$$d(x,0)=|x|=\begin{cases} x & ,\ x\geq 0 \\ -x & ,\ x<0 \end{cases}$$

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$$

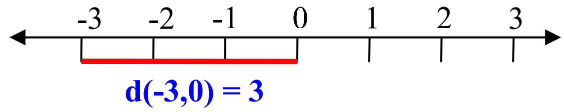
Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$$

Αν $\theta>0,\ \ |\alpha|=\theta\Rightarrow\alpha=\pm\theta$

1.1 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ας θεωρήσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών , και , ας πάρουμε τον αριθμό **– 3 .**
Παρατηρούμε , πως ο αριθμός **– 3** ,απέχει από τον αριθμό **0,** απόσταση **3** μονάδων
Η απόσταση αυτή του αριθμού – 3 από το 0 συμβολίζεται με το σύμβολο **d(- 3 ,0)** ή με το σύμβολο $|-3|$ και ονομάζεται απόλυτη τιμή του – 3 .



Επομένως $d(-3,0)=|-3|=3$

Γενικά, λοιπόν , αν **α** είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός στον άξονα των πραγματικών αριθμών, θα ονομάζουμε **απόλυτη τιμή του α** και θα την συμβολίζουμε με $|\alpha|$ την απόστασή του από το **0.** Έτσι:

$$|\alpha|=d(\alpha,0)$$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Από τα διπλανά παραδείγματα , παρατηρούμε πως ,

- όταν ο αριθμός είναι θετικός , τότε η απόλυτη τιμή του είναι ίση με αυτόν
- όταν ο αριθμός είναι αρνητικός , τότε η απόλυτη τιμή του είναι ίση με τον αντίθετό του

 Δηλαδή:

Αν α > 0 , τότε: $|\alpha|=\alpha$ **και αν α < 0 , τότε:** $|\alpha|=-\alpha$

Παραδείγματα

$|-5|=5$, $|+3|=3$, $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$ και $|+5|=5$, $|-3|=3$, $|+\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|-1+\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$

Τέλος , αν α = 0 , τότε $|0|=0$

Επομένως:
$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha & , \ \alpha\geq 0\\ -\alpha & , \ \alpha<0\end{cases} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) γράφεται και ως εξής:

$$|\alpha|=\max\{\alpha,-\alpha\}$$

όπου max (αρχικά της λέξης maximum) , δηλώνει τον μεγαλύτερο αριθμό από τους α , – α

1.2 Άμεσες συνέπειες του ορισμού

Όπως βλέπουμε, από τον ορισμό της απόλυτης τιμής ισχύει

1. $|\alpha| \geq 0 \quad ,\forall \alpha \in R$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της απόλυτης τιμής

2. Ισχύει: $|\alpha| \geq \alpha \quad ,\forall \alpha \in R$

Απόδειξη

Πράγματι ,

Αν $\alpha > 0$, τότε: $|\alpha| = \alpha$ (ισχύει σαν ισότητα)

Αν $\alpha < 0$, τότε: $|\alpha| = -\alpha > 0$, οπότε $|\alpha| = -\alpha > \alpha$

Αν $\alpha = 0$,τότε: $|0| = 0$ (ισχύει σαν ισότητα)

3. Ισχύει: $|\alpha| \geq -\alpha \quad ,\forall \alpha \in R$

Απόδειξη

Πράγματι ,

Αν $\alpha > 0$, τότε: $|\alpha| = \alpha$, οπότε $|\alpha| = \alpha > -\alpha$

Αν $\alpha < 0$, τότε: $|\alpha| = -\alpha > 0$, (ισχύει σαν ισότητα)

Αν $\alpha = 0$,τότε: $|0| = 0$ (ισχύει σαν ισότητα)

4. Ισχύει: $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|, \forall \alpha \in R$

Απόδειξη

Πράγματι ,

Από τις σχέσεις :

$$\left.\begin{matrix} |\alpha| \geq \alpha \\ |\alpha| \geq -\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |\alpha| \geq \alpha \\ -|\alpha| \leq \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |\alpha| \geq \alpha \\ -|\alpha| \leq \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha \leq |\alpha| \\ -|\alpha| \leq \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$$

5. Ισχύει: $|\alpha|^2 = \alpha^2, \forall \alpha \in R$

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$ Τότε $|\alpha| = \alpha$, οπότε: $|\alpha|^2 = |\alpha||\alpha| = \alpha.\alpha = \alpha^2$
- $\alpha < 0$ Τότε $|\alpha| = -\alpha$, οπότε: $|\alpha|^2 = |\alpha||\alpha| = (-\alpha).(-\alpha) = \alpha^2$
- $\alpha = 0$ Τότε $|\alpha| = 0$, οπότε: $|\alpha|^2 = |\alpha||\alpha| = 0.0 = 0 = 0^2 = \alpha^2$

1.3 Ιδιότητες των απολύτων τιμών

Παρακάτω θα αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής

Ιδιότητα 1

Ισχύει: $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta| \quad \forall \alpha,\beta \in R$

Απόδειξη

$1^{ος}$ τρόπος

Έστω

$$|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta| \Leftrightarrow |\alpha.\beta|^2 = \left(|\alpha|.|\beta|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2.|\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2$$

που είναι αληθής

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Τότε $|\alpha| = 0$ και $|\beta| = 0$

  Τότε: $\alpha\beta = 0$ και άρα $|\alpha.\beta| = 0$,και

  $|\alpha|.|\beta| = 0$. Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$
- $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Τότε $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = \beta$

  Τότε: $\alpha\beta > 0$ και άρα $|\alpha.\beta| = \alpha\beta$,και ,

  $|\alpha|.|\beta| = \alpha.\beta$.Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$
- $\alpha > 0$ και $\beta < 0$. Τότε $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$

  Τότε: $\alpha\beta < 0$ και άρα $|\alpha.\beta| = -\alpha\beta$,και ,

  $|\alpha|.|\beta| = \alpha.(-\beta) = -\alpha\beta$.Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$
- $\alpha < 0$ και $\beta > 0$. Τότε $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = \beta$

  Τότε: $\alpha\beta < 0$ και άρα $|\alpha.\beta| = -\alpha\beta$,και ,

  $|\alpha|.|\beta| = (-\alpha)\beta. = -\alpha\beta$.Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$
- $\alpha < 0$ και $\beta < 0$. Τότε $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = -\beta$

  Τότε: $\alpha\beta > 0$ και άρα $|\alpha.\beta| = \alpha\beta$,και

  $|\alpha|.|\beta| = (-\alpha).(-\beta) = \alpha.\beta$.Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

Παραδείγματα

- $|-3.5| = |-3|.|5| = 3.5 = 15$
- $|7.3| = |7|.|3| = 7.3 = 21$
- $|-2.(-3)| = |-2|.|-3| = 2.3 = 6$

- $|x^2 - y^2| = |x-y|.|x+y|$
- $|\alpha^2 - \alpha\beta| = |\alpha(\alpha-\beta)| = |\alpha||\alpha-\beta|$
- $|\alpha^3 + \alpha^2| = |\alpha^2(\alpha+1)| = |\alpha^2||\alpha+1| = \alpha^2|\alpha+1|$

Η ιδιότητα 1 επεκτείνεται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων. Δηλαδή:

$$|\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3...\alpha_\nu| = |\alpha_1|.|\alpha_2|.|\alpha_3|...|\alpha_\nu|$$

$$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_\nu \in R$$

και ν φυσικό αριθμό

Ιδιότητα 2

Ισχύει: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \forall \alpha,\beta \in R$ με $\beta \neq 0$

Απόδειξη

$1^{ος}$ τρόπος

Έστω

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

που είναι αληθής

$2^{ος}$ τρόπος

Θέτομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} = x \Rightarrow \alpha = \beta x \Rightarrow |\alpha| = |\beta x| \Rightarrow |\alpha| = |\beta||x| \Rightarrow |x| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$3^{ος}$ τρόπος

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$. Τότε $|\alpha| = \alpha$

Τότε: $\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$ και άρα $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = 0$,και , $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = 0$.Επομένως $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

- $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Τότε $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = \beta$

Τότε: $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ και άρα $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{\alpha}{\beta}$,και , $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.Επομένως $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

- $\alpha > 0$ και $\beta < 0$. Τότε $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$

Τότε: $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ και άρα $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = -\dfrac{\alpha}{\beta}$,και , $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{\alpha}{-\beta} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$ $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{-\alpha}{\beta} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

- $\alpha < 0$ και $\beta > 0$. Τότε $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = \beta$

Τότε: $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ και άρα $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = -\dfrac{\alpha}{\beta}$,και , $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{-\alpha}{\beta} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

- $\alpha < 0$ και $\beta < 0$. Τότε $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = -\beta$

Τότε: $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$ και άρα $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{\alpha}{\beta}$,και , $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{-\alpha}{-\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Επομένως $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$

Παραδείγματα

- $\left|\dfrac{-4}{5}\right| = \dfrac{|-4|}{|5|} = \dfrac{4}{5}$
- $\left|\dfrac{9}{2}\right| = \dfrac{|9|}{|2|} = \dfrac{9}{2}$
- $\left|\dfrac{-6}{-5}\right| = \dfrac{|-6|}{|-5|} = \dfrac{6}{5}$

- $\left|\dfrac{x^2y}{xz+x}\right| = \dfrac{|x^2y|}{|xz+x|} = \dfrac{|x^2||y|}{|x(z+1)|} = \dfrac{|x|^2|y|}{|x||z+1|} = \dfrac{|x||y|}{|z+1|}$
- $\left|\dfrac{x^2}{z}\right| = \dfrac{|x^2|}{|z|} = \dfrac{|x^2|}{|z|} = \dfrac{|x|^2}{|z|}$

Ιδιότητα 3

Αν $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

Απόδειξη

Ισχύει:

$$|x| = \theta \Leftrightarrow |x|^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\theta)(x+\theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \theta \\ x = -\theta \end{cases}$$

Ιδιότητα 4

Αν $\alpha \in R$, ισχύει η ισοδυναμία: $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Απόδειξη

Ισχύει:

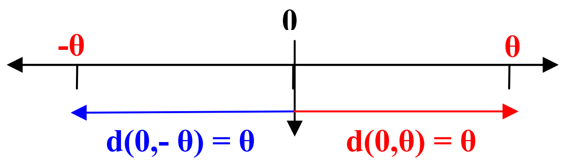
$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow |x|^2 = |\alpha|^2 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)(x+\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = -\alpha \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Στην περίπτωση αυτή, δεν μας ενδιαφέρει αν ο α είναι θετικός , αρνητικός ή μηδέν

Γεωμετρική ερμηνεία



Αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς που απέχουν από το **0** απόσταση **θ**.
Οι αριθμοί αυτοί , προφανώς είναι οι: **θ** , **- θ**

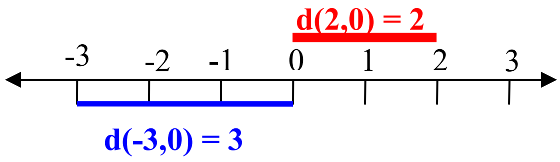
Προσοχή!!! Ο αριθμός **θ** πρέπει να είναι **θετικός**

Παραδείγματα

- $|x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ ή \\ x = -2 \end{cases}$
- $|x| = -4$, αδύνατη στο R
- $|x| = |-3| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ ή \\ x = -3 \end{cases}$
- $|x| = |1-\sqrt{2}| \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}-1 \\ ή \\ x = 1-\sqrt{2} \end{cases}$
- $|x-2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ ή \\ x-2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ ή \\ x = -1 \end{cases}$
- $|2x+3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 5 \\ ή \\ 2x+3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ ή \\ 2x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ή \\ x = -4 \end{cases}$

1.4 Απόσταση δύο αριθμών

Ας θεωρήσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών , και , ας πάρουμε τους αριθμούς **– 3** και **2 .**
Πόσο απέχουν οι αριθμοί αυτοί;
Παρατηρούμε , πως ο αριθμός **– 3** ,απέχει από τον αριθμό **0,** απόσταση **3** μονάδων, ενώ ο αριθμός **2** απέχει από το **0** απόσταση **2** μονάδων.
Επομένως η συνολική απόσταση των αριθμών **-3** και **2** θα είναι:



d(-3,0) + d(2,0) = 3 + 2 = 5

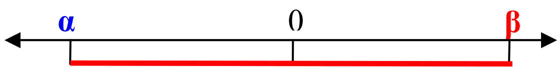
$$d(-3,2)=|(-3)-2|=|-3-2|=|-5=5|$$

3 + **2** = **5** μονάδες

Η απόσταση αυτή , του αριθμού – 3 από το 2 συμβολίζεται με το σύμβολο **d(- 3 ,2)** ή με το σύμβολο $|(-3)-2|$ ή με το σύμβολο $|2-(-3)|$ και ονομάζεται **απόσταση** των αριθμών **– 3** και **2** .

Ορισμός

Ονομάζουμε **απόσταση** των αριθμών α και β και την συμβολίζουμε με **d(α , β) ,** τον αριθμό $|\alpha-\beta|$



Επομένως $$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$$

Έτσι ο αριθμός π.χ $|x-2|$,δηλώνει την απόσταση του x από το 2 , ενώ ο αριθμός $|x+3|=|x-(-3)|$ δηλώνει την απόσταση του x από το – 3 .

Τι δηλώνει όμως ο αριθμός $|2x-7|$;

Ο αριθμός $|2x-7|$ γράφεται: $|2x-7|=\left|2\left(x-\frac{7}{2}\right)\right|=2\left|x-\frac{7}{2}\right|$

Ο $|2x-7|$ δηλώνει την **διπλάσια** απόσταση του x από το $\frac{7}{2}$

Ομοίως , ο αριθμός $|5x+9|=\left|5\left(x+\frac{9}{2}\right)\right|=5\left|x+\frac{9}{2}\right|=5\left|x-\left(-\frac{9}{2}\right)\right|$

Δηλώνει την πενταπλάσια απόσταση του x από το $\frac{9}{2}$

Τέλος , ο αριθμός $|-7x+6|=\left|-7\left(x-\frac{6}{7}\right)\right|=|-7|\left|x-\frac{6}{7}\right|=7\left|x-\frac{6}{7}\right|$

δηλώνει την επταπλάσια απόσταση του x από τον $\frac{6}{7}$

Παραδείγματα

- $d(-8,5)=|-8-5|=|-13|=13$
- $d(7,11)=|7-11|=|-4|=4$
- $d(7,-6)=|7-(-6)|=|7+6|=13$
- $d(\alpha^2,\alpha)=|\alpha^2-\alpha|=|\alpha(\alpha-1)|=|\alpha||\alpha-1|$
- $d(x+3,-2)=|(x+3)-(-2)|=$
  $=|x+3+2|=|x+5|$

$$d(2x,7)=|2x-7|=\left|2\left(x-\frac{7}{2}\right)\right|=$$
$$=2\left|x-\frac{7}{2}\right|=2d\left(x,\frac{7}{2}\right)$$

Άρα $d(2x,7)=2d\left(x,\frac{7}{2}\right)$

Γενικά: $d(\alpha x,\beta)=|\alpha|d\left(x,\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Απόσταση δύο αριθμών

Εφαρμογές της απόστασης αριθμών

1. Μεθοδολογία – Επίλυση βασικών εξισώσεων

Α. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ $|\alpha x+\beta|=\gamma \quad (1)$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\gamma<0$ Επειδή το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός, η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο R.
- $\gamma\geq 0$ Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\alpha x+\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha x=\gamma-\beta \Leftrightarrow x=\frac{\gamma-\beta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \alpha x+\beta=-\gamma \Leftrightarrow \alpha x=-\gamma-\beta \Leftrightarrow x=-\frac{\gamma+\beta}{\alpha}$$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση $|4x-1|=3 \qquad (1)$

ΛΥΣΗ

Επειδή $3>0$ η δοσμένη εξίσωση , έχει λύση. Είναι:

$$|4x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=3 \Rightarrow 4x=3+1 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1 \\ 4x-1=-3 \Rightarrow 4x=-3+1 \Rightarrow 4x=-2 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $|-2x+3|=1 \qquad (1)$

ΛΥΣΗ

Επειδή $1>0$ η δοσμένη εξίσωση , έχει λύση. Είναι:

$$|-2x+3|=1 \Rightarrow |2x-3|=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=1 \Rightarrow 2x=3+1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ 2x-3=-1 \Rightarrow 2x=3+1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

3. Να λύσετε την εξίσωση $|x+6|=-2 \qquad (1)$

ΛΥΣΗ

Επειδή $-2<0$ η δοσμένη εξίσωση δεν έχει λύση, είναι αδύνατη στο R.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ $|\alpha x+\beta|=\gamma x+\delta \quad , \quad \gamma \neq 0 \quad (1)$

Α. Επειδή το πρώτο μέλος είναι θετικός αριθμός ,για να έχει λύση η εξίσωση (1) θα πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι θετικός αριθμός.

1.Επομένως κάνουμε τον περιορισμό: $\gamma x+\delta \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{\delta}{\gamma}, \gamma>0 \\ x \leq -\dfrac{\delta}{\gamma}, \gamma<0 \end{cases} \quad (2)$

2. Είναι:

$$\alpha x+\beta=\gamma x+\delta \Leftrightarrow \alpha x-\gamma x=\delta-\beta \Leftrightarrow (\alpha-\gamma)x=\delta-\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}, \alpha \neq \gamma \quad (\text{δεκτή αν ικανοποιείται η } (1) \\ 0x=\delta-\beta \Rightarrow \begin{cases} \text{αόριστη }, \alpha=\gamma \text{ και } \delta=\beta \\ \text{αδύνατη }, \quad \alpha=\gamma \text{ και } \delta \neq \beta \end{cases} \end{cases}$$

ή

$$\alpha x+\beta=-\gamma x-\delta \Leftrightarrow \alpha x+\gamma x=-\delta-\beta \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)x=-\delta-\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\delta+\beta}{\alpha-\gamma}, \alpha \neq -\gamma (\text{δεκτή αν ικανοποιείται η } (2) \\ 0x=\delta+\beta \Rightarrow \begin{cases} \text{αόριστη }, \alpha=-\gamma \text{ και } \delta=-\beta \\ \text{αδύνατη }, \alpha=-\gamma \text{ και } \delta \neq -\beta \end{cases} \end{cases}$$

Β. Μπορούμε να υψώνουμε και τα δύο μέλη της (1) στο τετράγωνο και εν συνεχεία να υπολογίζουμε το x , με την βοήθεια της διαφοράς τετραγώνων , όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα , αφού πρώτα ακολουθήσουμε το βήμα 1.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση $|4x-1|=-x+2 \qquad (1)$

ΛΥΣΗ

Για να έχει λύση η (1) θα πρέπει: $-x+2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

Είναι: $|4x-1|=-x+2 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=-x+2 \Rightarrow 4x+x=2+1 \Rightarrow 5x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{5} \\ 4x-1=x-2 \Rightarrow 4x-x=-2+1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Οι παραπάνω τιμές γίνονται δεκτές.

ή

$$|4x-1|=-x+2 \Rightarrow (4x-1)^2=(-x+2)^2 \Rightarrow (4x-1)^2-(-x+2)^2=0 \Rightarrow$$

$$[(4x-1)-(-x+2)][(4x-1)+(-x+2)]=0 \Rightarrow (4x+x-1-2)(4x-x-1+2)=0 \Rightarrow$$

$$(5x-3)(3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{5} \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Οι παραπάνω τιμές γίνονται δεκτές.

2. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1| = x-4$ (1)

ΛΥΣΗ

Για να έχει λύση η (1) θα πρέπει: $x-4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$

Είναι: $|2x-1| = x-4 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = x-4 \Rightarrow 2x-x = -4+1 \Rightarrow x = -3 \\ 2x-1 = -x+4 \Rightarrow 2x+x = 4+1 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Οι παραπάνω τιμές δεν γίνονται δεκτές ,και , επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ή

$$|2x-1| = x-4 \Rightarrow (2x-1)^2 = (x-4)^2 \Rightarrow (2x-1)^2 - (x-4)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\left[(2x-1)-(x-4)\right]\left[(2x-1)+(x-4)\right] = 0 \Rightarrow (2x-x-1+4)(2x+x-1-4) = 0 \Rightarrow$$
$$(x+3)(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 3x-5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Οι παραπάνω τιμές δεν γίνονται δεκτές ,και , επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Εφαρμογές

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|x+6|=5$

Λύση

Σύμφωνα με την ιδιότητα 3 της 1.3 , θα πρέπει:

$$|x+6|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=5 \\ \text{ή} \\ x+6=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-6 \\ \text{ή} \\ x=-5-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{ή} \\ x=-11 \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία της εφαρμογής 1

Επειδή $|x+6|=|x-(-6)|$, θα πρέπει ο αριθμός x να απέχει από το – 6 απόσταση 5 μονάδων. Άρα ο x πρέπει να είναι ο – 1 (δεξιά του – 6) και ο – 11 (αριστερά του – 6)

2. Να λύσετε την εξίσωση $|-2x+3|=6$

Λύση

Σύμφωνα με την ιδιότητα 3 της 1.3 , θα πρέπει:

$$|-2x+3|=6 \Leftrightarrow |2x-3|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=6 \\ \text{ή} \\ 2x-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6+3 \\ \text{ή} \\ 2x=-6+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=9 \\ \text{ή} \\ 2x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ \text{ή} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Επειδή οι αντίθετοι αριθμοί, έχουν ίσες απόλυτες τιμές, θα ισχύει: $|-2x+3|=|2x-3|$

2. Να λύσετε την εξίσωση $|11x+2|=-1$

Λύση

Επειδή , σύμφωνα με την 1 της 1.2 ο αριθμός $|11x+2|$ είναι πάντοτε θετικός ή μηδέν , η εξίσωση είναι αδύνατη στο R, δεν έχει λύση

Ας θυμηθούμε ότι: $|\alpha|\geq 0$, $\forall \alpha \in R$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Η εξίσωση |αx + β| = γ (1)
Η εξίσωση |αx + β| = γ (2)

1.5 Ανισοτικές σχέσεις με απόλυτη τιμή

Ιδιότητα 5

Ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ με $\theta > 0$

Απόδειξη

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

Έστω ότι για τους μη αρνητικούς αριθμούς $|x|, \theta$,ισχύει:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow |x|^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 < 0 \Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta) < 0$$

Δηλαδή οι αριθμοί $x - \theta$, $x + \theta$ είναι ετερόσημοι . (1)

Επειδή , όμως $-\theta < \theta \Rightarrow x - \theta < x + \theta$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε , ότι:

$x + \theta > 0$ και $x - \theta < 0$,δηλαδή $x > -\theta$ και $x < \theta$

Συνεπώς $-\theta < x < \theta$

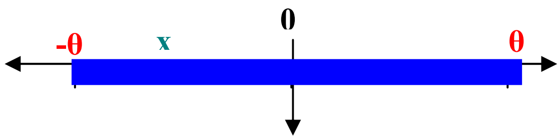
<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x \geq 0$, τότε έχουμε $|x| < \theta \Leftrightarrow x < \theta$ και $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \theta$
- Αν $x < 0$ τότε έχουμε $|x| < \theta \Leftrightarrow -x < \theta$ και $x < 0 \Leftrightarrow -\theta < x < 0$

Επομένως, η $|x| < \theta$ αληθεύει για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $-\theta < x < \theta$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

Γεωμετρική ερμηνεία



$d(x,0) < \theta$ ή $|x| < \theta$

Αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς που απέχουν από το **0** απόσταση μικρότερη από το **θ**. Οι αριθμοί αυτοί , προφανώς είναι εκείνοι που βρίσκονται ανάμεσα στους : **- θ , θ ,** δηλαδή οι αριθμοί του διαστήματος:

(- θ , θ) = {x ∊ R: α< x < β}

Προσοχή!!! Ο αριθμός **θ** πρέπει να είναι **θετικός**

Παραδείγματα

- $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
- $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
- $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

<u>Παραδείγματα</u>

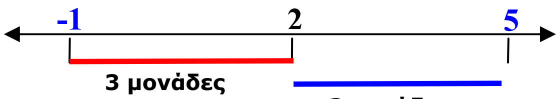
1. Να λυθεί η ανισότητα: $|x-2| < 3$

Λύση

Ισχύει:

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Η $|x-2| < 3$,γεωμετρικά σημαίνει να βρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, που η απόστασή τους από το **2** να είναι μικρότερη από **3**



2. Να λυθεί η ανισότητα: $|-2x+3| < 1$

Λύση

Ισχύει:

$$|-2x+3| < 1 \Leftrightarrow |2x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < 2x < 1 + 3$$

$$\Leftrightarrow 2 < 2x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Η $|-2x+3| < 1$ γράφεται:

$$|-2x+3| < 1 \Leftrightarrow |2x-3| < 1 \Leftrightarrow 2\left|x - \frac{3}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

Δηλαδή, θέλουμε η απόσταση του x από το $\frac{3}{2}$ να είναι μικρότερη από **1**

Ιδιότητα 6

Ισχύει η ισοδυναμία: $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \leq \theta$ με $\theta > 0$

Απόδειξη

$1^{ος}$ τρόπος

Ισχύει:

Έστω ότι για τους μη αρνητικούς αριθμούς $|x|, \theta$,ισχύει:

$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow |x|^2 \geq \theta^2 \Leftrightarrow x^2 \geq \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta) \geq 0$$

Δηλαδή οι αριθμοί $x - \theta$, $x + \theta$ είναι ομόσημοι . (1)

Επομένως , θα πρέπει να είναι:

- $x - \theta \geq 0$ και $x + \theta \geq 0$
  Τότε: $x \geq \theta$ και $x \geq -\theta$ (2)
  Από τις σχέσεις (2) συμπεραίνουμε , ότι: $x \geq \theta$

ή να ισχύει

- $x - \theta \leq 0$ και $x + \theta \leq 0$
  Τότε: $x \leq \theta$ και $x \leq -\theta$ (3)

Από τις σχέσεις (2) συμπεραίνουμε , ότι: $x \leq -\theta$

Δηλαδή , θα πρέπει να είναι $\mathbf{x \geq \theta}$ ή $\mathbf{x \leq -\theta}$

$2^{ος}$ τρόπος

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x \geq 0$, τότε έχουμε $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$
- Αν $x < 0$ τότε έχουμε $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -x \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$

Επομένως, η $|x| \geq \theta$ αληθεύει για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $\mathbf{x \geq \theta}$ ή $\mathbf{x \leq -\theta}$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

$3^{ος}$ τρόπος

Παρατηρήστε , πως η $|x| \geq \theta$ αποτελεί την άρνηση της $|x| < \theta$

Συνεπώς , η $|x| \geq \theta$ θα αληθεύει. Εκεί όπου δεν αληθεύει η $|x| < \theta$

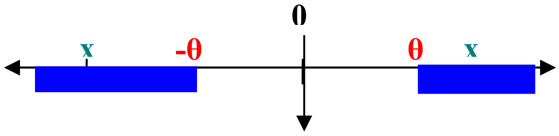
Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανισότητα: $|x-2| \geq 1$

Λύση

Ισχύει: $|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq -1 \\ ή \\ x-2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1+2 \\ ή \\ x \geq 1+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ ή \\ x \geq 3 \end{cases}$

Γεωμετρική ερμηνεία



$$\mathbf{d(x,0) \geq \theta \quad ή \quad |x| \geq \theta}$$

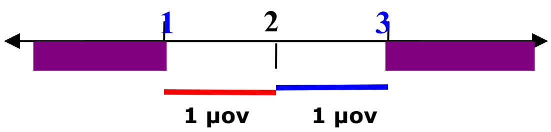
Αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς που απέχουν από το **0** απόσταση μεγαλύτερη από το **θ**. Οι αριθμοί αυτοί , προφανώς είναι εκείνοι που βρίσκονται πέρα από τους : **- θ , θ ,** δηλαδή οι αριθμοί των διαστημάτων:

(−∞ , -θ) = {x ∊ R: x ≤ - θ }
(θ , +∞) = {x ∊ R: x ≥ θ }

Προσοχή!!! Ο αριθμός **θ** πρέπει να είναι **θετικός**

Παραδείγματα

- $|x| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ ή \\ x \geq 4 \end{cases}$
- $|x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ ή \\ x \geq 3 \end{cases}$
- $|x| \geq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ ή \\ x \geq 7 \end{cases}$



Η $|x-2| \geq 1$,γεωμετρικά σημαίνει να βρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, που η απόστασή τους από το **2** να είναι μεγαλύτερη από **1**

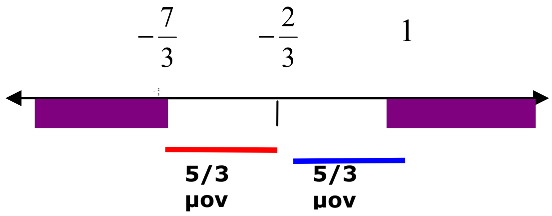
2. Να λυθεί η ανισότητα: $|-3x-2|\ge 5$

Λύση

Ισχύει:

$$|-3x-2|\ge 5 \Leftrightarrow |3x+2|\ge 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2\le -5 \\ ή \\ 3x+2\ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\le -5-2 \\ ή \\ 3x\ge 5-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x\le -7 \\ ή \\ 3x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\le -7 \\ ή \\ 3x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\frac{7}{3} \\ ή \\ x\ge 1 \end{cases}$$



Η σχέση $|-3x-2|\ge 5$ γράφεται:

$$|-3x-2|\ge 5 \Leftrightarrow |3x+2|\ge 5 \Leftrightarrow 3\left|x+\frac{2}{3}\right|\ge 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|\ge \frac{5}{3}$$

Δηλαδή, θα πρέπει η απόσταση του x από τον $-\frac{2}{3}$ να είναι μεγαλυτερη από $\frac{5}{3}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ $|\alpha x+\beta|\le\gamma$ **(1)** $|\alpha x+\beta|\ge\gamma$ **(2)**

Για την ανίσωση (1): $|\alpha x+\beta|\le\gamma \Rightarrow \begin{cases} \text{αδύνατη} & ,\gamma<0 \\ -\gamma\le\alpha x+\beta\le\gamma, & \gamma>0 \\ \alpha x+\beta=0 & ,\gamma=0 \end{cases}$

Για την ανίσωση (2): $|\alpha x+\beta|\ge\gamma \Rightarrow \begin{cases} \text{αόριστη} & , \gamma<0 \\ \alpha x+\beta\ge\gamma, \alpha x+\beta\le-\gamma, & \gamma>0 \\ \alpha x+\beta=0 & , \gamma=0 \end{cases}$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την ανίσωση $|3x-6|\le 3$ (1)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|3x-6|\le 3 \Leftrightarrow -3\le 3x-6\le 3 \Leftrightarrow -3+6\le 3x\le 3+6 \Leftrightarrow 3\le 3x\le 9 \Leftrightarrow 1\le x\le 3$

2. Να λύσετε την ανίσωση $|-x+2|>4$ (1)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|-x+2|>4 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2>4 \Rightarrow -x>2 \Rightarrow x<-2 \\ -x+2<-4 \Rightarrow -x<-6 \Rightarrow x>6 \end{cases}$

3. Να λύσετε την ανίσωση $|-5x+9|>-1$ (1)

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της (1) είναι μη αρνητικός αριθμός και το δεύτερο μέλος είναι αρνητικός αριθμός , η (1) αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

4. Να λύσετε την ανίσωση $|7x+8|<-2 \quad (1)$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της (1) είναι μη αρνητικός αριθμός και το δεύτερο μέλος είναι αρνητικός αριθμός , η (1) είναι αδύνατη στο R.

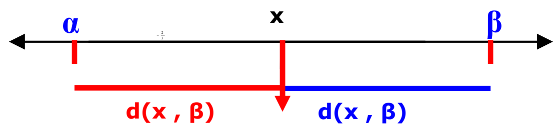
Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Geogebra	Livemath
Η λύση της ανίσωσης |αx + β| < γ (1)	Η λύση της ανίσωσης |αx +β| < θ
Η λύση της ανίσωσης |αx + β| < γ (2)	Οι ανισότητες |αx + β|< θ και | αx +β|< γx+δ
Η λύση της ανίσωσης |αx + β| > γ (1)	Η λύση της ανίσωσης |αx +β| < |γx +δ|

1.6 Γεωμετρική και αλγεβρική ερμηνεία της d(x,α) = d(x,β)

Γεωμετρική λύση της εξίσωσης d(x,α) = d(x,β)

Η σχέση **d(x,α) = d(x,β)** , μας λέει , ότι η απόσταση του x από το α , πρέπει να είναι ίση με την απόστασή του από το β
Τα σημείο όμως , ενός τμήματος που ισαπέχει από τα άκρα του είναι το μέσον του.
Το μέσον , όμως του [α , β] είναι το $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Άρα $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$



Το x είναι το μέσο του [α,β] δηλαδή $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

Αλγεβρική λύση της εξίσωσης d(x,α) = d(x,β)

$$d(x,\alpha)=d(x,\beta)\Leftrightarrow |x-\alpha|=|x-\beta|\Leftrightarrow |x-\alpha|^2=|x-\beta|^2\Leftrightarrow$$
$$(x-\alpha)^2=(x-\beta)^2\Leftrightarrow (x-\alpha)^2-(x-\beta)^2=0\Leftrightarrow$$
$$[(x-\alpha)-(x-\beta)][(x-\alpha)-(x-\beta)]=0\Leftrightarrow$$
$$(x-\alpha-x+\beta)(x-\alpha+x-\beta)=0\Leftrightarrow(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow$$
$$(\beta-\alpha)(2x-\alpha-\beta)=0\overset{\beta-\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}2x-\alpha-\beta=0\Leftrightarrow 2x=\alpha+\beta\Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Η εξίσωση |αx + β| = |γx +δ|

Παρατήρηση

Όπως φαίνεται στην αλγεβρική απόδειξη , η σχέση
$|x-\alpha|=|x-\beta|\Leftrightarrow x-\alpha=\pm(x-\beta)$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ $|\alpha x+\beta|=|\gamma x+\delta|$ (1)

Α. Επειδή το πρώτο και το δεύτερο μέλος είναι μη αρνητικοί αριθμοί , η εξίσωση (1) έχει λύση.
Είναι:

$$\alpha x+\beta=\gamma x+\delta \Leftrightarrow \alpha x-\gamma x=\delta-\beta \Leftrightarrow (\alpha-\gamma)x=\delta-\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}, \alpha\neq\gamma \\ 0x=\delta-\beta \Rightarrow \begin{cases} \text{αόριστη} \ ,\alpha=\gamma \quad \text{και} \quad \delta=\beta \\ \text{αδύνατη} \ ,\alpha=\gamma \quad \text{και} \quad \delta\neq\beta \end{cases} \end{cases}$$

ή

$$\alpha x+\beta=-\gamma x-\delta \Leftrightarrow \alpha x+\gamma x=-\delta-\beta \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)x=-\delta-\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\delta+\beta}{\alpha-\gamma}, \alpha\neq-\gamma \\ 0x=\delta+\beta \Rightarrow \begin{cases} \text{αόριστη} \ , \ \alpha=-\gamma \quad \text{και} \quad \delta=-\beta \\ \text{αδύνατη} \ , \ \alpha=-\gamma \quad \text{και} \quad \delta\neq-\beta \end{cases} \end{cases}$$

Β. Μπορούμε να υψώνουμε και τα δυο μέλη της (1) στο τετράγωνο και εν συνεχεία να υπολογίζουμε το x , με την βοήθεια της διαφοράς τετραγώνων , όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση $|4x-1|=|x-2|$ (1)

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

Είναι: $|4x-1|=|x-2| \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=x-2 \Rightarrow 4x-x=-2+1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \\ 4x-1=-x+2 \Rightarrow 4x+x=2+1 \Rightarrow 5x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

ή

$$|4x-1|=|x-2| \Rightarrow |4x-1|^2=|x-2|^2 \Rightarrow (4x-1)^2=(x-2)^2 \Rightarrow (4x-1)^2-(x-2)^2=0 \Rightarrow$$

$$\left[(4x-1)-(x-2)\right]\left[(4x-1)+(x-2)\right]=0 \Rightarrow (4x-x-1+2)(4x+x-1-2)=0 \Rightarrow$$

$$(3x+1)(5x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \\ 5x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $|-x-1|=|x-2|$ (1)

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

Είναι: $|-x-1|=|x-2| \Rightarrow \begin{cases} -x-1=x-2 \Rightarrow -x-x=-2+1 \Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ -x-1=-x+2 \Rightarrow 0x=2+1 \Rightarrow 0x=3(\text{αδύνατη}) \end{cases}$

ή

$$|-x-1|=|x-2| \Rightarrow |-x-1|^2=|x-2|^2 \Rightarrow (-x-1)^2=(x-2)^2 \Rightarrow (-x-1)^2-(x-2)^2=0 \Rightarrow$$

$$\left[(-x-1)-(x-2)\right]\left[(-x-1)+(x-2)\right]=0 \Rightarrow (-2x-1+2)(-1-2)=0 \Rightarrow$$

$$(-2x+1)(-3)=0 \Rightarrow -2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Άλλα παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+3|=|1-x|$

Λύση

$|2x+3|=|1-x| \Leftrightarrow 2x+3=\pm(1-x)$

οπότε:

- $2x+3=1-x \Leftrightarrow 2x+x=1-3 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ ή
- $2x+3=-(1-x) \Leftrightarrow 2x+3=-1+x \Leftrightarrow 2x-x=-1-3 \Leftrightarrow x=-4$

Η σχέση $|2x+3|=|1-x|$,γράφεται:

$|2x+3|=|1-x| \Leftrightarrow 2\left|x+\dfrac{3}{2}\right|=|x-1| \Leftrightarrow 2\left|x-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|=|x-1|$

Δηλαδή , η απόσταση του x από το 1 , πρέπει να είναι διπλάσια από την απόσταση του x από το $-\dfrac{3}{2}$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|=|x-5|$

Λύση

$|x+3|=|x-5| \Leftrightarrow x+3=\pm(x-5)$

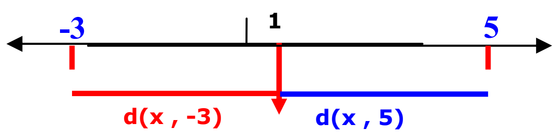
οπότε:

$x+3=x-5 \Leftrightarrow x-x=-5-3 \Leftrightarrow 0x=-8$ (αδύνατη)

ή

$x+3=-(x-5) \Leftrightarrow x+3=-x+5 \Leftrightarrow x+x=+5-3$

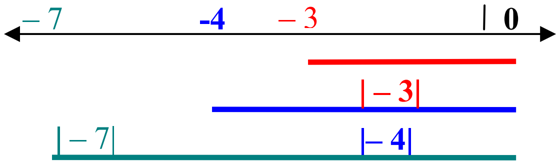
$\Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$



Το x είναι το μέσο του [-3,5] δηλαδή $x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

1.7. Η τριγωνική ανισότητα

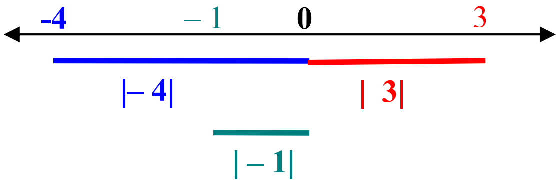
Ας πάρουμε τους αρνητικούς αριθμούς **– 4** και **– 3** .
Τότε (**– 4**) + (**– 3**) = **– 7**
Ισχύει: |**– 4**| **+** | **– 3**| = **7** και |(**– 4**) + (**– 3**)| = **7**



$$\left|(-4)+(-3)\right| = |-4| + |-3|$$

Ας πάρουμε τους θετικούς αριθμούς **4** και **3** . Τότε **4** + **3** = **7**
Ισχύει: | **4**| **+** | **3**| = **7** και | **4** + **3**| = **7**

Τέλος , ας πάρουμε τους ετερόσημους αριθμούς **– 4** και **3** .
Τότε (**– 4**) + **3** = **– 1**
Ισχύει: |**– 4**| **+** | **3**| = **7** και |(**– 4**) + **3**| = **1**



$$\left|(-4)+3\right| = |-4| + |3|$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα , παρατηρούμε ότι:
Αν οι αριθμοί α , β είναι ομόσημοι , τότε: $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$
Αν οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι , τότε: $|\alpha+\beta| < |\alpha| + |\beta|$
Γενικότερα, θα αποδείξουμε: $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|, \forall \alpha, \beta \in R$

Ιδιότητα 7 – Η τριγωνική ανισότητα

Ισχύει: $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \ ,\forall \alpha,\beta \in R \quad (1)$

Απόδειξη

1^{ος} τρόπος

Οι αριθμοί $|\alpha+\beta|$ και $|\alpha|+|\beta|$ είναι πάντοτε μη αρνητικοί αριθμοί.

Αν δεχτούμε ότι ισχύει η (1) , έχουμε διαδοχικά:

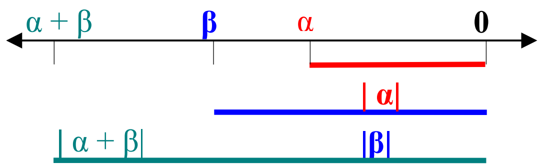
$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2 \le |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \le |\alpha\beta|$$

η οποία είναι αληθής.

Οι αριθμοί α , β είναι αρνητικοι



$|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$

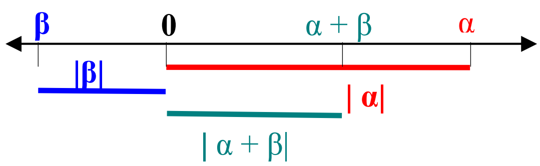
2^{ος} τρόπος

Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} -|\alpha| \le \alpha \le |\alpha| \ ,\forall \alpha \in R \\ -|\beta| \le \beta \le |\beta| \ ,\forall \beta \in R \end{array}\right\} \Rightarrow -(|\alpha|+|\beta|) \le \alpha+\beta \le |\alpha|+|\beta| \Rightarrow |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

Η ισότητα ισχύει όταν οι αριθμοί α ,β είναι ομόσημοι.

Οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι



$|\alpha+\beta| < |\alpha|+|\beta|$

Β.Οι αριθμοί $||\alpha|-|\beta||$ και $|\alpha+\beta|$ είναι πάντοτε μη αρνητικοί αριθμοί.

Αν δεχτούμε ότι ισχύει η (1) , έχουμε διαδοχικά:

$$||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha+\beta| \Leftrightarrow ||\alpha|-|\beta||^2 \le |\alpha+\beta|^2 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2 \le (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta| \le \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow -|\alpha\beta| \le \alpha\beta$$

η οποία είναι αληθής.

Η ισότητα ισχύει όταν οι αριθμοί α ,β είναι ετερόσημοι

Η ιδιότητα επεκτείνεται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων , δηλαδή:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu| = |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_\nu| \quad \forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu \in R$$

Όπου ν είναι φυσικός αριθμός , με $\nu \ge 2$.

Ισχύει: $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha+\beta|$,$\forall \alpha,\beta \in R$ **και** $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha-\beta|$,$\forall \alpha,\beta \in R$

Απόδειξη

Έστω $k = |\alpha|-|\beta|$. Τότε επειδή:

$$\left.\begin{aligned} \alpha=(\alpha+\beta)-\beta \Rightarrow |\alpha| = |(\alpha+\beta)-\beta| \le |\alpha+\beta|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha|-|\beta| \le |\alpha+\beta| \\ \beta=(\beta+\alpha)-\alpha \Rightarrow |\beta| = |(\beta+\alpha)-\alpha| \le |\alpha+\beta|+|\alpha| \Leftrightarrow |\beta|-|\alpha| \le |\alpha+\beta| \end{aligned}\right\} \Rightarrow ||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha+\beta| \quad \mathbf{(1)}$$

Αν στην (1) θέσουμε στην θέση του β το $-\beta$, θα έχουμε:

$$||\alpha|-|-\beta|| \le |\alpha+(-\beta)| \Rightarrow ||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha-\beta|$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Παραδείγματα με μία μεταβλητή

1. Αν $|\alpha-1| \le 3$ (1), τότε: Ι) Από ποιόν αριθμό είναι μικρότερη η $|2\alpha-3|$ **;**
ΙΙ) Μεταξύ ποίων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3$;

ΛΥΣΗ

Ι) Προσπαθούμε να εμφανίσουμε στην παράσταση 2α – 3 την παράσταση α – 1 ,

Έτσι: $|2\alpha-3| = \left|\underbrace{2(\alpha-1)+2}_{2\alpha}-3\right| = |2(\alpha-1)-1| \le |2(\alpha-1)|+|-1| = 2|\alpha-1|+1 \le 2.3+1 = 7$

Άρα: $|2\alpha-3| \le 7$

ΙΙ) Εκ της (1) , παίρνουμε: $|\alpha-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le \alpha-1 \le 3 \Leftrightarrow -3+1 \le \alpha \le 3+1 \Leftrightarrow -2 \le \alpha \le 4$

(Αυτά είναι τα φράγματα του α)

Άρα: $-2 \le \alpha \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 2\alpha \le 8 \Leftrightarrow -4-3 \le 2\alpha-3 \le 8-3 \Leftrightarrow -7 \le 2\alpha-3 \le 5$ Έτσι: $-7 \le 2\alpha-3 \le 5$

2. Αν $|3\alpha-1| \le 2$ (1), τότε: Ι) Από ποιόν αριθμό είναι μικρότερη η $|4\alpha+5|$ **;**
ΙΙ) Μεταξύ ποίων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $4\alpha+5$;

ΛΥΣΗ

Ι) Προσπαθούμε να εμφανίσουμε στην παράσταση 4α + 5 την παράσταση 3α – 1

Έτσι:

$$|4\alpha+5| = \left|\underbrace{\frac{4}{3}(3\alpha-1)+\frac{4}{3}}_{4\alpha}+5\right| = \left|\frac{4}{3}(3\alpha-1)+\frac{19}{3}\right| \le \left|\frac{4}{3}(3\alpha-1)\right|+\left|\frac{19}{3}\right| = \frac{4}{3}|3\alpha-1|+\frac{19}{3} \le \frac{4}{3}.2+\frac{19}{3} = \frac{8}{3}+\frac{19}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

Άρα: $|4\alpha+5| \le 9$

ΙΙ) Εκ της (1) , παίρνουμε: $|3\alpha-1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le 3\alpha-1 \le 2 \Leftrightarrow -2+1 \le 3\alpha \le 2+1 \Leftrightarrow -1 \le 3\alpha \le 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le \alpha \le 1$

(Αυτά είναι τα φράγματα του α) Άρα:

$-\frac{1}{3} \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le 4\alpha \le 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}+5 \le 4\alpha+5 \le 4+5 \Leftrightarrow \frac{11}{3} \le 4\alpha+5 \le 9$ Έτσι: $\frac{11}{3} \le 4\alpha+5 \le 9$

Παραδείγματα με δύο μεταβλητές

3. Αν $|2\alpha+7|\le 1$ (1), και $|-5\beta+1|\le 4$ τότε:

I) Από ποιόν αριθμό είναι μικρότερη η $|3\alpha-2\beta+9|$ **;**

II) Μεταξύ ποίων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $3\alpha-2\beta+9$;

ΛΥΣΗ

I) Προσπαθούμε να εμφανίσουμε στην παράσταση 3α – 2β + 9 , τις παραστάσεις 2α + 7 και 5β – 1.

(Επειδή $|-5\beta+1|=|5\beta-1|$ παίρνουμε:

$$|3\alpha-2\beta+9|=\left|\underbrace{\frac{3}{2}(2\alpha+7)-\frac{21}{2}}_{3\alpha}\ \underbrace{-\frac{2}{5}(5\beta-1)-\frac{2}{5}}_{-2\beta}+5\right|=\left|\frac{3}{2}(2\alpha+7)\ -\frac{2}{5}(5\beta-1)\underbrace{-\frac{21}{2}-\frac{2}{5}+5}_{-\frac{59}{10}}\right|\le$$

$$\left|\frac{3}{2}(2\alpha+7)\ \right|+\left|-\frac{2}{5}(5\beta-1)\right|+\left|-\frac{59}{10}\right|=\frac{3}{2}|2\alpha+7\ |+\frac{2}{5}|5\beta-1|+\frac{59}{10}\le\frac{3}{2}.1+\frac{2}{5}.4+\frac{59}{10}=\frac{3}{2}+\frac{8}{5}+\frac{59}{10}=\frac{15+16+59}{10}=\frac{90}{10}=9$$

Άρα: $|3\alpha-2\beta+9|\le 9$

II) Εκ των (1) και (2) , παίρνουμε:

$$|2\alpha+7|\le 1 \Leftrightarrow -1\le 2\alpha+7\le 1 \Leftrightarrow -1-7\le 2\alpha\le 1-7 \Leftrightarrow -8\le 2\alpha\le -6 \Leftrightarrow -4\le\alpha\le -3$$

(Αυτά είναι τα φράγματα του α) και

$$|-5\beta+1|\le 4 \Leftrightarrow |5\beta-1|\le 4 \Leftrightarrow -4\le 5\beta-1\le 4 \Leftrightarrow -3\le 5\beta\le 5 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}\le\beta\le 1$$

(Αυτά είναι τα φράγματα του β) Άρα:

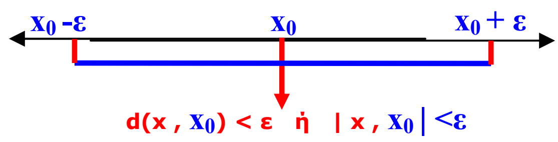
$$\left.\begin{array}{l}-4\le\alpha\le -3\\ -\dfrac{3}{5}\le\beta\le 1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-12\le 3\alpha\le -9\\ -2\le -2\beta\le \dfrac{6}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow -12-2\le 3\alpha-2\beta\le -9+\frac{6}{5}\Rightarrow$$

$$-12-2+9\le 3\alpha-2\beta+9\le -9+\frac{6}{5}+9\Rightarrow -5\le 3\alpha-2\beta+9\le\frac{6}{5}$$

Έτσι: $-5\le 3\alpha-2\beta+9\le\dfrac{6}{5}$

1.8. Η έννοια της περιοχής αριθμού

Η περιοχή ή γειτονιά **του x_0**



Έστω x_0 ένας πραγματικός αριθμός και **ε** ένας θετικός αριθμός , οσονδήποτε μικρός.
Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που απέχουν από το x_0 απόσταση μικρότερη από το **ε** ονομάζεται **περιοχή ή γειτονιά** του x_0 .
Το x_0 λέγεται **κέντρο** της περιοχής και ο αριθμός ε λέγεται **ακτίνα** της περιοχής
Έστω x ένας αριθμός αυτής της περιοχής. Τότε ισχύει:

$$d(x,x_0)<\varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x-x_0<\varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

Επομένως οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

Απόλυτη τιμή	**Απόσταση σημείων**	**Ανισοτική σχέση**
$\lvert x-x_0\rvert<\varepsilon$	$d(x,x_0)<\varepsilon$	$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$

- Η σχέση $|x-2|<3$ παριστάνει περιοχή του 2, ακτίνας 3
- Η σχέση $|3x-1|<5$ γράφεται $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{5}{3}$, και άρα παριστάνει περιοχή του $\frac{1}{3}$,ακτίνας $\frac{5}{3}$.
- Η σχέση $|-5x-4|<2$ γράφεται:

$|5x+4|<2 \Leftrightarrow \left|x+\frac{4}{5}\right|<\frac{2}{5}$, και άρα παριστάνει περιοχή του $-\frac{4}{5}$,ακτίνας $\frac{2}{5}$.

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Geogebra
Απόλυτη – Απόσταση – Ανισοτική σχέση

Livemath
1.Απόσταση δύο αριθμών - Περιοχή του x
2.Μετατροπή ανισοτικής σχέση σε απόλυτη τιμή

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Αν μας δίνεται η ανισοτική σχέση $\alpha < \kappa x < \beta$ (1) και θέλουμε να βρούμε την σχέση για την απόλυτη τιμή , εργαζόμαστε ως εξής:

- Διαιρούμε όλα τα μέλη της (1) με το κ.
- Αφαιρούμε από όλα τα μέλη το ημιάθροισμα των άκρων της ανισοτικής σχέσης. Έτσι , τα άκρα της γίνονται αντίθετοι αριθμοί.
- Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $-\kappa < x-\alpha < \kappa \Leftrightarrow |x-\alpha| < \kappa$.

Παραδείγματα

1. Δίνεται η ανισοτική σχέση $3 < 2x < 5$ (1) Να γράψετε την αντίστοιχη απόλυτη τιμή.

ΛΥΣΗ

Διαιρούμε όλα τα μέλη της (1) με το 2, και παίρνουμε: $3 < 2x < 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

Βρίσκουμε το ημιάθροισμα των άκρων της ανισοτικής σχέσης

Το ημιάθροισμα είναι: $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{\frac{8}{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Αφαιρούμε από όλα τα μέλη το ημιάθροισμα των άκρων της ανισοτικής σχέσης.

$$3 < 2x < 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}-2 < x-2 < \frac{5}{2}-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{2}$$

2. Δίνεται η ανισοτική σχέση $4 < 5x < 6$ (1) Να γράψετε την αντίστοιχη απόλυτη τιμή.

ΛΥΣΗ

Διαιρούμε όλα τα μέλη της (1) με το 5, και παίρνουμε: $4 < 5x < 6 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$

Βρίσκουμε το ημιάθροισμα των άκρων της ανισοτικής σχέσης

Το ημιάθροισμα είναι: $\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}{2} = \dfrac{\frac{10}{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Αφαιρούμε από όλα τα μέλη το ημιάθροισμα των άκρων της ανισοτικής σχέσης.

$$4 < 5x < 6 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < x < \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5}-1 < x-1 < \frac{6}{5}-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x-1 < \frac{1}{5} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{5}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Αν μας δίνεται η απόλυτη τιμή ανισοτική σχέση $|\kappa x - \alpha| < \beta$ (1) και θέλουμε να βρούμε την ανισοτική σχέση , εργαζόμαστε ως εξής:

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα: $|\kappa x - \alpha| < \beta \Rightarrow -\beta < \kappa x - \alpha < \beta$ (2)
- Προσθέτουμε το α σε όλα τα μέλη $-\beta < \kappa x - \alpha < \beta \Rightarrow -\beta + \alpha < \kappa x < \beta + \alpha$ (3)
- Διαιρούμε όλα τα μέλη της (1) με το κ.

Παραδείγματα

1. Δίνεται η απόλυτη τιμή $|3x-2| < 4$ (1) Να γράψετε την αντίστοιχη ανισοτική σχέση για το x.

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη απόλυτη τιμή (1) γράφεται:

$$|3x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x-2 < 4 \Leftrightarrow -4+2 < 3x < 4+2 \Leftrightarrow -2 < 3x < 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

2. Δίνεται η απόλυτη τιμή $|-5x-2| < 4$ (1) Να γράψετε την αντίστοιχη ανισοτική σχέση για το x.

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη απόλυτη τιμή (1) γράφεται:

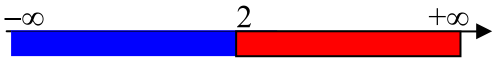
$$|-5x-2| < 4 \Leftrightarrow |5x+2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 5x+2 < 4 \Leftrightarrow -4-2 < 5x < 4-2 \Leftrightarrow -6 < 5x < 2 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} < x < \frac{2}{5}$$

1.9 Απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές

1. Να απλοποιήσετε την παράσταση A = $|3x-6|-x-4$

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τις παραστάσεις:



$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x \in (-\infty\ , 2]$

  Τότε είναι $x \le 2 \Rightarrow 3x \le 6 \Rightarrow 3x-6 \le 0 \Rightarrow |3x-6| = 6-3x \quad (1)$

  Επομένως:

  $A = |3x-6|-x-4 = 6-3x-x-4 = -4x+2$

  $x \in (\ 2, +\infty)$

  Τότε είναι $x > 2 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow 3x-6 > 0 \Rightarrow |3x-6| = 3x-6 \quad (2)$

  Επομένως:

  $A = |3x-6|-x-4 = 3x-6-x-4 = 2x-10$

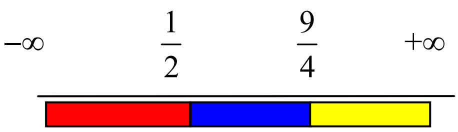
Άρα:_ $A = \begin{cases} -4x+2, x \le 2 \\ 2x-10, x > 2 \end{cases}$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν απόλυτη τιμή

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση A = $|4x-9|-|2x-1|$

Θεωρούμε τις παραστάσεις:



$4x-9=0 \Rightarrow 4x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

  Τότε είναι: $x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2x \le 1 \Rightarrow 2x-1 \le 0 \Rightarrow |2x-1| = 1-2x \qquad (1)$

  $x < \frac{9}{4} \Rightarrow 4x < 9 \Rightarrow 4x-9 < 0 \Rightarrow |4x-9| = -4x+9 \qquad (2)$

  Επομένως:

  $A = |4x-9|-|2x-1| = 9-4x-(1-2x) = 9-4x-1+2x = -2x+8$

- $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right]$

  Τότε είναι: $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow 2x-1 > 0 \Rightarrow |2x-1| = 2x-1 \qquad (3)$

  $x \le \frac{9}{4} \Rightarrow 4x \le 9 \Rightarrow 4x-9 \le 0 \Rightarrow |4x-9| = -4x+9 \qquad (4)$

  Επομένως:

$A = |4x-9| - |2x-1| = 9-4x-(2x-1) = 9-4x-2x+1 = -6x+10$

- $x \in \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$

Τότε είναι: $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow 2x-1 > 0 \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$ (5)

$x > \frac{9}{4} \Rightarrow 4x > 9 \Rightarrow 4x-9 > 0 \Rightarrow |4x-9| = 4x-9$ (6)

Επομένως:

$A = |4x-9| - |2x-1| = 4x-9-(2x-1) = 4x-9-2x+1 = 2x-8$

$$\text{Άρα: } A = \begin{cases} -2x+8, x \le \frac{1}{2} \\ -6x+10, \frac{1}{2} < x \le \frac{9}{4} \\ 2x-8, x > \frac{9}{4} \end{cases}$$

1.10 Η ανίσωση $\alpha < |\kappa x + \lambda| < \beta$

1. Να λύσετε την ανίσωση: **ι)** $1 \le |3x+7| \le 4$

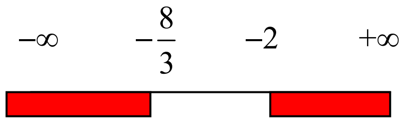
Λύση

Έχουμε:

$1 \le |3x+7| \le 4 \Leftrightarrow |3x+7| \ge 1$ (1) και $|3x+7| \le 4$ (2)

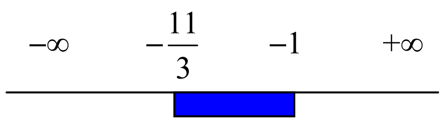
Είναι:

$$|3x+7| \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7 \ge 1 \Rightarrow 3x \ge -6 \Rightarrow x \ge -2 \\ 3x+7 \le -1 \Rightarrow 3x \le -8 \Rightarrow x \le -\frac{8}{3} \end{cases}$$

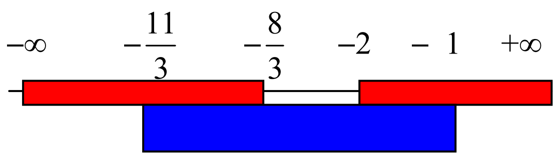


και

$|3x+7| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 3x+7 \le 4 \Leftrightarrow -4-7 \le 3x \le 4-7 \Leftrightarrow -11 \le 3x \le -3 \Leftrightarrow -\frac{11}{3} \le x \le -1$



Επομένως οι (1) και (2) συναληθεύουν στο



$\left[-\frac{11}{3}, -\frac{8}{3}\right] \cup [-2, -1]$

Σύνδεσμοι εφαρμογών Java

Η ανίσωση α < |κx+ λ| < β

Η ανίσωση α < |κx+ λ| < β

Βάση ασκήσεων και ερωτήσεων για τους μαθητές

Α. Βασική Μελέτη

Επισκεφθείτε την σελίδα **http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/al/41-2010-03-14-19-34-00** και ασχοληθείτε:

- Με τις ερωτήσεις **Σωστό –Λάθος**
- Με τις ερωτήσεις **Αντιστοίχησης**
- Με τις ερωτήσεις **Πολλαπλής επιλογής**
- Με τις ασκήσεις **Ανάπτυξης**

Β. Εφαρμογές Java

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις παρακάτω συνδέσεις για να εμπλουτίσετε τις γνώσεις σας

Geogebra	Livemath	Scetchpad
Ορισμός της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού	Οι ανισώσεις |αx+β|< θ και αx+β|<γx+δ	Ορισμός της απόλυτης τιμής
Η απόσταση δύο αριθμών	Η εξίσωση |αx + β| = γ	Ιδιότητα 1 των απολύτων τιμών
Η εξίσωση |x - a | = β	Η εξίσωση |αx + β| = |γx +δ|	Ιδιότητα 2 των απολύτων τιμών
Η εξίσωση |x - a | = β (2)	Η λύση της ανίσωσης |αx +β| < θ	Γεωμ. ερμηνεία της |x|<θ ⇒ -θ<x<θ
Λύση ανίσωσης της μορφής |αx + β| < γ	Ανισοτική σχέσης σε απόλυτη τιμή	Η τριγωνική ανισότητα
Λύση ανίσωσης της μορφής |αx + β| < γ	Απόσταση δύο αριθμών - Περιοχή του x	
Λύση ανίσωσης της μορφής |αx + β| > γ	Η λύση της ανίσωσης |αx +β| < |γx +δ|	
Λύση ανίσωσης της μορφής κ < |αx + β| < λ		
Λύση ανίσωσης της μορφής κ < |αx + β| < λ		
Απόλυτη τιμή - Απόσταση - Ανίσωση		
Απλοποίηση της παράστασης |αx + β| + γx + δ		

Αν έχετε κατανοήσει την θεωρία και την μέθοδο επίλυσης των ασκήσεων , να ασχοληθείτε με τις παρακάτω δραστηριότητες:

Δραστηριότητες για τους μαθητές

Α. Τεστ

Το τεστ περιέχει 27 ερωτήσεις και η διάρκεια εξέτασης είναι 120 λεπτά. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις του τεστ. Εν συνεχεία δείτε την βαθμολογία σας.

Εισοδος στο τεστ ερωτήσεων

Β΄ Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα - Ασκήσεις

1.1. Να λύσετε την εξίσωση:
$d(-3,4) = x - 2$

1.2. Να λύσετε την εξίσωση:
$d(-3, -4x) = x - 2$

1.3. Να λύσετε την εξίσωση:
$d(-3, -4x) + d(x, 0) = x - 2$

1.4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
ι) $|x| = 3$ ιι) $|x| = -2$ ιιι) $|4x| = 7$

1.5. Να λύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω εξισώσεις :
α) $|-2x+2| = 4$ **β)** $|5x-3| = 2$ **γ)** $|-x| - 2 = 0$

1.6. Να λύσετε τις εξισώσεις:
ι) $|3x+2| = 7$ ιι) $|-2x+9| = 4$ ιιι) $|-5x+11| = -1$

1.67. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $\dfrac{|x|^2}{x}$ β) $\dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ γ) $\dfrac{4-x^2}{2+|x|}$

1.8. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|-3x+1| = 0$ β) $|4x+3| = 1$ γ) $|-x| + 1 = 0$

1.9. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|-11x+2| = -3$ **β)** $|-4x+1| = 3$ **γ)** $|-x| - 8 = 0$

1.10. Να λυθεί η εξίσωση:
$$\frac{1+|x|}{3} - \frac{1-2|x|}{6} = \frac{3|x|-1}{2} + 1$$

1.11 .Να εκφράσετε χωρίς απόλυτα, για τις διάφορες τιμές του x , τις παρακάτω παραστάσεις :

α) $|x+3|$ β) $|x-7|$ γ) $|x+4|+|x-3|$

δ) $-2|7-x|-4|x-1|$ ε) $|2x-3|+|3x-2|$

1.12.Αν ισχύει: $|x|<1$ να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση: $A=2|x+3|-4|x-2|+x-6$

1.13. Αν ισχύει: $x<y<z<0$ να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση:

$A=-2|x-y|+4|y-z|+5|z-x|+|x+y|$

1.14.Αν $\alpha<1<\beta$ να δείξετε ότι: $|1-\alpha|+|1-\beta|=|\alpha-\beta|$ (1)

Να δώσετε και γεωμετρική ερμηνεία της (1)

1.15 Αν ισχύει $x>3$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A=\frac{2x-6}{|x-3|}$$

1.16.Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{|x|^3}{x}$ β) $\frac{x^2-4}{|x|+2}$ γ) $\frac{16-x^2}{8+2|x|}$

1.17.Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$K=|\sqrt{6}-2|+|\sqrt{6}-3|-2|\sqrt{6}+1|$$

1.18. Να λύσετε γεωμετρικά και αλγεβρικά τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-2|=|x-1|$ β) $|x-4|=2|x+1|$

1.19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|4x+5|=0$ β) $|2x+3|=1$

γ) $|2x|+3=0$ δ) $|2x+1|=-3$

1.20. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1+|x|}{3}-\frac{1-2|x|}{6}=\frac{3|x|-1}{2}+1$

1.21. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

A= $2|x-7|-3x+10$ B= $-|x-1|+4|1-x|$

Γ = $2|5-x|-|x-2|+3-2x$

1.22. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{|1-x|+2}{5}-|x-1|+1=\frac{2|1-x|}{3}-|1-x|$$

1.23.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|2x+7|-|5x-1|=0$ β) $|x+1|-|x-2|=1$

1.24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

ι) $|x-2|=2-x$ ιι) $|x+4|=x+4$

ιιι) $|3+2x|=2x$

1.25.Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|1-|x||=||x|+5|$ β) $||x|-2|=1$

1.26.Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|||x|-1|-2|=1$

β) $3|2x-4|+|x^2-4|+|2-x|=0$

1.27.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x^2-9|+|x^2-5x+6|=0$

β) $|x-1|+|x^2+x|=0$

1.28. Να λυθεί η εξίσωση: $|x^3+8|+3=0$

1.29.Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$A=\frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{x}$ με $x\neq 0$

1.30.Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{|x|+4}{3}-\frac{2|x|-1}{5}=|x|-\frac{1}{15}$$

1.31. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|2x-7|+5=\frac{|7-2x|-1}{5}$$

1.32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|2-|1-x||\leq 3$ β) $|x^2-1|x\geq 0$

1.33 .Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $6x-|x|-5=0$ β) $x-|x|+1=0$

γ) $x|x|-3x=2|x|-6$ δ) $|x+5|=2(1-x)$

1.34. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x|-|3-x|=2$ β) $|3-x|+2|x+3|=4$

1.35. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|7-d(x,2)|=3$ β) $|6-d(x,1)|=2$

1.36. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|x-2|<1$ β) $|x+2|\geq 3$ γ) $|3x-7|<-1$

1.37 Να λυθούν οι ανισώσεις::

α)$|4-3x|>-2$ β) $|x-4|\leq 3$

1.38.Να λυθούν οι ανισώσεις

α) $|2x-11|<8$ β) $|4x+3|\geq 1$:

1.39. Να λυθούν οι ανισώσεις

: α) $|5x-1|>2$ β) $|3x+5|\leq 10$

1.40. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α) $1<|3x-4|<5$ β) $|x+3|\leq|3x-2|$

γ) $|2x+5|\geq x-2$ δ) $|x|\leq -x$

1.41. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{|3-x|-1}{3}-|x-3|>\frac{|3-x|-4}{2}+2$$

1.42. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|3-|2x+4||\leq 5$ β) $||x+2|-1|<4$

1.43. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{4|x|-6}{3}<5|x|-\frac{3}{2}$ β) $5\left(3-|x|\right)<3|x|+2$

144 . Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $1\leq|2x-1|<7$ β) $-3\leq|2-3x|\leq 2$

1.45. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{|x|-2}{2}<-|x|-2$ β) $\left|\frac{2}{3x-2}\right|>\frac{1}{5}$

1.46. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x<3|x-2|+3$ β) $2|x+1|>4+x$

1.47. Να λυθεί η ανίσωση:

$|2-4x|+3|x+1|-7<2x$

1.48. Να λυθεί η ανίσωση:

$|2-x|+3|x-2|-5<3-2x$

1.49. Να λυθεί η ανίσωση:

$-4<|2-4x|<-1$

1.50. Να λυθεί η ανίσωση:

$-1<|1-3x|<2$

1.51.Να λυθεί η ανίσωση:

$7<|3-2x|+x<11$

1.52. Να λυθεί η ανίσωση:

$x<1-|7-5x|<17$

1.53. Να λυθεί η ανίσωση:

$-4+|7-x|<|2-4x|$

1.54.Να λυθεί η ανίσωση:

$|x|-|2-x|<|1+x|$

1.55. Να λυθεί η ανίσωση:

$3|x|-2|5+x|<4|1+x|$

1.56. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{|x-2|}{3}-5>\frac{-4|2-x|+2}{3}$$

1.57. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{|x-1|+2}{3}-\frac{|x-1|-1}{4}\leq 1$$

1.58. Να λυθεί η ανίσωση:

$|3+x|-2|x-1|<2x-|x|$

1.59. Να λυθεί η ανίσωση:

α) $\frac{2|x-3|-1}{3}-|3-x|>\frac{|x-3|-8}{3}+1$

1.61. Να λυθεί η ανίσωση:

$|2-x|+|x-2|-5|x-8|\geq 1-|2x|$

1.60. Να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{3|4x-3|+4}{4}-\frac{5-|4x-3|}{2}>\frac{|3-4x|}{3}-3$

1.62. Να λυθεί η ανίσωση:

$-4<|2-4x|-|x-3|<-1$

Β΄ Ομάδα - Ασκήσεις

1.63. Αν $|x|\leq 1$ και $|y|\leq 2$, να αποδείξετε ότι:

α) $|2x+3y|\leq 8$ και β) $|-x-y+3|\leq 6$

1.69. Αν $x\in R^*$, να αποδείξετε ότι $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2.$

1.64. Αν $\alpha>\beta$ και $\alpha+\beta>0$, να δείξετε ότι:

$|\alpha|>|\beta|$

1.70. Αν $1<x<y<2$ να απλοποιήσετε την παράσταση:

$2|x-y|+|3x-1|+|4y-5|-3|x+y-4|$.

1.65. Αν $|x|<1$ και $|y|<1$,να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$

1.71. Αν $|x|\leq 2$ να δείξετε ότι : $|2x^2-3x+3|\leq 17$

1.66. Αν $\alpha<x<\beta$, να δειχτεί ότι :

$\big||x-\alpha|-|x-\beta|\big|=|2x-\alpha-\beta|$

1.72. Αν $|x|\leq 3$ και $|y|\leq 4$, να δείξετε ότι :

$|2x-5y-7|\leq 33$

1.67. Αν $\alpha<x<\beta$, να δειχτεί ότι :

$\big||x-\beta|+|x-\alpha|\big|>|\beta-x|-|\alpha-x|$

1.73. Να δείξετε ότι :

$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)$

1.68. Να λύσετε την εξίσωση: $|x-2|=-|4-x^2|$..

1.74. Να δείξετε ότι : $|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2=4\alpha\beta$

1.75. Αν $\alpha < 1 < \beta$ να αποδείξετε ότι:
$|\alpha-2|+|\beta|-|\alpha-\beta|=2$

1.87. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $|x-\alpha|>|x-\beta|$ να δειχθεί ότι:
$x < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

1.76. Αν ισχύει $\left|\dfrac{\alpha+16}{\alpha+1}\right|=4, \alpha\neq -1$, τότε: $|\alpha|=4$

1.88. Αν $xy>0$ να δείξετε ότι $\dfrac{|x|}{|x+y|}+\dfrac{|y|}{|x|+|y|}=1$

1.77. Αν $|\alpha-1|<5$ και $|\beta-2|<3$ να αποδείξετε ότι:
α) $-5<\alpha+\beta<11$ και β) $|2\alpha-\beta|<13$

1.89. Να δειχθεί ότι: $x|y|+y|x|\leq xy+|xy|$

1.78. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x που επαληθεύουν τις ανισώσεις:
$|x|\geq 2$ και $|3x+1|<17$

1.90. Για κάθε $x, y\in R$ με $xy\neq 0$, δείξτε ότι:
$\left|\dfrac{y}{x}\right|+\left|\dfrac{x}{y}\right|\geq 2$

1.79. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί και $\alpha\beta\neq 0$, να δείξετε ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$

1.91. Αν $x, y\in R$ με $xy\neq 0$, να δείξετε ότι:
$\left|\dfrac{x}{y}\right|<\left|\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right|$

1.80. Αν $xy<0$ να δείξετε ότι: $\dfrac{\big||x|-|y|\big|}{|x+y|}+\dfrac{|x-y|}{|x|+|y|}=2$

1.92. Αν $x, y\in R$ με $xy\neq 0$ και $|2x+3y|<|x+6y|$ να δείξετε ότι: α) $\left|\dfrac{x}{y}\right|<3$ β) $\left|\dfrac{x}{y}\right|-\left|\dfrac{y}{x}\right|<\dfrac{8}{3}$

1.81. Αν $\alpha\beta\neq 0$ να δειχθεί η ισοδυναμία:
$\dfrac{\big|\alpha|\beta|+\beta|\alpha|\big|}{|\alpha|\cdot|\beta|}=2\Leftrightarrow \alpha\beta>0$

1.93. Αν $|x-1|<1$ και $|y+1|<1$, να αποδείξετε ότι:
$-7<2x+3y-1<3$

1.82. Αν $0<\alpha<1$ και $-1\leq x\leq \alpha$ να δειχθεί ότι:
$|x+1|\leq \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\cdot(1-|x|)$

1.94. Να αποδείξετε ότι:
$\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\leq\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$

1.83. Για $x\neq -1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-x}{1+|x|}=\dfrac{1-|x|}{1+x}$

1.95. Αν $\alpha, \beta \in R$, να αποδείξετε ότι:
$|2\alpha+\beta|-|\alpha+2\beta|\leq|\alpha-\beta|$

1.84. Αν $|x-3|<2$ και $|y+4|<5$, να αποδείξετε ότι:
$|x+y-7|<15$

1.96. Αν $\alpha, \beta \in R$, να αποδείξετε ότι:
$|\alpha|\leq\dfrac{|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|}{2}$

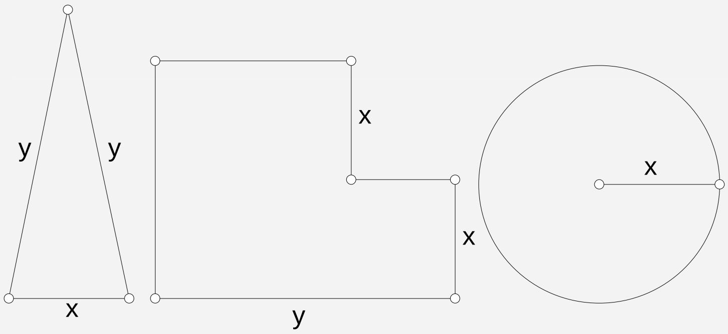
1.85. Αν $|2x-3|<2$ και $|3y-4|<1$, να αποδείξετε ότι:
$|3x+2y-5|<\dfrac{95}{6}$

1.97. Αν $\alpha\in R^*$, να αποδείξετε ότι:
$\left|\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right|\leq|\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|}$

1.86. Αν $|x|<1$ να δειχθεί ότι: $|x+1|+|x-1|=2$

1.98. Αν $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι:
$\big||\alpha|+\alpha\big|+\big|\alpha-|\alpha|\big|+2\alpha=0$

1.99. Αν $|x-2|<0{,}1$ και $|y-4|<0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



1.100. Χαράξτε έναν άξονα και πάρτε πάνω σ' αυτόν τα σημεία A B και M με συντεταγμένες 1, 2 και x αντιστοίχως, για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x<1$, β) $x=1$, γ) $1<x<2$, δ) $x=2$, ε) $2<x$

A) 1) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x-1|$ και $|x-2|$ και τι παριστάνει η παράσταση $|x-1|+|x-2|$.

2) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|x-1|+|x-2|$ και πότε αυτή παρουσιάζεται;

3) Παίρνει η παράσταση αυτή μέγιστη τιμή;

B) 1) Τι παριστάνει γεωμετρικά η παράσταση $\big||x-1|-|x-2|\big|$;

2) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της παράστασης. $\big||x-1|-|x-2|\big|$ και πότε αυτές παρουσιάζονται;

1.101. Αν $|x|>1$ και $y=\dfrac{1}{1-|x|}$, να αποδείξετε ότι:

α) $|y|>1$ και β) $x=\dfrac{1}{1-|y|}$

1.102. Αν $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι:

$$|xy| \le \left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2$$

1.103. Αν $x, y, z \in R$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|}+\frac{|yz|}{|y|+|z|}+\frac{|zx|}{|z|+|x|} \le \frac{|x|+|y|+|z|}{2}$$

1.104 Αν $xy \neq 0$ και ισχύει: $\dfrac{x^2}{2} \le y^2$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{y}\right| < \left|\dfrac{y}{x}\right| + \dfrac{3}{2}$

1.105. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = 2|x-3| + 3|2x-4| - |4x-2| + 3x - 5$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x

Γ΄ Βιβλιογραφία

Να βρείτε βιογραφικά στοιχεία για τους :

A) Newton
B) Pascal
Γ) Cauchy

Δ΄ Εργασία ομάδων

Η κάθε πενταμελής ομάδα μαθητών θα πρέπει να παραδώσει σε διάστημα 20 ημερών λυμένες 30 ασκήσεις από τις παραπάνω άλυτες ασκήσεις.