ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ.
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022-2023

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ

Ο κλάδος των Μαθηματικών «Άλγεβρα» της Α΄ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ. περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες αφενός είναι απαραίτητα στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης του σημερινού σύγχρονου πολίτη και αφετέρου συνδέονται με στοιχεία της επαγγελματικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές/-ήτριες έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αρκετές από αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ τάξη του ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ. θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους/στις μαθητές/-ήτριες. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσα από την ανάπτυξη και σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεών τους και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Η σύνδεση με προβλήματα, φαινόμενα και καταστάσεις που έρχονται από το χώρο της επαγγελματικής εκπαίδευσης (πχ. φαινόμενα που περιλαμβάνουν μεγέθη που συμμεταβάλλονται για τη συζήτηση των συναρτήσεων) μπορεί να βοηθούν στην απόδοση νοήματος στις μαθηματικές έννοιες και τις διαδικασίες. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (αλγεβρική παράσταση, γράφημα, πίνακας αριθμητικών τιμών, λεκτικές διατυπώσεις) και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην §Ε.1, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \;\; \text{και} \;\; \beta \neq 0$ της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

Προτείνεται να συζητηθούν τα σύμβολα «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$» μέσα από παραδείγματα που απαντώνται την καθημερινή επικοινωνία. Για παράδειγμα Α: «Η Σοφία είναι κόρη του Νίκου», Β: «Ο Νίκος είναι πατέρας της Σοφίας». Να εξετάσετε αν ισχύει Α$\Rightarrow$Β και Α$\Leftrightarrow$Β.

Όμοια, μπορούν να κατασκευαστούν παραδείγματα που να αξιοποιούν τους συνδέσμους «ή», «και».

§Ε.2

Οι μαθητές/-ήτριες αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονιστούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές/-ήτριες της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών/-ητριών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ρωτήσαμε 10 μαθητές ποιον ραδιοφωνικό σταθμό ακούνε και πήραμε τις εξής απαντήσεις:

Οι A_1, A_2, A_5, A_6, A_7 ακούνε τον POP FM και οι A_1, A_4, A_8, A_9, A_{10} τον ROCK N' ROLL.

α) Πώς μπορούμε να παρουσιάσουμε τις παραπάνω πληροφορίες σε ένα διάγραμμα Venn;

β) Ποιοι ακούνε

i. και τους δύο σταθμούς;

ii. τουλάχιστον έναν από τους δύο σταθμούς;

iii. τον POP FM αλλά όχι τον ROCK N' ROLL;

γ) Ποιοι δεν ακούνε κανέναν από τους δύο σταθμούς;

Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τις έννοιες και διαδικασίες που συναντώνται σε επόμενες ενότητες (π.χ. την επίλυση ανισώσεων και στις συναρτήσεις). Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες των συνόλων και των πράξεών τους στο πλαίσιο εννοιών και διαδικασιών των επόμενων κεφαλαίων.

Κεφάλαιο 2ο

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Με στόχους την εξομάλυνση της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και την συμπλήρωση ενδεχόμενων κενών προτείνεται να αφιερωθεί χρόνος για τη δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων που «μοντελοποιούν» ρεαλιστικές καταστάσεις και για την επανάληψη στοιχείων αλγεβρικού λογισμού (πράξεις πολυωνύμων, παραγοντοποίηση). Ωστόσο, σε μια επανάληψη με αυτούς τους στόχους δεν συμπεριλαμβάνεται η εξάσκηση σε πολύπλοκους χειρισμούς, και η ενασχόληση με ασκήσεις που η πολυπλοκότητα και δυσκολία τους υπερβαίνει εκείνες των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. Ειδικότερα:

§2.1

Οι μαθητές/-ήτριες συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους, ρητούς και άρρητους. Προτείνεται η ανάπτυξη δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν την αξία του υπολογισμού μιας αλγεβρικής παράστασης. Παράδειγμα τέτοιας αλγεβρικής παράστασης είναι ο νόμος του Ohm $I = \frac{V}{R}$ από τον Τομέα Ηλεκτρολογίας, η σχέση Καθαρή Πρόσοδος = Τόκοι + ενοίκιο εδάφους + κέρδος από τον Τομέα Γεωπονίας κ.λπ..

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta \neq 0$, $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$. Η συζήτηση και απόδοση νοήματος στην έννοια της ισοδυναμίας δύο σχέσεων και στη χρήση του αντίστοιχου συμβόλου χρειάζεται να επαναλαμβάνεται εκεί που αυτά εμφανίζονται, διότι, όπως πολλές έννοιες, δεν αναμένεται να κατακτιέται οριστικά από τους/τις μαθητές/-ήτριες με την πρώτη φορά.

§2.2

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην έννοια της ανισοτικής σχέσης, στην αιτιολόγηση απλών σχέσεων και στην απόδειξη σχέσεων από άλλες (πχ. ασκήσεις 1, 2, 3, 4 Α΄ Ομάδας). Επίσης, προτείνεται να συζητηθούν οι ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **και** $\beta = 0$, ενώ $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ **ή** $\beta \neq 0$ και στα σχόλια της παραγράφου. Προτείνεται η συζήτηση αυτή να γίνει με αριθμητικά παραδείγματα. Μπορούμε να ζητήσουμε από τους/τις μαθητές/-ήτριες να σκεφτούν δύο αριθμούς, να τους υψώσουν στο τετράγωνο και στη συνέχεια να τους προσθέσουν ώστε να πάρουν άθροισμα μηδέν. Μέσα από τη διαδικασία αυτή θα οδηγηθούν οι μαθητές/-ήτριες στην εικασία ότι $\alpha = \beta = 0$.

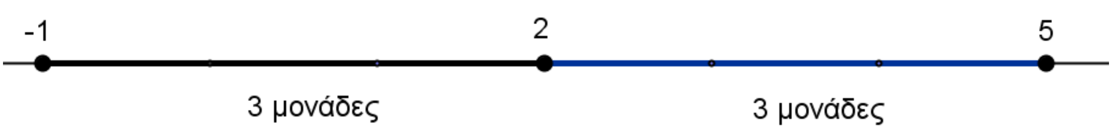
§2.3

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της.

Να αξιοποιηθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών για να συζητηθεί αναλυτικά η μέθοδος απόδειξης (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής). Επιπλέον, είναι σκόπιμο να συζητηθεί ως εναλλακτική απόδειξη η εξέταση περιπτώσεων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ να εξεταστούν οι περιπτώσεις i) $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, ii) $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, (ή $\alpha < 0$ και $\beta > 0$) και iii) $\alpha < 0$ και $\beta < 0$. Η εξέταση των περιπτώσεων μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν γιατί ισχύει αυτή η ιδιότητα.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους/τις μαθητές/-ήτριες και για αυτό απαιτείται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια δεν θα διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:
$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, και
$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$
επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές/-ήτριες σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση $|x - 2| < 3$ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ. $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$).



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$ και $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$. Η άσκηση 7 της Α' Ομάδας μπορεί να υποστηρίξει την παραπάνω προσέγγιση.

Στο ευρύτερο πλαίσιο των δραστηριοτήτων της επαγγελματικής εκπαίδευσης, θα μπορούσε να φανεί ενδιαφέρουσα και η άσκηση 6 της Α ομάδας καθώς συνδέεται με εργαστηριακές μετρήσεις που θα πραγματοποιήσουν κάποιοι/-ες μαθητές/-ήτριες στην επόμενη τάξη.

§2.4

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων, που υποστηρίζουν την κατανόηση των εννοιών και την εφαρμογή απλών διαδικασιών υπολογισμού και απλοποίησης, όπως οι 1 έως 4, και 9 της Α΄ ομάδας του βιβλίου και παρόμοιες.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις.

Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2\cdot\frac{1}{4}}\right]^2 = \left[[(-2)^2]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4}\cdot 2} = (-2)^1 = -2$

Κεφάλαιο 3ο

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^\nu = \alpha$. Ειδικότερα:

§3.1

Οι μαθητές/-ήτριες, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Εδώ προτείνεται να επαναδιαπραγματευτούν τις ιδιότητες της ισότητας στις οποίες στηρίζεται η επίλυση εξισώσεων και να συνδέσουν την επίλυση εξισώσεων με την επίλυση απλών προβλημάτων τα οποία θα αντιμετωπίσουν στους τομείς που θα επιλέξουν στην επόμενη τάξη, ώστε να έρθουν σε μια πρώτη επαφή με αυτά. Η μετάβαση από την επίλυση μιας απλής μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής $\alpha x + \beta = 0$ είναι δύσκολη, για δυο κυρίως λόγους: α) η διάκριση μεταξύ των εννοιών του αγνώστου και της παραμέτρου δεν είναι εύκολη και β) η διαδικασία της διερεύνησης γενικά είναι μια νέα διαδικασία για τις/τους μαθήτριες/-ητές.

Για τον λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται σχόλιο της §3.1. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του λ (π.χ. λ = 2, λ = 5, λ = 1, λ = – 1) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Ο τιμοκατάλογος των ΤΑΧΙ στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το ΤΑΧΙ περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με ΤΑΧΙ ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η $|x-5|=-3$, την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές/-ήτριες από την αρχή ως αδύνατη. Τέλος, όσον αφορά τις εξισώσεις που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες, προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών μόνο εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού (όπως οι ασκήσεις 6, 7 και 11 της Α' Ομάδας), με στόχο να αναδειχθεί η σύνδεση της παραγοντοποίησης με την επίλυση εξίσωσης.

§3.2

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^{\nu} = \alpha$ να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

§3.3

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση της ύπαρξης ριζών και του πλήθους τους από το πρόσημο της Διακρίνουσας, καθώς και στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τον τύπο λύσεων. Πολύ απλές εξισώσεις με παράμετρο μπορεί να συζητηθούν, με στόχο να αναδειχθεί ο ρόλος της παραμέτρου στο πρόσημο της Διακρίνουσας και άρα στο πλήθος των ριζών. Η αντικατάσταση αριθμών στη θέση της παραμέτρου μπορεί να υποστηρίξει την απόδοση νοήματος στην παράμετρο. Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού (όπως η ενδεικτική δραστηριότητα που ακολουθεί).

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

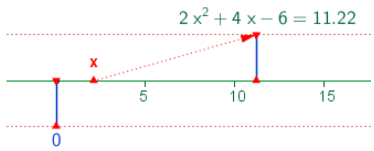
Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους/στις μαθητές/-ήτριες είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε ασκήσεις με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών/-τριών.

Τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να συνεισφέρουν στην εννοιολογική κατανόηση (προτείνεται ενδεικτικά η δραστηριότητα που ακολουθεί).

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132

- Να μη διδαχθούν παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού.

Κεφάλαιο 4ο

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού Ειδικότερα:

§4.1

Οι μαθητές/-ήτριες, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Στο πλαίσιο αυτής της τάξης, καταρχάς θα πρέπει να γίνει μια επαναδιαπραγμάτευση της έννοιας της ανίσωσης και της λύσης της, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα ανισώσεων και την εξέταση αν συγκεκριμένοι αριθμοί είναι λύσεις ή όχι. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους/τις μαθητές/-ήτριες και ανισώσεις όπως οι $|x-5|<-3$ και $|x-5|>-3$, των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1ου βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α΄ Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.
α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;
β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

§4.2

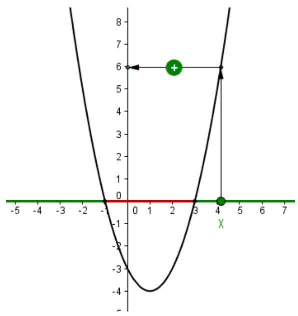
Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2ου βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α΄ Λυκείου. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές/-ήτριες να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta < 0$, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, παρά το ότι εμπλέκει τη γραφική παράσταση του τριωνύμου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο/η μαθητής/ήτρια να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής x, ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752

- Να μη διδαχθεί η εφαρμογή 2 και να συζητηθούν μόνο ασκήσεις από την Α' Ομάδα.

Κεφάλαιο 5ο

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

§5.1

Το εισαγωγικό παράδειγμα της παραγράφου φέρνει τους/τις μαθητές/-ήτριες σε επαφή με την έννοια της ακολουθίας μέσα από μία κατάσταση της καθημερινής ζωής. Επειδή μέσα από τέτοιες καταστάσεις οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν νόημα για τους/τις μαθητές/-ήτριες προτείνεται η διαπραγμάτευση του παραδείγματος στην τάξη.

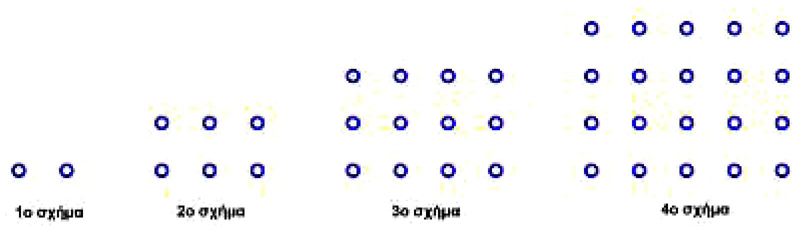
Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών/-ητριών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας α_ν, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό α_1 που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους/τις μαθητές/-ήτριες. Αυτή η διαδικασία μπορεί να υποστηριχτεί με την αξιοποίηση πινάκων τιμών όπως του εισαγωγικού παραδείγματος της §5.1.

Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τη διδασκαλία των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και όχι τη συστηματική και βαθύτερη μελέτη των ακολουθιών. Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την έννοια της ακολουθίας στο πλαίσιο της μελέτης των προόδων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

i) Ποιον κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα **;**

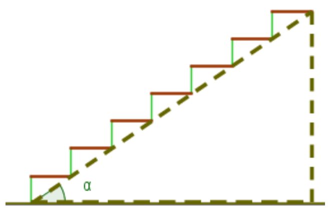


§5.2

Αρχικά οι μαθητές/-ήτριες χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η άσκηση 12 της Α Ομάδας). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το ν-οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν σε γενικά συμπεράσματα. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως οι ασκήσεις 12 της Α΄ Ομάδας και 9 και 12 της Β΄ Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155

- Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δεν θα διδαχθεί.

§5.3

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνεται η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα και η αξιοποίησή της ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές/-ήτριες κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του νιοστού όρου γεωμετρικής προόδου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

- Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δεν θα διδαχθεί.

Κεφάλαιο 6ο

Οι μαθητές/-ήτριες, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α΄ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ μελετούν την έννοια της συνάρτησης και τις αναπαραστάσεις της με πιο συστηματικό τρόπο. Σε πολλούς/ές μαθητές/-ήτριες δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. λεκτική διατύπωση, πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για τον λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές/-ήτριες, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών/-ητριών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Ειδικότερα:

§6.1 - §6.2

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων που προέρχονται από αντικείμενα των τομέων που οι μαθητές/-ήτριες θα επιλέξουν στην επόμενη τάξη, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση των εννοιών. Η ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος, η αξιοποίηση ενός γραφήματος για την άντληση πληροφοριών για ένα φαινόμενο και, αντιστρόφως, η δημιουργία μιας γραφικής παράστασης για την παρουσίαση ενός φαινομένου μπορούν να συμβάλλουν στην νοηματοδότηση εννοιών και διαδικασιών. Ομοίως, η γραφική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων (για παράδειγμα, όταν δίνονται μόνο τα γραφήματα) και η γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικών συμπερασμάτων (όπως, για παράδειγμα, η γεωμετρική ερμηνεία της ύπαρξης ή μη λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης) είναι σημαντικές ενδομαθηματικές συνδέσεις.

- Επισημαίνεται ότι δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155 (εξίσωση κύκλου).

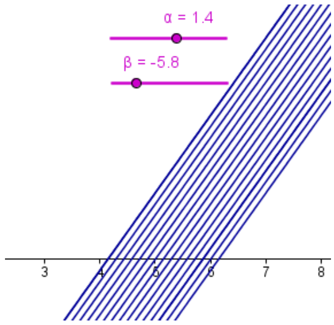
§6.3

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x + \beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y'y στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές/-ήτριες παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου α. Η κλίση ευθείας ως λόγος μεταβολής βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να συνδέσουν τον συντελεστή διεύθυνσης με τη συγκεκριμένη γωνία ω (όπως στο τρίγωνο ΑΚΒ του σχήματος που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου). Προτείνεται, τα παραπάνω να συνδέονται κάθε φορά με συγκεκριμένα παραδείγματα.
Για παράδειγμα, με δεδομένο ότι σε κάποιο ταξί το κόστος του χλμ είναι 0,6€ και η σημαία είναι 2,4€, οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν γεωμετρικά τον ρόλο του 0,6 στην ευθεία y = 0,6x + 2,4 ως τη μεταβολή του y όταν αυξηθεί κατά 1 το x.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην $y = \alpha x + \beta$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για α σταθερό και β μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ εστιάζει στη σύνδεση του εμπειρικού με τον θεωρητικό τρόπο σκέψης και θέτει στο επίκεντρο τον μαθηματικό συλλογισμό, την αιτιολόγηση και τη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές/-ήτριες έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών/-ητριών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης, κάτι που μπορεί να γίνει βαθμιαία και λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες του εγχειρήματος. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους/τις μαθητές/-ήτριες, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Για τον λόγο αυτό προτείνεται η διαμόρφωση ορισμών μέσα από συζήτηση στην τάξη: μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες μια πρώτη προσπάθεια ορισμού, να ακολουθήσει κριτική εξέταση (από τους/τις μαθητές/-ήτριες) που οδηγεί σε μια βελτιωμένη εκδοχή, η οποία πάλι εξετάζεται κ.οκ. Επίσης οι μαθητές/-ήτριες χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον/την εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μυηθούν οι μαθητές/-ήτριες στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές/-ήτριες σε αποδεικτικές διαδικασίες, να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους/τις μαθητές/-ήτριες αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συναντούν οι μαθητές/-ήτριες στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους/στις μαθητές/-ήτριες. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών δυναμικής Γεωμετρίας. Επιπλέον, η ανάπτυξη στοιχείων της αφηρημένης, θεωρητικής σκέψης είναι απαραίτητο να συνδέεται με την εφαρμογή των συμπερασμάτων (θεωρημάτων, πορισμάτων) σε πιο πρακτικές καταστάσεις και προβλήματα. Αυτό μπορεί να γίνεται τόσο με εισαγωγή υπολογισμών και μετρήσεων (π.χ. υπολογισμός γωνιών τριγώνου, ερωτήσεις κατανόησης των παραγράφων 4.6, 4.7 και 4.8, αξιοποίηση του μήκους πλευρών για τη σύγκριση τριγώνων), όσο και με διερεύνηση και επίλυση προβλήματος (πχ. άσκηση εμπέδωσης 10 των παραγράφων 3.10, 3.11 και 3.12).

Σχετικά με τα προηγούμενα, προτείνεται η τροποποίηση από τους/τις εκπαιδευτικούς ασκήσεων του βιβλίου ώστε αφενός να απλοποιηθεί η γλώσσα και αφετέρου να συνδεθούν καλύτερα με τη διαίσθηση των μαθητών/-ητριών.

Για παράδειγμα, η άσκηση:

" Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του"

μπορεί να γίνει:

"Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα Α και Β. Ας ονομάσουμε Μ το μέσο του ΑΒ. Φέρτε μια τυχαία ευθεία ε από το Μ. Μετρήστε τις αποστάσεις των Α και Β από την ε. Τι παρατηρείτε; Νομίζετε ότι αυτό θα συμβαίνει για οποιαδήποτε ευθεία περνάει από το Μ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας".

Επίσης, η άσκηση:

"Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι: i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές, ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$."

μπορεί να γίνει:

Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$. Φέρτε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ και ονομάστε Ι το σημείο που τέμνονται.
i) εξηγήστε γιατί το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,
ii) συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ και εξηγήστε γιατί η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$."

Κεφάλαιο 2ο

Εισαγωγή

Στόχος της εισαγωγής είναι η διάκριση και η επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές/-ήτριες διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι, μεταξύ άλλων, η αδυναμία ακριβούς μέτρησης και η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων.

§2.16

Σε συνέχεια της συζήτησης που περιγράφεται παραπάνω (στην Εισαγωγή), προτείνεται η διαπραγμάτευση στην τάξη των θεωρημάτων της παραγράφου 2.16 αφενός ως εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία, που περιλαμβάνει τη διερεύνηση, την εικασία και την αναζήτηση λογικών συλλογισμών που υποστηρίζουν ή απορρίπτουν την εικασία και αφετέρου ως συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 3ο

§3.1, §3.2

§3.3, §3.4

§3.5, §3.6

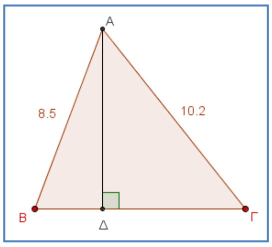
Οι μαθητές/-ήτριες έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων 3.1 έως 3.6 στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια στοιχεία όπως:
α) Η σημασία της ισότητας των ομόλογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.
β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία ή περισσότερα κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία -τρίγωνα- δεν είναι ίσα. Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές 10, 12 και 14,4 εκατοστά και το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση 120%, το νέο τρίγωνο θα έχει 5 από τα 6 κύρια στοιχεία του ίσα με το αρχικό (τρεις γωνίες και δύο πλευρές), αλλά προφανώς τα τρίγωνα δεν είναι ίσα.
γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.
δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών/-τριών από τους/τις ίδιους/ες.
ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο στο τέλος της §3.2).
στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων για σύγκριση σε σύνθετα σχήματα (όπως, για παράδειγμα, στις αποδεικτικές ασκήσεις 2 της σελ. 48 και 4 της σελ. 54).

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων και των πορισμάτων των παραγράφων 3.2, 3.4, 3.6 δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη. Ωστόσο, οι αποδείξεις των πορισμάτων αυτών των παραγράφων προτείνεται να συζητηθούν στην τάξη ως ασκήσεις εφαρμογής των κριτηρίων ισότητας τριγώνων αντί πιο σύνθετων ασκήσεων, και ως μέσο μιας ολιστικής θεώρησης των ιδιοτήτων των τριγώνων. Συγκεκριμένα προτείνεται:

- Να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα I της §3.2, πόρισμα I της §3.4, πόρισμα I της §3.6).
- Μαζί με την πρόταση αυτή να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της §3.12 για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- Σαν μια ενιαία πρόταση, να ζητηθεί από τους μαθητές/-ήτριες να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1i Εμπέδωσης της § 3.4, άσκηση 4 Εμπέδωσης της § 3.6). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα IV της §3.2 και III, IV της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με το μικροπείραμα «Ύψος, Διάμεσος και διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές οδηγούνται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της σχέσης που συνδέει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλα μαθαίνουν για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2277



§3.7

Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τόπων προτείνεται τα πορίσματα III της §3.2 και II της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα IV της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές/-ήτριες πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν.

§3.10 - §3.12

Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους/τις μαθητές/-ήτριες. Να επισημανθεί ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου. Στόχος είναι οι μαθητές/-ήτριες να διαπιστώσουν την αναγκαιότητά της για την κατασκευή ενός τριγώνου όπως για παράδειγμα στην Ερώτηση Κατανόησης 3, αλλά και τη λειτουργικότητά της όπως για παράδειγμα στην αποδεικτική άσκηση 4 που διαπραγματεύεται την απόσταση σημείου από κύκλο.

§3.14 - §3.16

Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους/στις μαθητές/-ήτριες από το Γυμνάσιο. Οι αιτιολογήσεις, όμως, προέρχονται από τα θεωρήματα της §3.13. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους/στις μαθητές/-ήτριες και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν.

§3.17 - §3.18

Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους/τις μαθητές/-ήτριες με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε γνωστικές περιοχές εκτός των μαθηματικών. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18. Επίσης, προτείνεται να αξιοποιούνται και άλλα γεωμετρικά όργανα (και όχι μόνο κανόνας και διαβήτης), καθώς και ψηφιακά εργαλεία.

Κεφάλαιο 4ο

§4.1, §4.2, §4.4, §4.5

Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του κεφαλαίου. Προτείνεται να διερευνήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη σχέση του θεωρήματος και της Πρότασης Ι της §4.2 με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.

§4.6, §4.8

Προτείνεται οι μαθητές/-ήτριες, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.α., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση. Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί, επίσης, η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

Ιστορικό Σημείωμα

Στο ιστορικό σημείωμα αναδεικνύεται η σημασία του 5ου αιτήματος στην δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάζεται η συζήτηση και οι αναζητήσεις που προκάλεσε η διατύπωσή του, μέχρι τον 19ο αιώνα, και που τελικά οδήγησαν στη δημιουργία των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Προτείνεται, η θεματολογία του ιστορικού σημειώματος, να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν σχετικές εργασίες από τους/τις μαθητές/-ήτριες.

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ

Κεφάλαιο 1ο

§1.1.

Από το Γυμνάσιο είναι γνωστή η έννοια των γραμμικών συστημάτων 2x2, η γραφική επίλυσή τους και η αλγεβρική επίλυση με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Εδώ προτείνεται να γίνει μια επανάληψη εστιάζοντας στην επίλυση προβλημάτων. Είναι σημαντικό να αξιοποιούνται στη διδασκαλία παραδείγματα από την καθημερινότητα.

Κεφάλαιο 2ο

§2.1 και 2.2

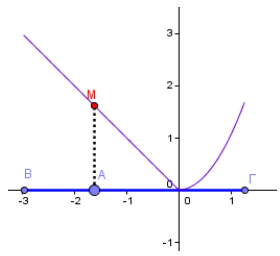
Αρχικά, οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση μελετούν της συνάρτησης $g(x)=\alpha x^2$ και χρησιμοποιούν τις μετατοπίσεις για να μελετήσουν την $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Σε αυτή τη μελέτη εξετάζουν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες αυτών των συναρτήσεων. Διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών της μονοτονίας, των ακροτάτων και της άρτιας – περιττής και στη σύνδεση της γεωμετρικής ερμηνείας με την αλγεβρική έκφραση. Να αποφευχθεί ο αλγεβρικός τρόπος μελέτης της μονοτονίας και των ακροτάτων.

Ενδεικτικά, ασκήσεις που προτείνονται ότι υπηρετούν τα παραπάνω είναι:

- Από την §2.1 οι 1, 2, 6, 7, 8.
- Από την §2.2 οι 1, 2, 5.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα « Συμμεταβολή σημείων - Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή σημείων και διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμεταβολής των δύο σημείων, της μονοτονίας και των ακροτάτων.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5226

Κεφάλαιο 3ο

§3.1

Οι μαθητές/-ήτριες στο Γυμνάσιο έχουν συναντήσει και ασχοληθεί με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόησή του, που θα επιτρέψει τη συνεχή χρήση του (π.χ. για τη διαπίστωση σχέσεων μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών). Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο, καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία, με $0° \le \omega < 360°$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

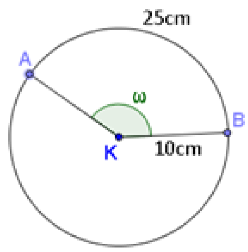
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0° \leq \varphi < 360°$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.

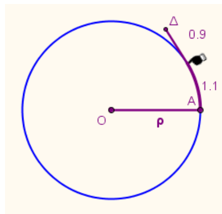
α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.



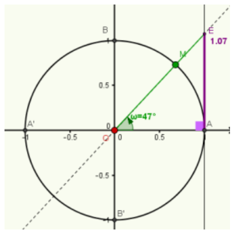
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 3:</u>

Το μικροπείραμα «Τι είναι το ακτίνιο;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την κατανόηση της έννοιας του ακτινίου και τη σύνδεση μεταξύ της μέτρησης γωνιών σε μοίρες και ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5272



<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 4:</u>

Με το μικροπείραμα «Ο τριγωνομετρικός κύκλος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές εισάγονται στον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου και των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5140



§3.4

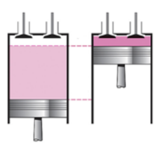
Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχτούν οι μαθήτριες/-ητές στη Β΄ Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις σε συνδυασμό με προβλήματα. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.

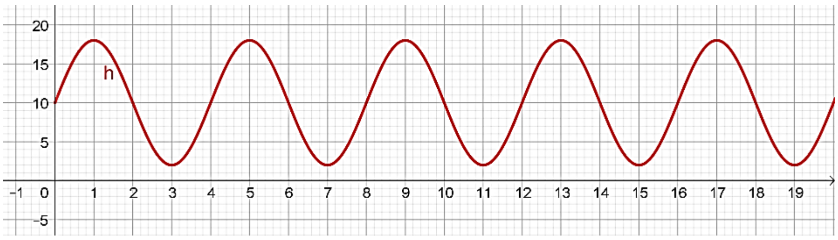
Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Αφού συζητηθούν τα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου, να τονισθούν τα συμπεράσματα που περιέχονται στο Σχόλιο της σελίδας 81.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1, 3, 4, 5, 6 και 7 της Α΄ Ομάδας και 1, 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Σε έναν κινητήρα εσωτερικής καύσης η απόσταση h (σε cm) του πιστονιού από το άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται από τη συνάρτηση $h(t) = 10 + 8\eta\mu(\frac{\pi}{2}t)$, όπου t ο χρόνος σε δέκατα του δευτερολέπτου. Η γραφική παράστασή της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





Απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας με δύο τρόπους: με τη γραφική παράσταση και με τον τύπο της συνάρτησης h.

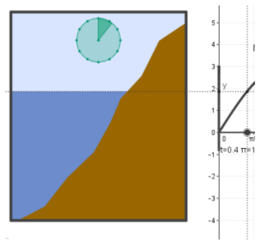
α) Πόσες πλήρεις "στροφές" κάνει ο κινητήρας σε 1 sec;

β) Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής που κάνει το πιστόνι;

γ) Σε ποια θέση βρίσκεται το πιστόνι τις χρονικές στιγμές 2, 4 και 6;

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

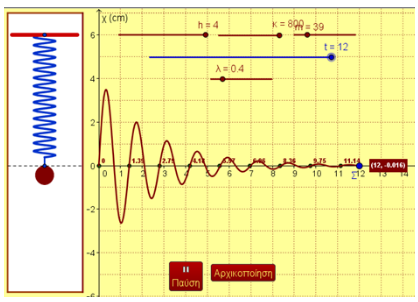
Με το μικροπείραμα «Περιοδικά φαινόμενα: Η παλίρροια» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία (άσκηση 2, Β΄ ομάδας), οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης μελετούν το φαινόμενο της παλίρροιας και αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 3:</u>

Με το μικροπείραμα «Περιοδικές συναρτήσεις - Το ελατήριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των περιοδικών συναρτήσεων. Επίσης, πειραματίζονται με ένα ελατήριο και αναζητούν απαντήσεις με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5208

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ

Στην αρχή της σχολικής χρονιάς είναι σκόπιμο να γίνει, για μία (1) διδακτική ώρα, μια αναφορά σε στοιχεία από τη Γεωμετρία προηγούμενων τάξεων που θα χρησιμοποιηθούν στη Β' τάξη, όπως είναι η ισότητα τριγώνων, το άθροισμα γωνιών πολυγώνων, εφόσον αυτά θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές (στις ιδιότητες παραλληλογράμμων, στην ομοιότητα τριγώνων και στο Πυθαγόρειο θεώρημα). Θα πρέπει να δοθεί έμφαση σε αποδείξεις που οι μαθήτριες/ητές μπορούν να «ανακαλύψουν» μέσα στην τάξη (π.χ. οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων).

Κεφάλαιο 5ο

- **Στο κεφάλαιο 5 δεν θα συζητηθούν τα σύνθετα θέματα και οι γενικές ασκήσεις.**

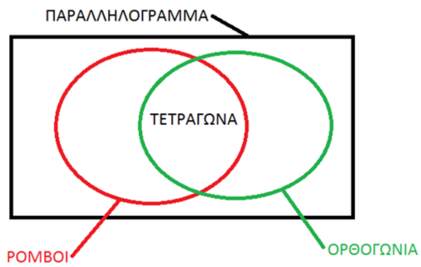
§5.1, §5.2

Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

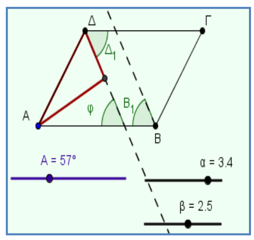
§5.3 - §5.5

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1) για την άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος.

<ins>Ενδεικτική δραστηριότητα 1</ins>:
Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινομίας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).



<ins>Ενδεικτική δραστηριότητα 2</ins>:
Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή.

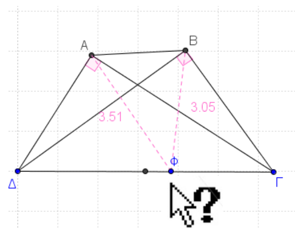


http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825

§5.6 – §5.9

Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση στην τάξη της Εφαρμογής 1 της §5.6. Στις §5.7 και §5.8 η συζήτηση προτείνεται να επικεντρωθεί στο γεγονός ότι, για τα διάφορα είδη τριγώνων, όλες οι διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο (και αντιστοίχως για τα ύψη) και να μη συζητηθούν ασκήσεις.

Ενδεικτική δραστηριότητα:
Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με την διάμεσο που αντιστοιχεί σ' αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή».
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781



§5.10, §5.11

Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο, όπως η δραστηριότητα 1 και η εργασία στο τέλος του κεφαλαίου.

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

Κεφάλαιο 4ο

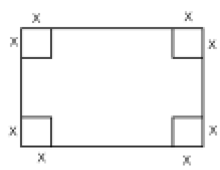
Όλη η διδασκαλία των πολυωνύμων θα πρέπει να εμπλουτιστεί με τη συναρτησιακή προσέγγιση των πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση α) θα παρέχει στις μαθήτριες και στους μαθητές τη δυνατότητα πρόσβασης σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις (όπως είναι η γραφική παράσταση συνάρτησης) που μπορούν να βοηθήσουν στην απόδοση νοήματος και την κατανόηση και β) θα μειώσει τον ρόλο αφηρημένων αλγεβρικών προσεγγίσεων των πολυωνύμων που δεν συνδέονται με την κατανόηση ούτε με την περαιτέρω διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

§4.1

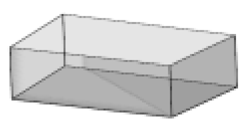
Προτείνεται να παρουσιαστούν (είτε με λογισμικό, είτε εκτυπωμένες) οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων όπως οι $f(x)=x^3$, $f(x)=-x^3$, $f(x)=x^3-3x$, $f(x)=x^4-2x^2$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$. Στόχος είναι η παρατήρηση και ο σχολιασμός των ιδιοτήτων τους, των σημείων τομής με τους άξονες, των τμημάτων που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x, κοκ.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:
Από ένα χαρτόνι διαστάσεων 20×30 εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς *x* (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.



α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το *x*;
β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το *x*, μειώνεται ο όγκος. Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.
γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το *x* ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Κατά την εκτόξευση ενός πυραύλου, οι προωθητικές μηχανές του λειτουργούν για λίγα δευτερόλεπτα και μετά σβήνουν. Ο πύραυλος συνεχίζει την κίνησή του προς τα πάνω για λίγο και μετά αρχίζει ελεύθερη πτώση. Κάποια στιγμή ένας μηχανισμός ελευθερώνει ένα αλεξίπτωτο, το οποίο επιβραδύνει την πτώση του πυραύλου ώστε να μην συντριβεί.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας του πυραύλου ως συνάρτησης του χρόνου.

α) Πόσο χρόνο διάρκεσε η άνοδος του πυραύλου;

β) Ποια ήταν η ταχύτητά του τις χρονικές στιγμές 2s, 5s, 8s, 11s, 14s;

γ) Τι συμβαίνει τις χρονικές στιγμές 2s, 8s, 11s, 15s;

§4.2

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση των θεωρημάτων της υποπαραγράφου "Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ" και πιο συγκεκριμένα, στη μεταξύ τους σχέση και στη συνέπεια που έχουν για τη παραγοντοποίηση πολυωνύμου. Για το σχήμα Horner καλό είναι να εξηγηθεί η σχέση του με τους συντελεστές που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της διαίρεσης (όπως στο εισαγωγικό παράδειγμα του σχολικού βιβλίου ή με άλλο αριθμητικό παράδειγμα)

Προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι ασκήσεις 1 έως 6 της Α΄ Ομάδας και να μη γίνουν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

§4.3

Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2. Αν και οι ακέραιες ρίζες ενός τυχαίου πολυωνύμου δεν εμφανίζονται συχνά, παρόλα αυτά το θεώρημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ωστόσο, για τη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης, έμφαση πρέπει να δοθεί στην προτεραιότητα της παραγοντοποίησης του αντίστοιχου πολυωνύμου.

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο αριθμητικό εργαλείο που μπορεί να συνδεθεί με τον τρόπο που θα μπορούσε να προσδιορίσει κανείς μη ακέραια ρίζα αν είχε στη διάθεσή του κάποια υπολογιστική μηχανή. Κυρίως όμως, αυτή η μέθοδος, επειδή στηρίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano, υποστηρίζει την συναρτησιακή προσέγγιση και την οπτικοποίηση των σχετιζόμενων εννοιών.

Στο πλαίσιο της επίλυσης ανισώσεων, προτείνεται να συζητηθούν και πάλι οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού και να συνδεθούν (όπως και όλες οι πολυωνυμικές ανισώσεις) με τη γεωμετρική ερμηνεία τους.

Προτείνεται να συζητηθούν μόνο επιλεγμένες ασκήσεις από τις 1 έως 8 και 10 της Α΄ Ομάδας, καθώς και επιλεγμένα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων, όπως είναι τα προβλήματα 6 και 9.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή *x* μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $\mathrm{K}(x) = -2x^2 + 120x + 100$ χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των *x* μονάδων της αποφέρει έσοδα $E(x) = x^3 - x^2 + 20x$ χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράγει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Κεφάλαιο 5ο

§5.1

Η έννοια της εκθετικής μεταβολής που συνδέεται με σημαντικά φαινόμενα της πραγματικότητας, μπορεί να αποτελέσει την εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση. Αν και συχνά στα πραγματικά φαινόμενα που μελετάμε, οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι διακριτές (συχνά είναι φυσικοί αριθμοί), τέτοια φαινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετάβαση στην εκθετική συνάρτηση, δηλαδή σε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς. Η έμφαση στη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης πρέπει να είναι στα προβλήματα και στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Να μη διδαχθούν οι εξισώσεις, οι ανισώσεις και τα συστήματα της παραγράφου.

Προτείνεται η άσκηση 1 της Α ομάδας και επιπλέον να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, με προτεραιότητα στις 6, 7 και 8.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται διχοτόμηση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο "θυγατρικά κύτταρα". Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (salmonella), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 ° C διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι 35 ° C.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν α) 1200 βακτήρια , β) 4.550 βακτήρια και γ) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές για α) για το χρόνο και β) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 2:</u>

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) το πεδίο ορισμού, β) το σύνολο τιμών, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες, δ) τη μονοτονία, ε) τις ασύμπτωτες και στ) τη συμμετρία.

- $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3 \cdot 2^x$, $f_3(x) = -3 \cdot 2^x$, $f_4(x) = 4 \cdot 2^x$.
- $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$.
- $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x + 3$, $f_3(x) = 2^{x-3}$, $f_4(x) = 2^{x-3} + 3$
- $f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

§5.2

Μια προσπάθεια απομνημόνευσης τύπων και τεχνασμάτων χωρίς νόημα δεν είναι μαθησιακά αποδοτική και δεν ενθαρρύνεται. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα παραδείγματα 1 και 2 που περιγράφουν την κλίμακα Richter για τη μέτρηση των σεισμών και το pH για την οξύτητα ενός διαλύματος.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα και να μη γίνουν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα:</u>

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης Ι, η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα L του ήχου. Για την ακουστότητα L χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση I το watt/m^2.

Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα L σχετίζεται με την ένταση Ι με λογαριθμικό τρόπο, σύμφωνα με τον τύπο $L = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}$, όπου I_0 η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί να ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με 10^{-12} watt/m². Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α) 10^{-6}watt/m² και β) δεκαπλάσιας από το I_0.

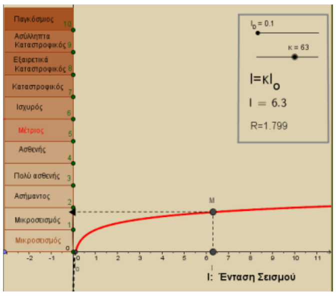
§5.3

Κατ' αντιστοιχία με την εκθετική συνάρτηση, έμφαση θα πρέπει να δοθεί σε προβλήματα και στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Θα διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις f(x) = logx και f(x) = lnx. Ωστόσο, για λόγους κατανόησης της σχέσης με την αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσαν να αναφερθούν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση α, με 0 < α < 1, σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διδακτέα ύλη περιορίζεται στις f(x) = logx και f(x) = lnx. Προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι ασκήσεις: 2, 4, 7 και 8 της Α΄ Ομάδας.

Να μη διδαχθούν οι εξισώσεις, οι ανισώσεις και τα συστήματα της παραγράφου.
Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα « Λογαριθμική μεταβολή – Κλίμακα Richter» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της λογαριθμικής μεταβολής. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μεγέθους ενός σεισμού σε κλίμακα Richter ως προς την έντασή του, δημιουργούν εικασίες σχετικά με τη σχέση που έχουν αυτά τα δύο μεγέθη και τις αποδεικνύουν αλγεβρικά. Στη συνέχεια, συγκρίνουν τις εντάσεις σεισμών που έχουν συμβεί στο παρελθόν και λύνουν τα προβλήματα γραφικά και αλγεβρικά.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5240



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

Κεφάλαιο 7ο

Προτείνεται να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών και να δοθεί έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή. Μέσω παραδειγμάτων επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μηκών είναι δυνατόν να έχουν τον ίδιο λόγο. Μεταξύ των στόχων διδασκαλίας είναι οι μαθητές/-ήτριες να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή, σε δοσμένα σχήματα, ή σε σχήματα που χρειάζεται να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες, καθώς και να αναδειχθούν οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε τρίγωνα και τραπέζια.

- Στο Κεφάλαιο 7 δεν θα συζητηθούν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις.

Κεφάλαιο 8ο

Να δοθεί έμφαση στα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων. Στόχοι είναι οι μαθητές/-ήτριες:

- ✓ Να κατανοήσουν τη λειτουργία κριτηρίων ομοιότητας, που όπως και τα κριτήρια ισότητας, με λιγότερες προϋποθέσεις από τον ορισμό μπορούμε να αποφανθούμε για την ομοιότητα δύο τριγώνων.

- ✓ Να συσχετίσουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και να εντοπίσουν διαφορές.
- ✓ Να αξιοποιήσουν την ομοιότητα στην επίλυση προβλημάτων όπως η εφαρμογή 2 της παραγράφου 8.2.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 2, ΑΓ = 4 και τη γωνία $\hat{A} = 60^{\circ}$. Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και $\frac{1}{2}$.

- ➢ Στο Κεφάλαιο 8 δεν θα συζητηθούν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα και οι γενικές ασκήσεις.

Κεφάλαιο 9ο

Στο κεφάλαιο αυτό η έμφαση σε ασκήσεις αλγεβρικού χαρακτήρα δεν συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.
Στο Κεφάλαιο 9 δεν θα συζητηθούν σύνθετα θέματα και γενικές ασκήσεις.

§9.1-9.3

Στόχοι της διδασκαλίας είναι οι μαθητές/-ήτριες:

- ✓ Να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές και να αναγνωρίζουν ευθύγραμμα τμήματα ως προβολές άλλων ευθυγράμμων τμημάτων.
- ✓ Να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές της § 9.2 ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση προβλημάτων.

Στην παράγραφο 9.3 είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών.

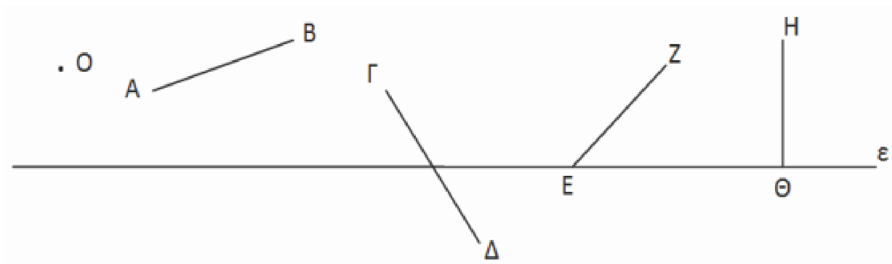
<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>:

Να κατασκευάσετε ορθές προβολές

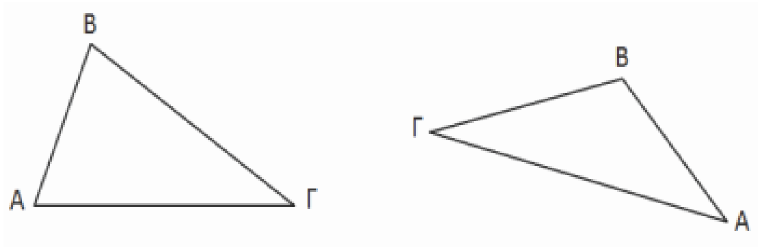
α) του Ο, των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ στην ευθεία ε και

β) της ΑΒ πάνω στην ΒΓ

στα δύο παρακάτω σχήματα.



(α)



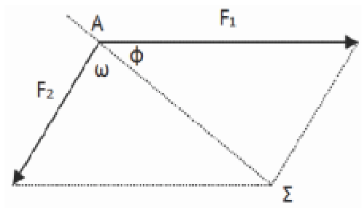
(β)

§9.4

Στόχοι είναι οι μαθητές/-ήτριες να χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο και το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για να διακρίνουν αν ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο και να χρησιμοποιούν αυτά τα θεωρήματα και τον νόμο των συνημιτόνων σε επίλυση προβλημάτων.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα</u>:

Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου F_2 που σχηματίζει γωνία ω με την επιθυμητή πορεία πλεύσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά φ μοίρες. Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου F_1 μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία φ;



ΑΛΓΕΒΡΑ Δ΄ ΤΑΞΗΣ

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται ο προτεινόμενος ελάχιστος αριθμός ωρών διδασκαλίας ανά παράγραφο του σχολικού βιβλίου.

Παράγραφος	Προτεινόμενος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Προτεινόμενος αριθμός ωρών
1.1	4	**2.1**	2
1.2	3	**2.2**	10
1.3	8	**2.3**	13
1.4	10		
Σύνολο	25	**Σύνολο**	20

Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα:

α) την σύνδεση της ανάλυσης και της στατιστικής με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα, β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά.

Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο http://ebooks.edu.gr). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους/στις μαθητές/-ήτριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Στις ειδικές οδηγίες κατά κεφάλαιο που ακολουθούν, περιγράφονται οι στόχοι και παρέχονται μερικά επιπλέον στοιχεία που μπορούν να υποστηρίξουν τον/την εκπαιδευτικό στη διδασκαλία.

Κεφάλαιο 1ο: Διαφορικός Λογισμός (Προτείνεται να διατεθούν 25 ώρες)
Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

§1.1 Συναρτήσεις (προτεινόμενες ώρες 4)
Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να μπορούν να βρίσκουν το όριο μίας συνάρτησης στο x_0, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση,
- να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά του να υπολογίζουν το όριο πολλών συναρτήσεων.

Διευκρινίζεται ότι στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πρέπει να γίνει μία επανάληψη στην έννοια της συνάρτησης, με επιδίωξη οι μαθητές/-ήτριες να μπορούν:

- να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης,
- να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων (αx, αx + β, $αx^2$, α/x, ημx, συνx),
- από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρίσκουν την τιμή της σ' ένα σημείο x_0, τη μονοτονία της κατά διαστήματα και τα ακρότατα,
- να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο απλών συναρτήσεων.

Στην αρχή της §**1.1** γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους/στις μαθητές/-ήτριες από προηγούμενες τάξεις (Άλγεβρα Α΄, Β΄ και Γ΄ ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ-Λ) γι' αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίαση τους, αλλά στο να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν όταν θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Στην ίδια παράγραφο **παρουσιάζεται μέσω διαισθητικών παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου** και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι **η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου**. Δεν χρειάζεται επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές/-ήτριες να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους. Προτείνεται επίσης, η εννοιολογική κατανόηση της συνέχειας, να υλοποιηθεί με τη χρήση γραφημάτων και μόνο.

§1.2 Η έννοια της παραγώγου (προτεινόμενες ώρες 3)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής,
- να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Στην §**1.2** εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών. Ο ορισμός της παραγώγου εισάγεται μέσω των προβλημάτων εφαπτομένης καμπύλης σε ένα σημείο Α και της στιγμιαίας ταχύτητας. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο, R) σε ένα σημείο του Α συμπίπτει με την οριακή θέση μιας τέμνουσας ΑΜ, καθώς το Μ κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το Α. Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό λ = $\ell\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Δεν δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$. Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κ.τλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\ell\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, ονομάζεται παράγωγος της f στο t_0. Έτσι το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας προετοιμάζουν το έδαφος, ώστε να προκύψει φυσιολογικά ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

§1.3 Παράγωγος συνάρτησης (προτεινόμενες ώρες 8)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου συνάρτησης,
- να κατανοήσουν την έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης διαμέσου της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου αντίστοιχα, της τετμημένης x(t) ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα,
- να μπορούν να παραγωγίσουν βασικές συναρτήσεις,
- να αξιοποιούν τους κανόνες παραγώγισης ανάλογα με τις μορφές των συναρτήσεων που εμφανίζονται,
- να μπορούν να παραγωγίζουν σύνθετες συναρτήσεις.

Στην §**1.3** ορίζεται **η** (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης** f. Με τον όρο **παράγωγος της** f εννοείται η συνάρτηση f΄, η οποία σε κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f, όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγο της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της f και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα **υ(t) = x΄(t)** και η επιτάχυνση **α(t) = x΄΄(t)** στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου. **Επειδή οι μαθητές/ήτριες δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της σύνθετης συνάρτησης, θα πρέπει ο/η διδάσκων/-ουσα να αφιερώσει τον αναγκαίο χρόνο για την κατανόηση της έννοιας αυτής πριν τη διδασκαλία της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.** Προτείνεται η διδασκαλία της σύνθετης συνάρτησης να γίνει μέσω απλών παραδειγμάτων που εξυπηρετούν τις ανάγκες της τεχνικής εκπαίδευσης και να αποφευχθεί ο αυστηρός ορισμός της. Προτείνεται επίσης, να τροποιηθούν κατάλληλα κάποια προβλήματα επόμενων παραγράφων ώστε να αξιοποιηθούν ως προβλήματα ρυθμού μεταβολής. Για παράδειγμα, η άσκηση 2 από τις γενικές, θα μπορούσε να αξιοποιηθεί με το ερώτημα «ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους για την παραγωγή 15 μονάδων προϊόντος». Τέλος, να πραγματοποιηθούν μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη.

§1.4 Εφαρμογές των παραγώγων (προτεινόμενες ώρες 10)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να μπορούν:

- να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση είναι σταθερή, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα,
- να βρίσκουν τα τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν) μίας συνάρτησης,
- να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Στην §**1.4** υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η αξιοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακρότατων μιας συνάρτησης και την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του πρόσημου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο/η διδάσκων/-σκουσα να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι πριν το σώμα φτάσει στο ψηλότερο σημείο, η ταχύτητα είναι θετική (υ(t) = h΄(t) > 0) και μετά είναι αρνητική (υ(t) = h΄(t) < 0). Ενώ, όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή t (σε sec) που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $h(t) = 20t – 5t^2$, είναι όταν υ(t) = h΄(t) = 20 – 10t = 0 m/sec. Άρα για t = 2 sec έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με h(2) = 40 – 20 = 20 m.

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν, παράλληλα με την επίλυση κατάλληλου προβλήματος, οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές/-ήτριες σε προηγούμενες τάξεις.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημα του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε επιλύουμε το μαθηματικό μοντέλο, και στη συνέχεια το πραγματικό πρόβλημα.

Συμπερασματικά, με τη διδασκαλία του 1ου κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.
- Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Κεφάλαιο 2ο: Στατιστική (Προτείνεται να διατεθούν 20 ώρες)

Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα, ο αριθμός των οποίων στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι μεγάλος, κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται η επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο. Επιπλέον, προτείνεται η χρήση υπολογιστή τσέπης ή/και λογιστικού φύλλου.

§2.1 Βασικές έννοιες (προτεινόμενες ώρες 2)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να γνωρίζουν τις διαδοχικές φάσεις μίας στατιστικής έρευνας,
- να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.

Στην §**2.1** πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός, μεταβλητή** (*ποσοτική, ποιοτική*), **απογραφή** και **δείγμα**. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής "ομάδα αίματος" είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι Α, Α, Β, Β, Β, ΑΒ, Α, ΑΒ, Ο, Β.

Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές/-ήτριες τη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Ολοκληρώνοντας την πρώτη αυτή παράγραφο, αναμένεται, μέσα από παραδείγματα, οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν τη διάκριση μεταξύ ποιοτικής και ποσοτικής μεταβλητής και να κρίνουν αν ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό.

§2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων (προτεινόμενες ώρες 10)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

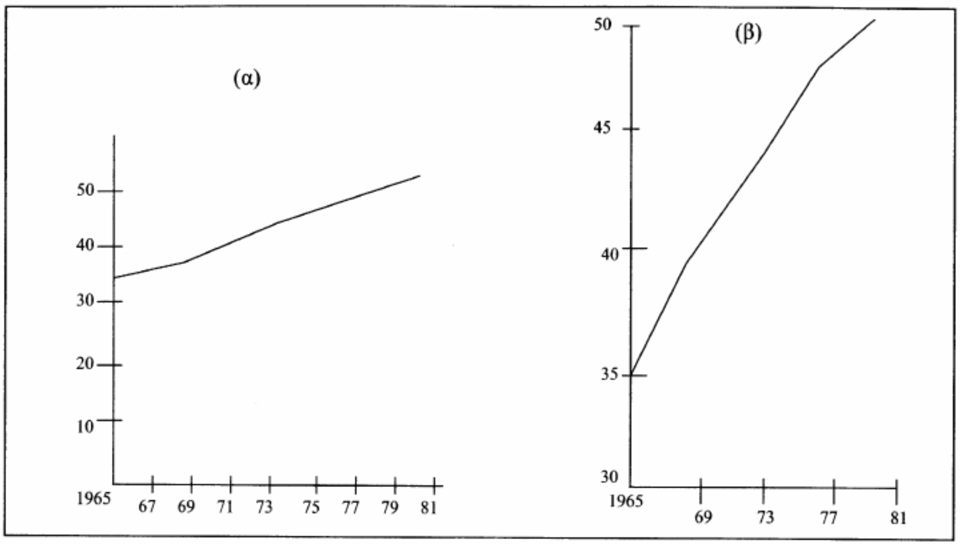
- να μπορούν να διαβάσουν/ερμηνεύσουν και να κατασκευάσουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων,
- να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα,
- να καταλαβαίνουν την αναγκαιότητα ομαδοποίησης παρατηρήσεων και να την υλοποιούν.

Στην §**2.2** παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατασκευή πινάκων κατανομής συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα χρησιμοποιούνται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Οι μαθητές/-ήτριες αναμένεται να κατανοήσουν:

- τις έννοιες των απολύτων και σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων,
- ότι η **σχετική συχνότητα** f_i, προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή.
- ότι η **αθροιστική συχνότητα** N_i και η **αθροιστική σχετική συχνότητα** F_i, έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

Οι μαθητές/-ήτριες αναμένεται να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Συγχρόνως, πρέπει μέσα από κατάλληλα παραδείγματα να καλλιεργήσουμε στους/στις μαθητές/-ήτριες την κριτική ανάγνωση γραφημάτων και παρουσιάσεων, εφόσον συχνά υπάρχει κίνδυνος παραπλάνησης από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y, σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Το κριτικό διάβασμα των διαγραμμάτων σχετίζεται με την ικανότητα του σύγχρονου πολίτη να αντλεί συμπεράσματα και να λαμβάνει αποφάσεις.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Ωστόσο, για την διευκόλυνση των μαθητών/-ητριών, μπορούν να δοθούν έργα στα οποία να καθορίζεται από την εκφώνηση το πλήθος των κλάσεων. Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίασή τους είναι εποπτικότερη.

§2.3 Μέτρα θέσης και διασποράς (προτεινόμενες ώρες 13)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να κατανοούν την χρησιμότητα και να υπολογίζουν:

- τις παραμέτρους θέσης μίας κατανομής συχνοτήτων,
- τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων,
- την κανονική κατανομή,
- τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Στην § **2.3** εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής. Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Μέσα από τη διδασκαλία χρειάζεται να αναδειχθούν οι περιορισμοί και δυνατότητες από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να φανεί μέσα από παραδείγματα ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να πληροφορήσουμε κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντας του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους. Προτείνεται να συζητηθούν και να ερμηνευτούν με παραδείγματα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μέτρων θέσης που συνοψίζονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Μέση τιμή	
• Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές	• Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές
• Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων	• Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η Χ είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος
• Είναι εύκολα κατανοητή	• Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
• Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος	
• Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση	

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Διάμεσος	
• Είναι εύκολα κατανοητή	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της
• Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές	• Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση
• Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές	• Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
• Ο υπολογισμός της είναι απλός	• Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή
• Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων	

Με την **κανονική κατανομή** μοντελοποιούνται διαδικασίες και φαινόμενα, αρκετά από τα οποία σχετίζονται με την καθημερινότητα του πολίτη. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι με αυτό το μοντέλο μπορούμε να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές ορισμένων μεταβλητών. Στην πράξη, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή για να αντλούμε συμπεράσματα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας για μεγάλα δείγματα (για παράδειγμα, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$» ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 ή 68%).

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι’ αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων **σχετικής** μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο CV $= \frac{s}{\bar{x}}$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

Προτείνεται να συζητηθούν και να ερμηνευτούν με παραδείγματα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μέτρων διασποράς που συνοψίζονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Εύρος	
• Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό	• Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
• Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας	• Δεν χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Διασπορά και τυπική απόκλιση	
• Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις	• Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης
• Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία	• Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.
• Σε κανονικούς πληθυσμούς το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ προσεγγίζουν το 68%, 95%, 99,7% αντίστοιχα	

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Συντελεστής μεταβολής	
• Είναι καθαρός αριθμός (ποσοστό)	• Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν
• Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε	

ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.	
• Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού	

Συμπερασματικά, με τη διδασκαλία του 2ου κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- Να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες της Στατιστικής, για να παρουσιάζουν και να ερμηνεύουν δεδομένα.
- Να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής, αλλά και να γνωρίζουν την αξία και τα όρια των μέτρων αυτών.

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων, ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- Δεν αποτελούν εξεταστέα-διδακτέα ύλη όσα θέματα αναφέρονται στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.
- **Οι τύποι 2 και 4 της ενότητας (γ) Διακύμανση (s^2) της παραγράφου 2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ** (σελίδες 93 και 94) του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» θα δίνονται στους μαθητές και μαθήτριες τόσο κατά τη διδασκαλία όσο και κατά την εξέταση θεμάτων, των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί τη χρήση τους.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Δ΄ ΤΑΞΗΣ

ΒΙΒΛΙΑ 2022-2023
«**Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ ΓΕ.Λ. Τεύχος Β΄**» των Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

ΥΛΗ

Κεφ. 10ο: Εμβαδά

10.1. Πολυγωνικά χωρία

10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων (<u>χωρίς</u> την απόδειξη των θεωρημάτων Ι και ΙΙ)

10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (να διδαχθεί <u>μόνο</u> ο τύπος του Ήρωνα <u>χωρίς</u> την απόδειξή του)

10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων (<u>χωρίς</u> τις αποδείξεις των Θεωρημάτων)

Κεφ. 11ο: Μέτρηση Κύκλου
11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου
11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (<u>χωρίς</u> τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος)
11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.5. Μήκος τόξου
11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δ΄ τάξη των ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ. θα πρέπει να προσανατολίζεται κυρίως στην αξιοποίηση των σημαντικότερων εννοιών και συμπερασμάτων στην επίλυση προβλημάτων υπολογισμού και σχέσεων (εμβαδών, μηκών, γωνιών). Στην αρχή της σχολικής χρονιάς είναι σκόπιμο να γίνει, για μία (1) διδακτική ώρα, μια αναφορά σε στοιχεία από τη Γεωμετρία των προηγούμενων τάξεων που θα χρησιμοποιηθούν στη Δ' τάξη, όπως είναι οι έννοιες και ιδιότητες των παραλληλογράμμων, οι σχέσεις μεταξύ τόξου και αντίστοιχης επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, εφόσον αυτά θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές (στα εμβαδά και στη μέτρηση κύκλου).

Κεφάλαιο 10ο:

§10.1-10.3
Κατά την κρίση του/της εκπαιδευτικού, προτείνεται να υλοποιηθούν η δραστηριότητα και οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της 2) της παραγράφου 10.3.
Θα μπορούσε να ανατεθεί ως δραστηριότητα η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του κεφαλαίου.
Προτείνονται επίσης:
- Οι ερωτήσεις κατανόησης
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6
- Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1 και 8.

Προτείνεται να <u>μη</u> διδαχθούν τα σύνθετα θέματα.

§10.4
Χρειάζεται να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου.
Προτείνονται:
- Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 1 και 3.

Προτείνεται να <u>μη</u> διδαχθούν τα σύνθετα θέματα.

§10.5
Προτείνονται:
- Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 1, 2 και 3.

Προτείνεται να <u>μη</u> διδαχθούν τα σύνθετα θέματα.

Κεφάλαιο 11ο:

§11.1-11.2

Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης της Α΄ Τάξης.
Προτείνεται να συζητηθεί η παρατήρηση και το σχόλιο της παραγράφου 11.2 (που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο).
Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες.
Προτείνεται να μη διδαχθούν οι αποδεικτικές ασκήσεις και τα σύνθετα θέματα.
Η παράγραφος 11.3 δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη. Ωστόσο, βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της παραγράφου 11.2, οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να προτείνουν εμπειρικούς τρόπους για την εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο.

§11.4-11.7

Οι παράγραφοι αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν για μια ομαλή εισαγωγή των μαθητών και των μαθητριών στις άπειρες διαδικασίες.
Προτείνεται να μη διδαχθούν τα σύνθετα θέματα.