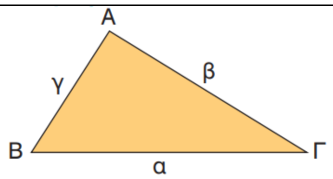
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – Γεωμετρία

## 1.1 Ισότητα τριγώνων.

**Κύρια στοιχεία τριγώνου**

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α, β, γ.




**Βασική Ιδιότητα**

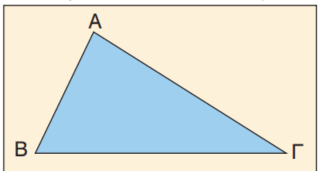
Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

**Περιεχόμενη Γωνία Προσκείμενη Γωνία**

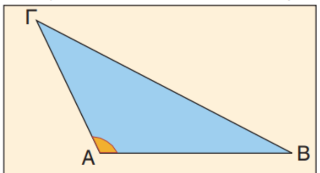
Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία $\hat{A}$.
Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκείμενες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

**Είδη τριγώνου ως προς τις γωνίες**

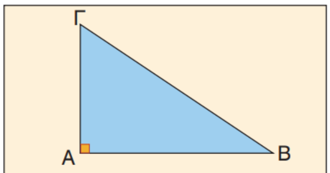
Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:




*Οξυγώνιο,* όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.




*Αμβλυγώνιο,* όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

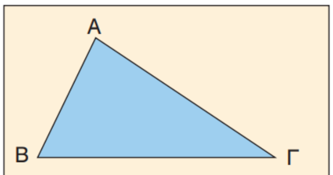



*Ορθογώνιο,* όταν έχει μια γωνία ορθή.

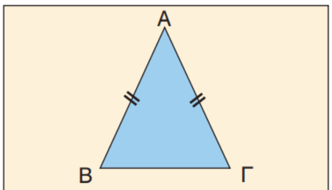
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

**Είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές**

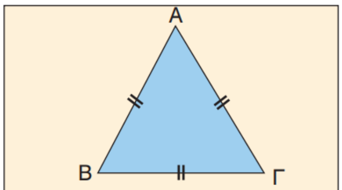
Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:




*Σκαληνό,* όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.




*Ισοσκελές,* όταν έχει δύο πλευρές ίσες.

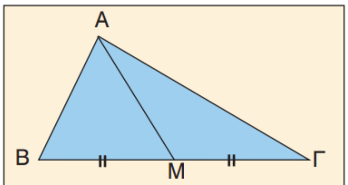



*Ισόπλευρο,* όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

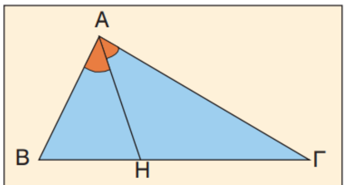
Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

**Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου**

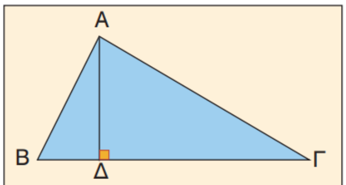
Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.




*Διάμεσος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.




*Διχοτόμος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.




*Ύψος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

**Super SOS**
**Ίσα τρίγωνα**

- Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

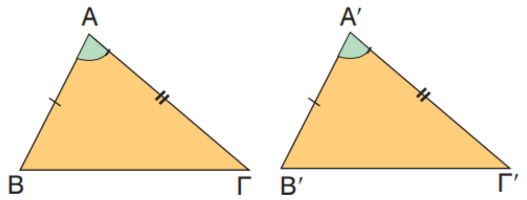
**Super SOS**

- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

**1ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΠΓΠ)**

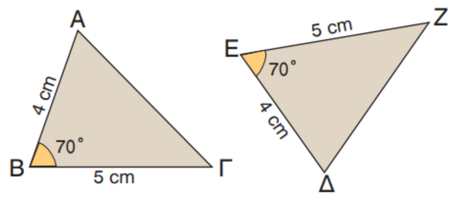
1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.




**Παράδειγμα**

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΒ = ΔΕ = 4 cm, ΒΓ = ΕΖ = 5 cm) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\widehat{B} = \widehat{E} = 70^\circ$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή




$$ΑΓ = ΔΖ,\ \widehat{Γ} = \widehat{Ζ} \text{ και } \widehat{Δ} = \widehat{Α}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\widehat{Γ}$, $\widehat{Ζ}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΔ.

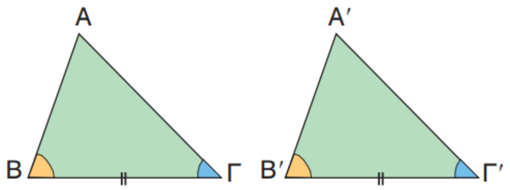
**Super SOS**

**Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.**

**2ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΓΠΓ)**

2ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).

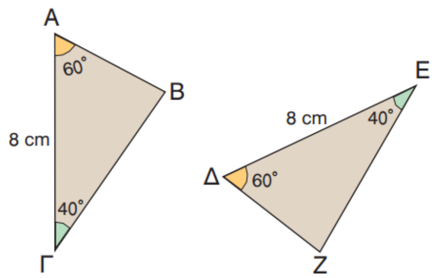
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.




**Παράδειγμα**

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\widehat{A} = \widehat{Δ} = 60^\circ$, $\widehat{Γ} = \widehat{E} = 40^\circ$). Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\widehat{B} = \widehat{Z},\ AB = ΔZ,\ BΓ = EZ.$$




Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Γ}$, $\widehat{E}$.

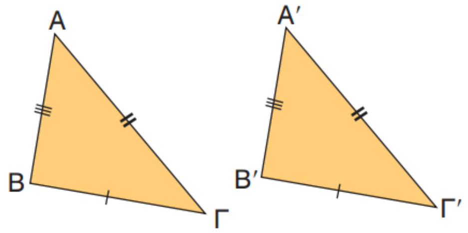
**Super SOS**

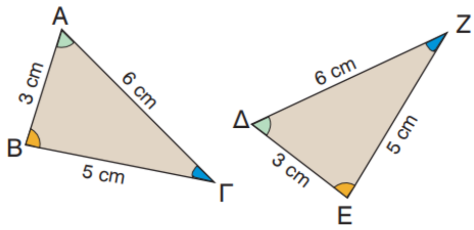
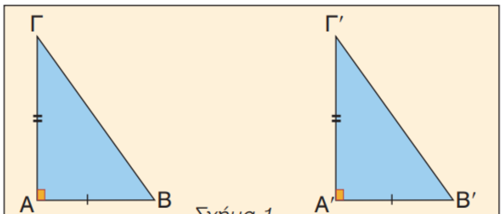
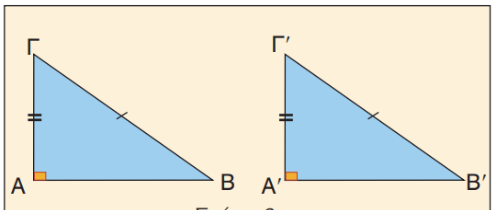
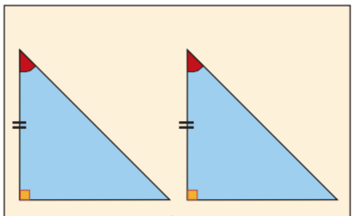
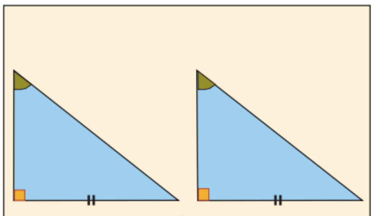
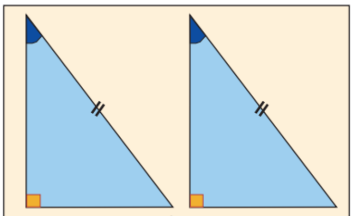
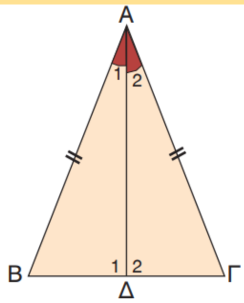
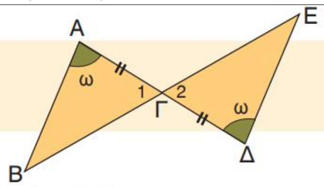
**Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.**

**3ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΠΠΠ)**

3ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



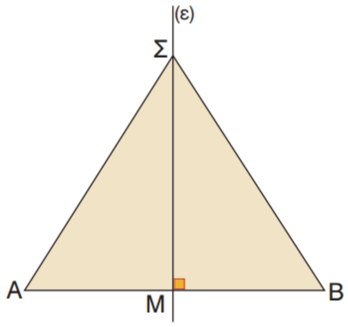
| | |
|---|---|
| **Παράδειγμα** | Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ΑΒ = ΔΕ = 3 cm, ΑΓ = ΔΖ = 6 cm και ΒΓ = ΕΖ = 5 cm. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$.<br><br> |
| **1ο Κριτήριο Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων (Κ-Κ) και (Κ-Υ)** | Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.<br><br><br>*Σχήμα 1*<br><br><br>*Σχήμα 2* |
| **2ο Κριτήριο Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων (Κ-Οξ.Γ) και (Υ-Οξ.Γ)** | Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.<br><br>*Σχήμα 3*<br><br>*Σχήμα 4*<br><br>*Σχήμα 5* |
| **ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ** | Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:<br>α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.<br>β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.<br><br><br>α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:<br>• ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά<br>• ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση<br>• $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.<br>Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.<br>β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.<br>Αφού είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ. |
| **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** | **2** Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = \omega$ και ΑΓ = ΓΔ. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΔΕ.<br><br><br>*Λύση*<br>Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχουν:<br>• ΑΓ = ΓΔ από την υπόθεση<br>• $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ από την υπόθεση<br>• $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες<br>Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.<br>Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΔΕ. |

**ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο




σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, κοινή πλευρά και
- ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

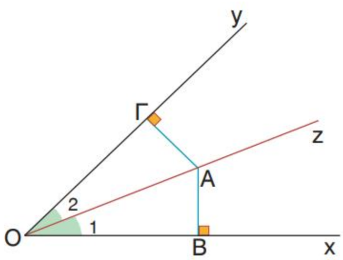
Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

**ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.**

**ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.**




Φέρνουμε τη διχοτόμο Οz της γωνίας $x\hat{O}y$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Οz είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

**ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.**

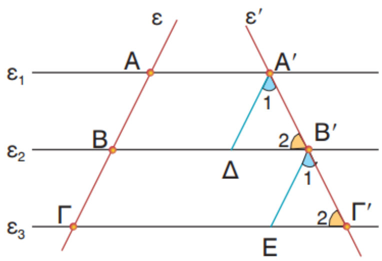
## 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

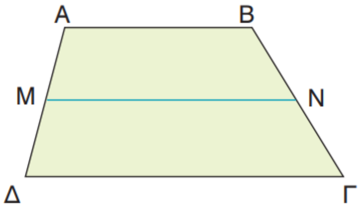
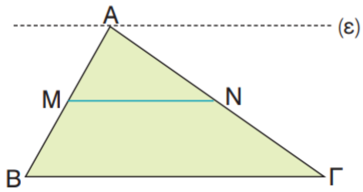
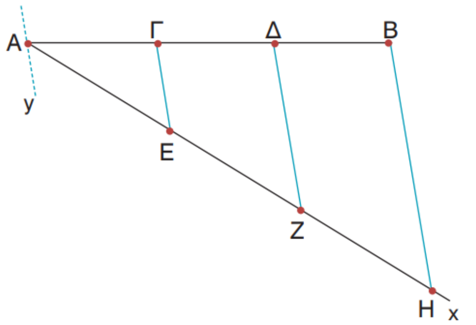
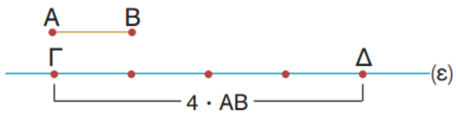
**Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών**

**Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

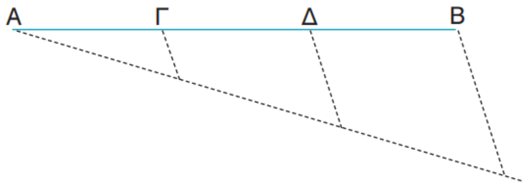
Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.
Αν μια άλλη ευθεία ε′ τέμνει τις $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ είναι ίσα μεταξύ τους.
Πράγματι, αν φέρουμε Α′Δ // ε, Β′Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α′Β′Δ και Β′Γ′Ε παρατηρούμε ότι έχουν:



| | |
|---|---|
| | • $A'\Delta = B'E$ γιατί $A'\Delta = AB$, $B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'\Delta B$, $BB'E\Gamma$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.<br>• $\widehat{B}_2' = \widehat{\Gamma}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ που τέμνονται από την $\varepsilon'$.<br>• $\widehat{A}_1' = \widehat{B}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'\Delta$, $B'E$ που τέμνονται από την $\varepsilon'$.<br>Τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, επομένως είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'\Gamma'$. |
| **Εφαρμογή σε τραπέζιο** | Για παράδειγμα, σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) αν από το μέσο Μ της ΑΔ φέρουμε ευθεία ΜΝ παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες ΑΒ, ΜΝ, ΔΓ, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΒΓ. Άρα ΒΝ = ΝΓ.<br> |
| **Εφαρμογή σε τρίγωνο** | **Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.**<br>**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**<br>Ομοίως, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.<br> |
| **Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα** | Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι 1,66... cm, οπότε καθένα από αυτά δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια.<br>Μπορούμε όμως να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με ακρίβεια, αν εργαστούμε με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:<br>Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με τον διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ.<br><br>Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.<br>Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα. |
| **Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων** | • Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σε μια ευθεία ε πάρουμε τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα είναι ίσο με ΑΒ, τότε κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, για το οποίο λέμε ότι είναι ίσο με $4 \cdot AB$ και γράφουμε $\Gamma\Delta = 4 \cdot AB$.<br>Η ισότητα αυτή γράφεται και ως εξής: $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = 4$.<br>Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο **λόγος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός 4.<br> |

- Αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, τότε λέμε ότι το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με $\frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ και γράφουμε:

  $ΑΓ = \frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$.

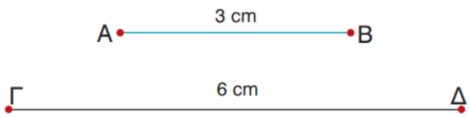
  Λέμε ακόμη ότι:

  $ΑΔ = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$.

  Δηλαδή ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{1}{3}$, ενώ ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{2}{3}$.

**Ο λόγος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $ΓΔ = λ \cdot ΑΒ$.**

- Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 3 cm και ΓΔ = 6 cm, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους $\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$

**Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.**

**Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα**


Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 9 cm και ΓΔ = 3 cm, τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 3$. Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ = 6 cm και ΗΘ = 2 cm, τότε ο λόγος του ΕΖ προς το ΗΘ είναι $\frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$, δηλαδή ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του ΕΖ προς το ΗΘ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΗΘ.

**Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.**

Η ισότητα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

**Ιδιότητα 1**

Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $αδ = βγ$

**Ιδιότητα 2**

Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $\frac{α}{γ} = \frac{β}{δ}$ ή $\frac{δ}{β} = \frac{γ}{α}$

**Ιδιότητα 3**

Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

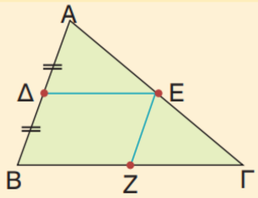
**ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.**

**2** Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$




*Λύση*

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ // ΒΓ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ. Επειδή Ε το μέσο της ΑΓ και ΕΖ // ΑΒ, έχουμε Ζ μέσο ΒΓ.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα ΔΕ = ΒΖ. Όμως $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

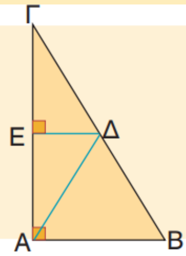
**Βασική Εφαρμογή**

**Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.**

**3** Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$




*Λύση*

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ.

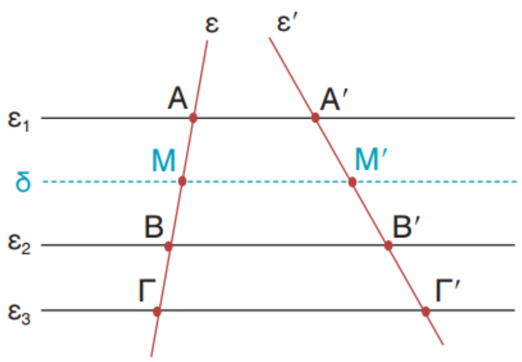
β) Επειδή ΔΕ // ΑΒ και ΑΒ ⊥ ΑΓ, θα είναι ΔΕ ⊥ ΑΓ. Άρα, ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΓ και από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε ΑΔ = ΔΓ.

## 1.3 Θεώρημα του Θαλή

**Θεώρημα Θαλή**

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν } \varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \,//\, \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$




Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$.

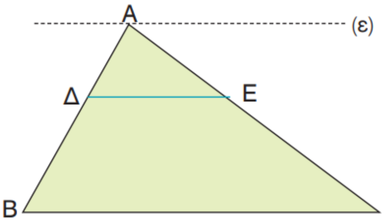
**Θεώρημα Θαλή σε τρίγωνο**

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.
- Αν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ τότε ΔΕ // ΒΓ.

Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ // ΒΓ και από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ θα ορίζουν στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή, $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$, οπότε και $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.



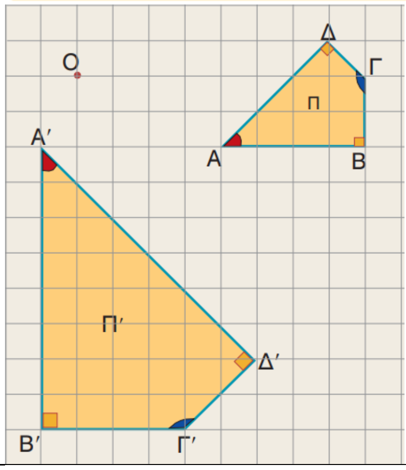

Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$, τότε ΔΕ // ΒΓ. Επομένως:

## 1.5 Ομοιότητα

### Α. Όμοια πολύγωνα

**Όμοια Πολύγωνα**

*Γενικά* Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.




**Super SOS**

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο $\left(\text{π.χ. } \frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2\right)$, γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.

**Super SOS**

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

**Βασική εφαρμογή**

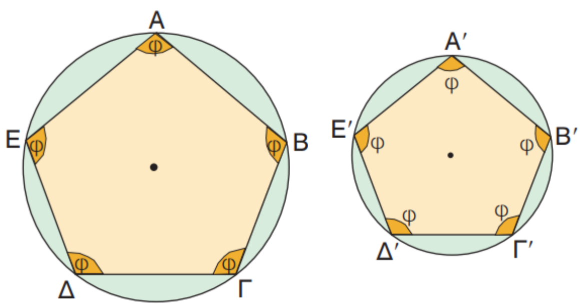
**1** Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.

*Λύση*

Οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α′Β′Γ′Δ′Ε′ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'}$$

αφού και οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι.




Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι $φ = 180° - \frac{360°}{5} = 180° - 72° = 108°$.

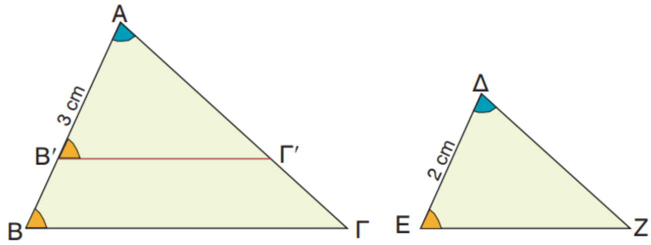
Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

*Γενικά* Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

<table>
<tr><td></td><td>Β. Όμοια τρίγωνα</td></tr>
<tr><td>Όμοια τρίγωνα</td><td>

## Β Όμοια τρίγωνα

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.




Δηλαδή αν έχουν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

</td></tr>
<tr><td>Κριτήριο Ομοιότητας Τριγώνων</td><td>

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

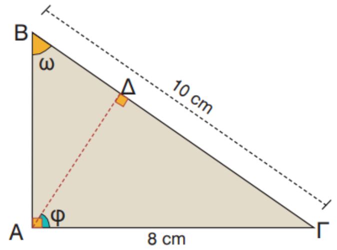
</td></tr>
<tr><td>Βασικό Παράδειγμα</td><td>

**2** Σ’ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.

*Λύση*

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

<table>
<tr><th>Ίσες γωνίες</th><th>$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$</th><th>$\hat{\Gamma}$ κοινή</th><th>$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$</th></tr>
<tr><td>Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ</td><td>ΒΓ</td><td>ΑΒ</td><td>ΑΓ</td></tr>
<tr><td>Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ</td><td>ΑΓ</td><td>ΑΔ</td><td>ΔΓ</td></tr>
</table>




Άρα έχουμε $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$ *(1)*.

Από τις ισότητες (1) έχουμε $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ή $\frac{10}{8} = \frac{8}{\Delta\Gamma}$.

Άρα $10 \cdot \Delta\Gamma = 64$, οπότε $\Delta\Gamma = 6{,}4$ cm. Επειδή ΒΓ = 10 cm και ΔΓ = 6,4 cm έχουμε $B\Delta = 10 - 6{,}4$ δηλαδή $B\Delta = 3{,}6$ cm.

</td></tr>
</table>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Τριγωνομετρία

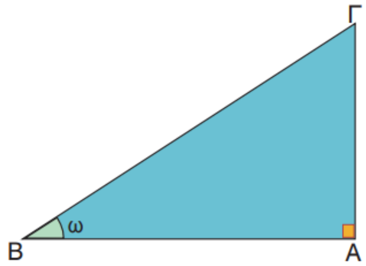
## 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° \leq ω \leq 180°$

**Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνίας Ορθογωνίου Τριγώνου**

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

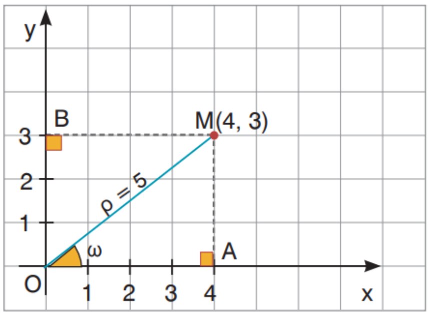



**Super SOS**

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο Μ(4, 3) και φέρουμε $ΜΑ \perp x'x$ και $ΜΒ \perp y'y$, τότε έχουμε $ΟΑ = 4$ και $ΟΒ = ΑΜ = 3$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $ω = x\hat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $ρ = ΟΜ$ έχουμε $ρ^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $ρ = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα




$$ημω = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$συνω = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

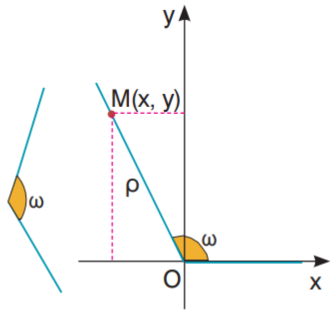
$$εφω = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$

**Super SOS**

**Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αμβλείας Γωνίας**

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.

Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή Ο, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y), διαφορετικό από το Ο, τότε για την απόσταση $ρ = ΟΜ$ ισχύει




$$\boldsymbol{ρ = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{y}{ρ}$$

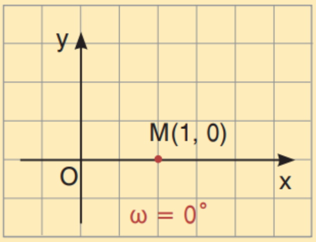
$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{x}{ρ}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \frac{y}{x}$$

**Πρόσημο Τριγωνομετρικών Αριθμών**

- **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **$ημω>0$, $συνω>0$, $εφω>0$.**
- **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **$ημω>0$, $συνω<0$, $εφω<0$.**

**Τριγωνομετρικοί Αριθμοί γωνιών $0^0$, $90^0$, $180^0$**

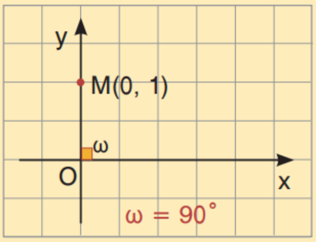



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varepsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

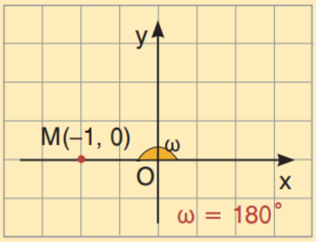



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οy π.χ. το Μ(0,1), τότε $\omega = x\hat{O}M = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται (γιατί x=0)




Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx′ π.χ. το Μ(–1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

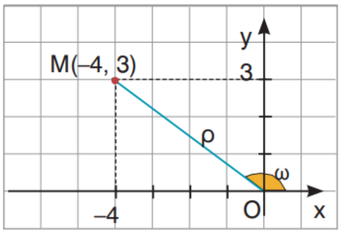
$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

**Παράδειγμα**

**1** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(–4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

*Λύση*




Για την απόσταση OM = ρ έχουμε:

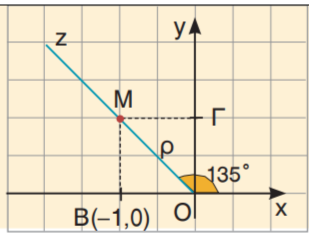
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

Άρα: $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

**Παράδειγμα**

**2** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135^\circ$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη –1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135^\circ$.




*Λύση*

Φέρουμε $MB \perp x'x$ και $M\Gamma \perp y'y$. Επειδή $x\hat{O}M = 135^\circ$ και $x\hat{O}y = 90^\circ$ θα είναι $\Gamma\hat{O}M = 45^\circ$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ είναι και ισοσκελές.

Άρα ΟΓ = ΜΓ = ΟΒ = 1 και η τεταγμένη του σημείου Μ είναι y = 1.

Δηλαδή έχουμε M(–1, 1) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

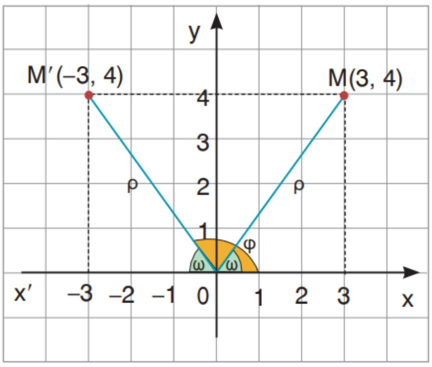
Άρα $\eta\mu 135^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\varepsilon\varphi 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

## 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

**Τριγωνομετρικοί Παραπληρωματικών γωνιών**

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο M′(–3, 4) ως προς τον άξονα y′y.

Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = x\hat{O}M'$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$.

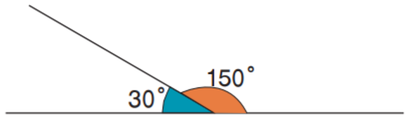



Έχουμε ακόμη ότι

$\rho = OM = OM' = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$ και

$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{4}{3}$.

| | |
|---|---|
| | Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, $\varphi = 180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.<br>**Γενικά** Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:<br>• $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$ • $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ • $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$ |
| **Παράδειγμα** | Για παράδειγμα,<br>$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$<br>$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>$\varepsilon\varphi 150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$<br> |
| | Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180°, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.<br>Για παράδειγμα, αν $\eta\mu x = \eta\mu 35^\circ$ και $0 \le x \le 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$. |