ότι ζητήθηκε από τον εφευρέτη του παιχνιδιού που λέγεται σκάκι, να ορίσει ο ίδιος την ανταμοιβή του για την εφεύρεση αυτή. Λέγεται, λοιπόν, ότι η απαίτησή του βρίσκεται στο παρακάτω κείμενο:

«Φανταστείτε μια σκακιέρα. Αυτή έχει 64 τετράγωνα. Στο πρώτο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο σιτάρι, στο δεύτερο τετράγωνο 2 κόκκους σιτάρι, στο τρίτο τετράγωνο 4 κόκκους σιτάρι, στο πέμπτο τετράγωνο 8 κόκκους σιτάρι, κ.ο.κ. μέχρι να τοποθετήσουμε και στα 64 τετράγωνα κόκκους σιταριού. Θα ήθελα τόσους κόκκους σιταριού, όσους έχει επάνω η σκακιέρα».

α) Πόσοι κόκκοι σιταριού έχουν τοποθετηθεί στο $64^o$ τετράγωνο;

β) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σιταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-οστό τετράγωνο;

γ) Αποτελεί το πλήθος των κόκκων σε κάθε τετράγωνο διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας:
$2^0$, $2^0+2^1$, $2^0+2^1+2^2$, $2^0+2^1+2^2+2^3$ κ.ο.κ.
Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας;

ε) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, προσπαθήστε να εικάσετε πόσοι θα ήταν στην περίπτωση αυτή συνολικά οι κόκκοι πάνω στη σκακιέρα;

**Δ.20** Στην προηγούμενη δραστηριότητα βρήκαμε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων της γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\lambda=2$ είναι: $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{\nu-1}=2^\nu-1$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των: $3^0$, $3^0+3^1$, $3^0+3^1+3^2$, $3^0+3^1+3^2+3^3$

β) Προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα:
$3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{\nu-1}$

γ) Στη συνέχεια, προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα:
$4^0+4^1+4^2+4^3+\cdots+4^{\nu-1}$

δ) Μπορείτε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $1+\lambda^1+\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^{\nu-1}$, για οποιοδήποτε $\lambda\neq1$;

ε) Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλ. $\alpha_1\neq1$), πως μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (δ); Πως μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (δ) ερώτημα, ώστε να ισχύει γενικά;

**Δ.21** Ένα φυτό έχει ύψος 1,67cm στο τέλος της πρώτης εβδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 εβδομάδες ακόμα. Κάθε εβδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο από την προηγούμενη.

α) Αποτελούν τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε εβδομάδας όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν η απάντηση στο (α) ερώτημα είναι καταφατική, να γράψετε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την 4η εβδομάδα; (να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης)

δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το φυτό;

**Δ.22** Ας υποθέσουμε ότι στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003.

| ΙΑΝ | ΦΕΒ | ΜΑΡ | ΑΠΡ | ΜΑΙΟΣ | ΙΟΥΝ | ΙΟΥΛ | ΑΥΓ | ΣΕΠΤ | ΟΚΤ | ΝΟΕΜ | ΔΕΚ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0,3°C | -0,8°C | 4°C | 11°C | 13°C | 20°C | 20°C | 25°C | 20°C | 15°C | 12°C | 7°C |

Είναι η αντιστοιχία: Μήνας → Θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

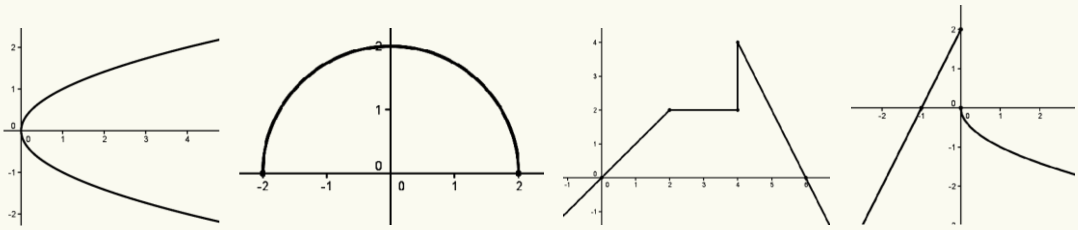
**Δ.23** Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα

β) Άτομο → ημέρα γενεθλίων
γ) Όνομα → ταυτότητα
δ) Μαθητής της τάξης → αριθμός τηλεφώνου

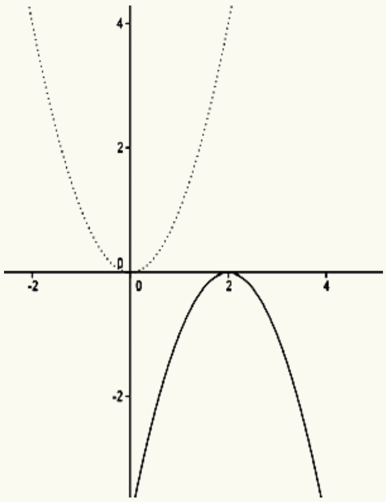
**Δ.24** Είναι τα παρακάτω διαγράμματα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) (β) (γ) (δ)

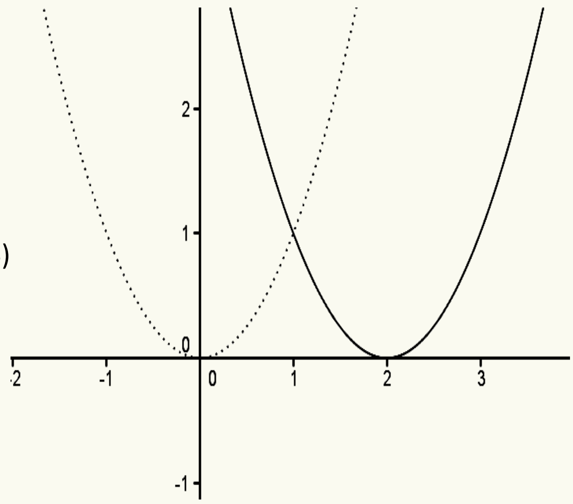


**Δ.25** Δίνονται οι παρακάτω παραβολές (σε κάθε σχήμα η παραβολή που παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή είναι η $y=x^2$ ).

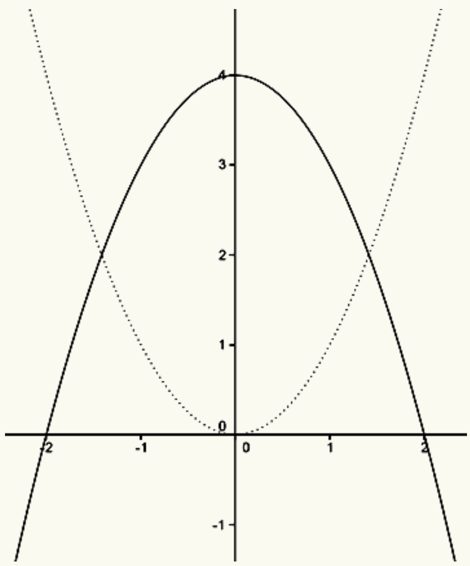
Α)



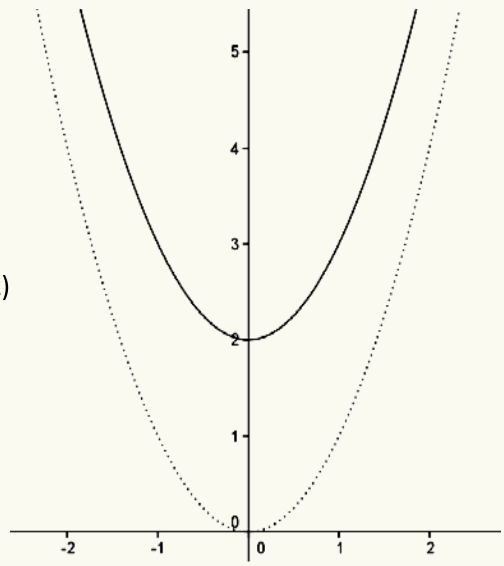
Β)



Γ)



Δ)

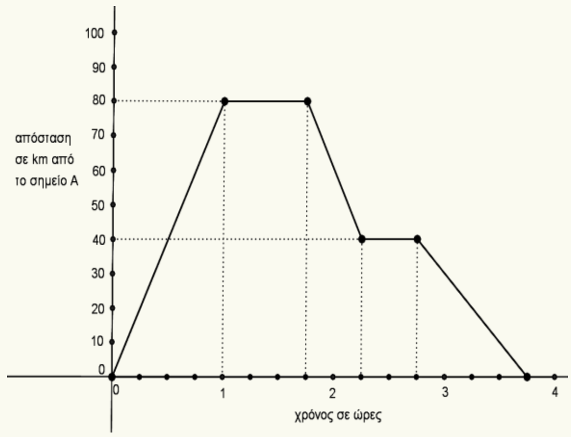


α) Να βρείτε ποια παραβολή είναι η γραφική παράσταση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

i) $f(x)=(2-x)^2$ ii) $g(x)=x^2+2$ iii) $h(x)=(x-2)(x+2)$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί η παραβολή που δεν είναι γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις f, g και h.

**Δ.26** Ένα κινητό που κινείται έτσι ώστε η απόστασή του (σε km) από ένα σημείο Α (που το θεωρούμε αρχή της μέτρησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:




α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης;

β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση;

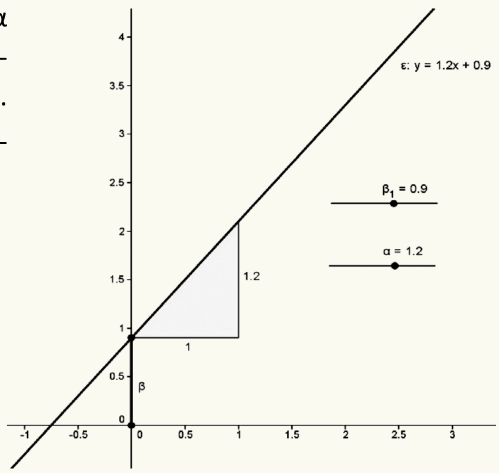
γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα;

δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποιά ήταν η ταχύτητά του σ’ αυτό το χρονικό διάστημα;

ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά , 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης.

στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.

**Δ.27** Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να μεταβάλλετε τις τιμές στα α και β και να διερευνήσετε τις μεταβολές της ευθείας $y=\alpha x+\beta$. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το ρόλο των παραμέτρων α και β.




**Δ.28** Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό με χρήση ενός θερμομέτρου. Η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται γραμμικά κατά 15°C κάθε 2 λεπτά. Αν στην αρχή το νερό έχει θερμοκρασία 10°C:

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνου-θερμοκρασίας συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

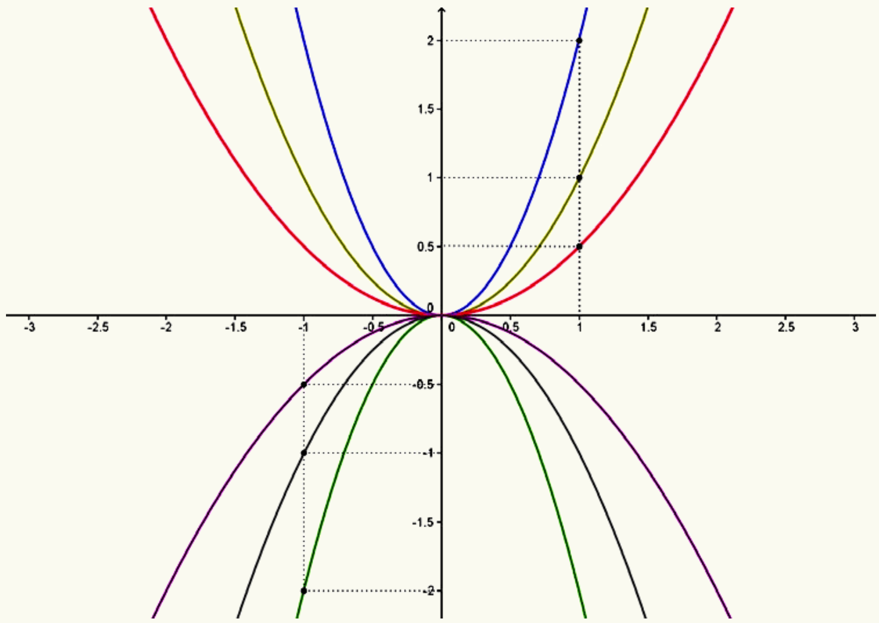
| Χρόνος (t) σε min | | 1 | 2 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Θερμοκρασία (θ) σε °C | 10 | | | | 40 | 55 |

γ) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνου-θερμοκρασίας.

δ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

ε) Προσπαθήστε να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνου-θερμοκρασίας και υπολογίστε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

**Δ.29** Στο παρακάτω σύστημα αξόνων δίνονται έξι παραβολές.




α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι παραπάνω παραβολές.

β) Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία των συναρτήσεων του ερωτήματος (α); Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

γ) Για κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις, υπάρχει τιμή της μεταβλητής x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή της; Εκφράστε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας. Μπορείτε να γενικεύσετε αυτά τα συμπεράσματα για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

δ) Έχει η καθεμιά από τις παραπάνω παραβολές άξονα ή κέντρο συμμετρίας; Εκφράστε αλγεβρικά τις συμμετρίες αυτές. Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

ε) Από τι εξαρτάται το «άνοιγμα» μιας παραβολής και με ποιόν τρόπο;

στ) Παρατηρήστε τις παραβολές $y=\alpha x^2$ και $y=-\alpha x^2$. Είναι συμμετρικές μεταξύ τους;

**Δ.30** α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y=x^2$ και $y=x^2+\kappa$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y=x^2$ και $y=(x+\lambda)^2$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$. Αφού τη γράψετε στη μορφή $f(x)=(x+\lambda)^2+\kappa$ προσπαθήστε να την παραστήσετε γραφικά ξεκινώντας από την $y=x^2$ με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα ερωτήματα.

δ) Σε ποιά διαστήματα η $f(x)=x^2-4x+5$ είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα; Για ποιά τιμή του x παρουσιάζει η f ελάχιστη τιμή και ποιά είναι αυτή; Έχει η γραφική παράσταση της f άξονα συμμετρίας;

(Για την παραπάνω δραστηριότητα ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

**Δ.31** Ένας μαθητής πειραματίζεται παριστάνοντας γραφικά συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. Ως τιμές των α, β και γ διαλέγει διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου: 1, 2, 4, 8, 16, 32,….

α) Με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, να χαράξετε κάποιες γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να γενικεύσετε την παρατήρησή σας και να αποδείξετε την ισχύ της γενίκευσης αυτής;

β) Τι θα συμβεί αν με της ίδιας μορφής συναρτήσεις χρησιμοποιήσουμε άλλες γεωμετρικές προόδους; Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

**Δ.32** Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x)=2x^2-4x-6$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

| x | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ(x) | | | | | | | |

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x).

γ) Με χρήση της παραπάνω γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τις λύσεις των εξισώσεων $\phi(x)=0$, $\phi(x)=2$ και της ανίσωσης $\phi(x)>0$.

δ) Να επιλύσετε αλγεβρικά τις $\phi(x)=0$, $\phi(x)=2$ και την $\phi(x)>0$ και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με εκείνες του ερωτήματος (γ).