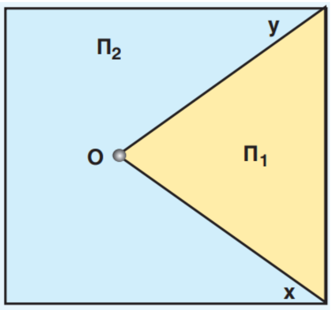
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – Βασικές γεωμετρικές έννοιες

1.2. Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα σχήματα - Ίσα σχήματα

Πως ορίζεται η γωνία;

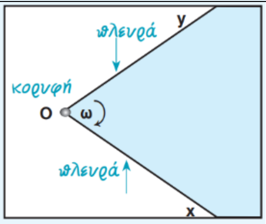
Σχεδιάζουμε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο ημιευθείες **Ox** και **Oy**, με κοινή αρχή το σημείο **O**.
Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές **$Π_1$** και **$Π_2$**.

- Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες **Ox** και **Oy** ονομάζεται **γωνία**.
- Η "μικρότερη" ($Π_1$) λέγεται **κυρτή** και η άλλη ($Π_2$) **μη κυρτή**.
- Το σημείο **O** λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες **Ox** και **Oy** λέγονται **πλευρές** της γωνίας.



SOS
Πως συμβολίζεται η γωνία;

Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε **$x\hat{O}y$** ή **$y\hat{O}x$** (το γράμμα της κορυφής **O** γράφεται πάντα στη μέση) ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. "$\hat{\omega}$".



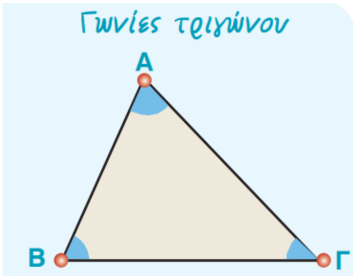
Πολύ βασικές έννοιες

Περιεχόμενη γωνία

Απέναντι πλευρά

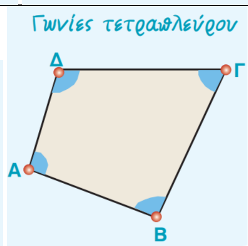
Προσκείμενες γωνίες

- Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες, την $\hat{A}$, τη $\hat{B}$ και τη $\hat{Γ}$.
- Όταν λέμε, π.χ. η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου **ΑΒΓ**, εννοούμε τη γωνία που έχει πλευρές τις ημιευθείες **ΑΒ**, **ΑΓ** και περιέχει το τρίγωνο.
- Η γωνία $\hat{A}$ λέμε ότι **περιέχεται** μεταξύ των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ** του τριγώνου.
- Ακόμα λέμε ότι η πλευρά **ΒΓ** είναι **απέναντι** στη γωνία $\hat{A}$, ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ είναι **προσκείμενες** της πλευράς **ΒΓ**.



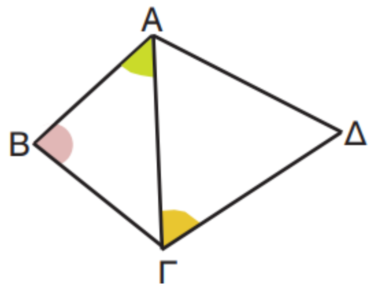
Γωνίες τετραπλεύρου

Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** έχει τέσσερις γωνίες, που καθεμιά τους περιέχει το τετράπλευρο. Οι γωνίες αυτές είναι οι $Δ\hat{A}B$, $A\hat{B}Γ$, $B\hat{Γ}Δ$ και $Γ\hat{Δ}A$, που γράφονται απλά $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ και $\hat{Δ}$ αντίστοιχα.



Προσοχή!!!

Στο τετράπλευρο αυτό μπορούμε να πούμε γωνία $\hat{\mathbf{B}}$ και γωνία $\hat{\mathbf{Δ}}$, γιατί είναι σαφές ποιες είναι.
ΔΕΝ μπορούμε όμως να πούμε γωνία $\hat{\mathbf{A}}$ γιατί υπάρχουν τρεις γωνίες με κορυφή το Α οι $B\hat{A}Γ$, $B\hat{A}Δ$ και η $Γ\hat{A}Δ$. Ομοίως ΔΕΝ μπορούμε να πούμε γωνία $\hat{\mathbf{Γ}}$ γιατί υπάρχουν τρεις γωνίες με κορυφή το Γ οι $B\hat{Γ}A$, $B\hat{Γ}Δ$ και η $A\hat{Γ}Δ$.



Τι είναι η Τεθλασμένη γραμμή;

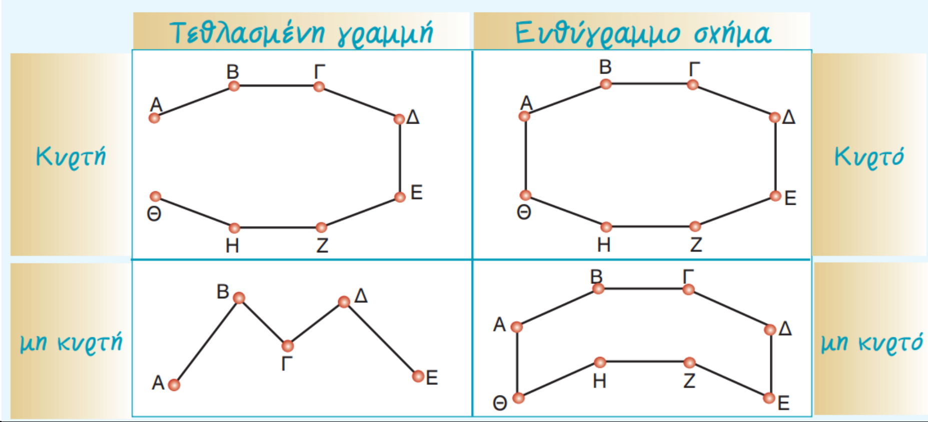
Τεθλασμένη γραμμή είναι το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία.

Τι ονομάζεται Ευθύγραμμο σχήμα;

Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.

Πότε μια τεθλασμένη είναι Κυρτή και πότε μη κυρτή;

Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**.



SOS
Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα;

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **ίσα**, αν **συμπίπτουν**, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.

Super SOS
Ποια στοιχεία των ίσων σχημάτων ονομάζονται αντίστοιχα στοιχεία;

Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται **αντίστοιχα στοιχεία** των σχημάτων αυτών.

Super SOS

Παρατηρούμε ότι:

- **Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των ίσων σχημάτων είναι ίσες.**

1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων - Απόσταση σημείων - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Τι είναι η Μέτρηση;

Για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα σύγκρισης. Έτσι, κάθε σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται **μέτρηση**.

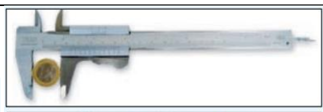
Μονάδα μήκους είναι το **"μέτρο"** (m).

- Για να μετρήσουμε, λοιπόν, ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρησιμοποιούμε ένα αντίγραφο του **μέτρου** και κάνουμε τη σύγκριση μ' αυτό, όπως έχουμε μάθει.
- Εάν όμως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του **μέτρου**, επιλέγουμε, για τη μέτρηση ένα **πολλαπλάσιο** ή μια **υποδιαίρεση του μέτρου** για τον σκοπό αυτό.

Για να μετρήσουμε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιούμε, συνήθως, το **υποδεκάμετρο**, που είναι το **ένα δέκατο** $\left(\frac{1}{10}\right)$ **του μέτρου**.

Για μεγαλύτερα μήκη, όπως π.χ. έναν τοίχο ή τις διαστάσεις ενός οικοπέδου, χρησιμοποιούμε τη **μετροταινία**.

Για πολύ μικρά μήκη π.χ. τη διάμετρο μιας βίδας ή το πάχος μιας λαμαρίνας, χρησιμοποιούμε το **παχύμετρο** ή το **μικρόμετρο**, αντίστοιχα.



	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΜΕΤΡΟΥ	Χιλιόμετρο	Km	1 Km = 1000 m
	ΜΕΤΡΟ	**m**	
ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ	Δεκατόμετρο ή παλάμη	dm	$1\ dm = \frac{1}{10}\ m = 0{,}1\ m$
	Εκατοστόμετρο ή πόντος	cm	$1\ cm = \frac{1}{100}\ m = 0{,}01\ m$
	Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό	mm	$1\ mm = \frac{1}{1000}\ m = 0{,}001\ m$

Η σχέση μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου είναι η εξής:

1 m	=	10 dm	=	100 cm	=	1000 mm
		1 dm	=	10 cm	=	100 mm
				1 cm	=	10 mm

- Έχουμε τα σημεία **Α** και **Β**. Χαράζουμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** και το μετράμε με το υποδεκάμετρο. Βρίσκουμε ότι έχει μήκος **3,8 cm**.
- Λέμε ότι η **απόσταση** των σημείων **Α** και **Β** είναι **3,8 cm** και γράφουμε **ΑΒ = 3,8 cm**.

SOS

Τι λέμε απόσταση δύο σημείων;

Απόσταση δύο σημείων **Α** και **Β** λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ**, που τα ενώνει.

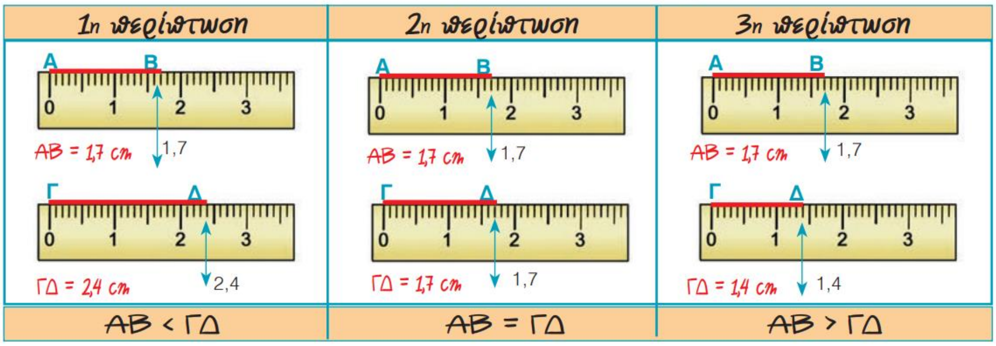
Προσοχή

- Με το σύμβολο **ΑΒ** εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ**, αλλά και το **μήκος** αυτού του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ**.
- Για να ξεχωρίσουμε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό **(ΑΒ)**. Αλλά στο βιβλίο αυτό, για απλούστευση, θα γράφουμε απλά: **μήκος ΑΒ**.

Πως συγκρίνω ευθύγραμμα τμήματα;

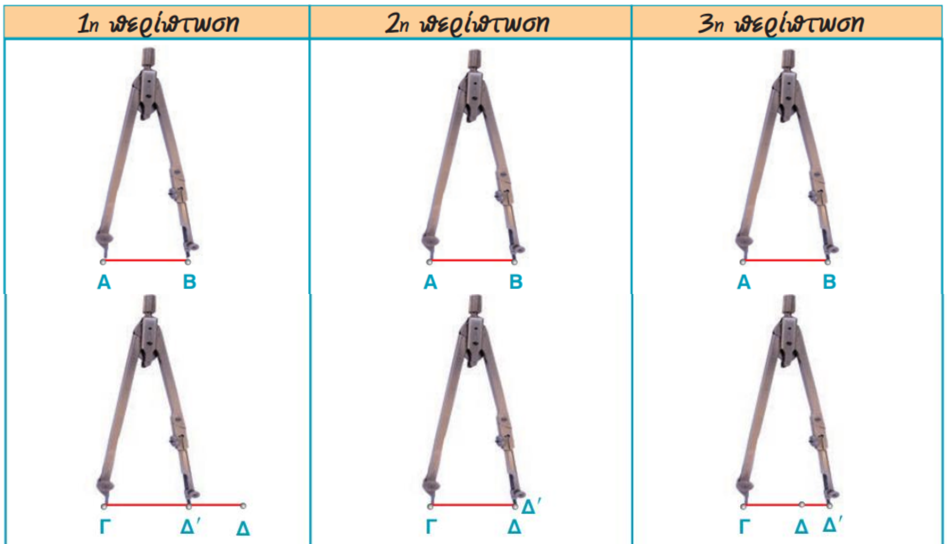
2. *Να βρεθούν κατάλληλοι τρόποι σύγκρισης δύο ευθυγράμμων τμημάτων και να διατυπωθούν τα συμπεράσματα.*

Ο **1ος τρόπος** *είναι να κάνουμε τη μέτρηση με το υποδεκάμετρο.*

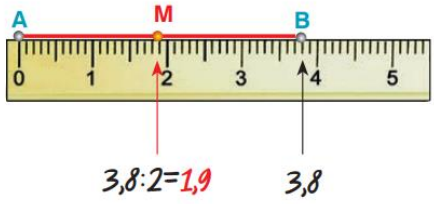
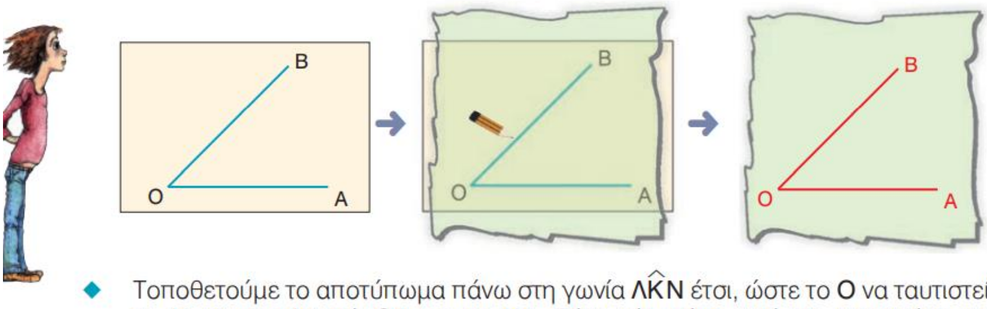


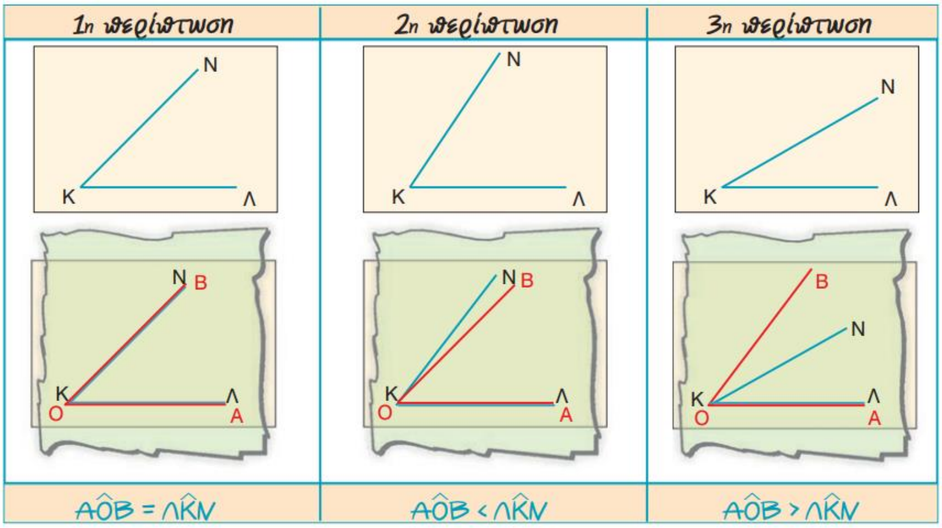
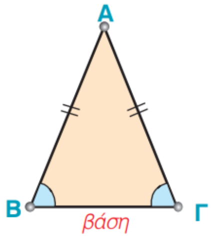
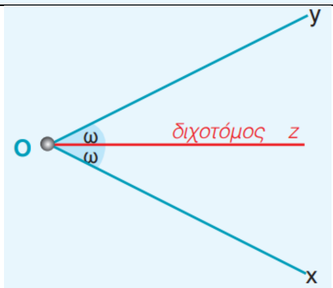
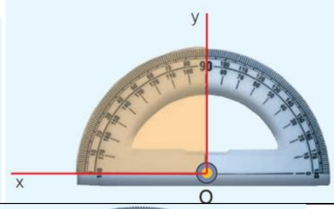
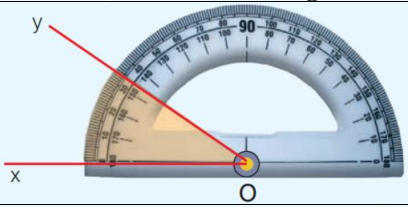
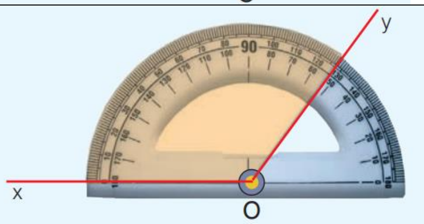
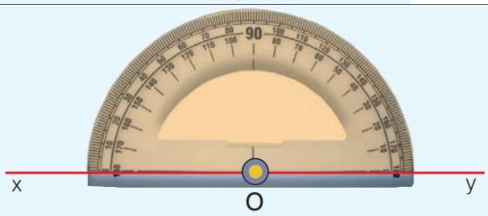
Ο **2ος τρόπος** *είναι να τα συγκρίνουμε χρησιμοποιώντας τον διαβήτη.*

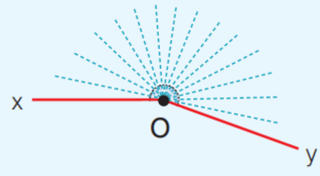
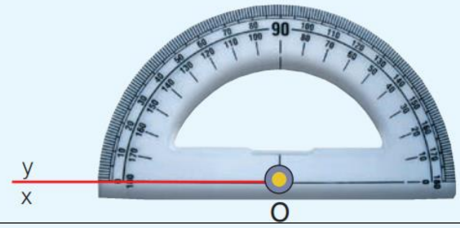
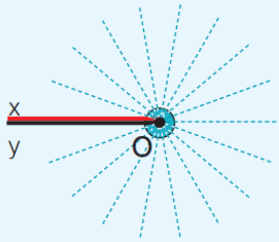
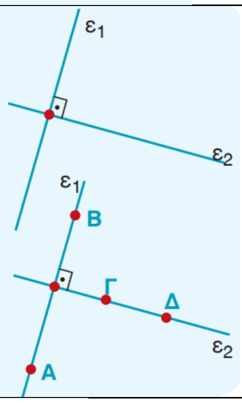
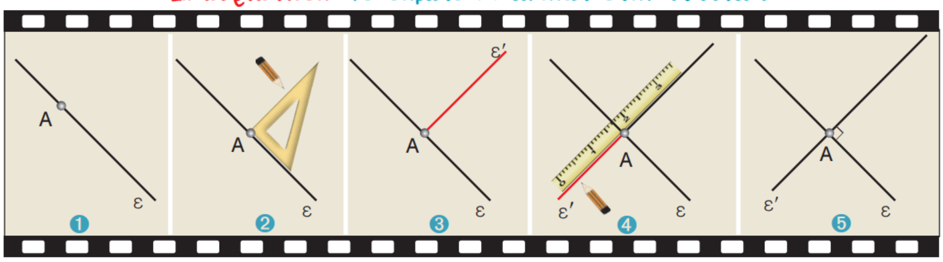
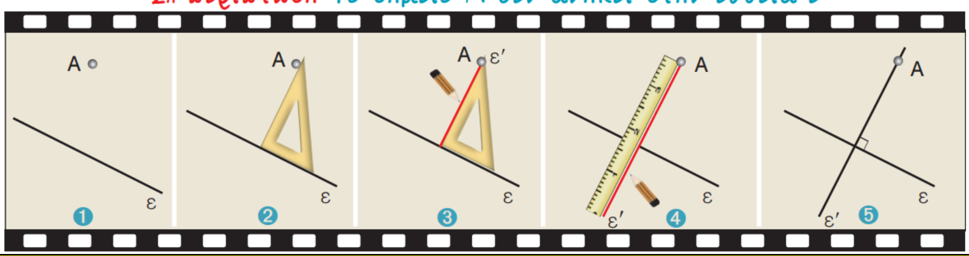
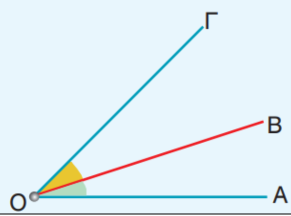
Ακουμπάμε τη μία άκρη του διαβήτη στο **Α** και την άλλη στο **Β**. Μετακινούμε τον διαβήτη, χωρίς να μεταβάλουμε το άνοιγμά του και τοποθετούμε το ένα άκρο του στο σημείο **Γ** και το άλλο επί της ημιευθείας **ΓΔ**. Ονομάζουμε **Δ′** το σημείο στο οποίο καταλήγει το δεύτερο άκρο του διαβήτη. Τότε έχουμε τρεις περιπτώσεις.

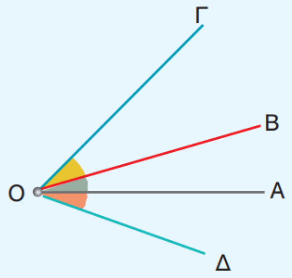
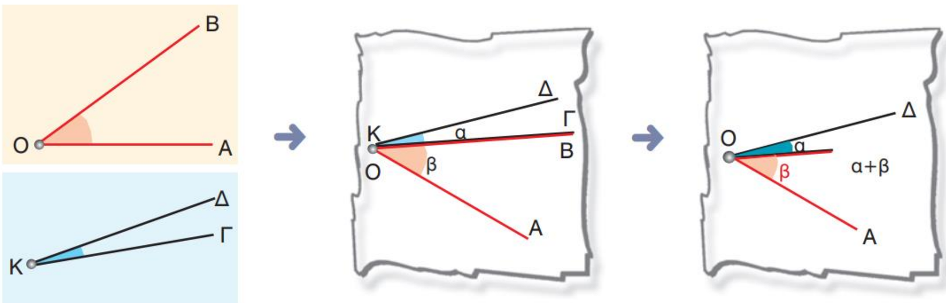
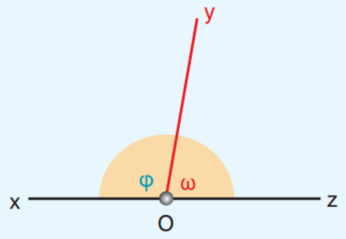
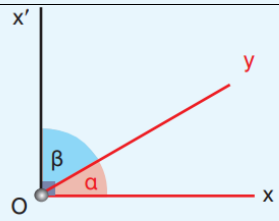
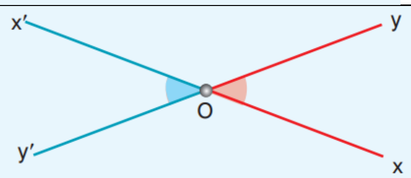
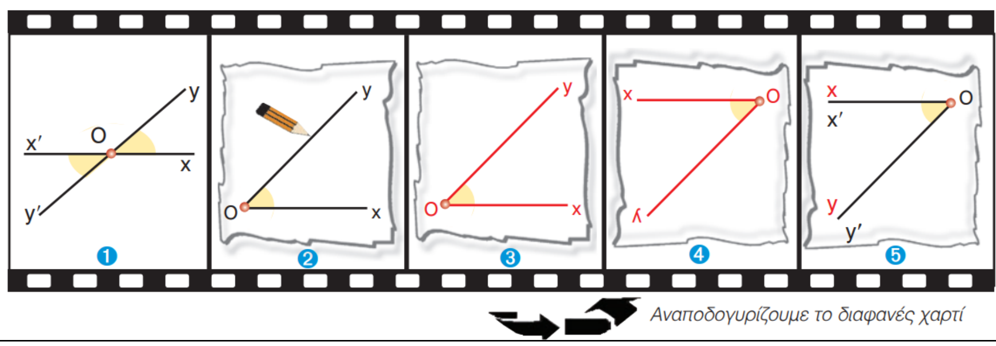


1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
Το Δ′ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ.	*Το Δ′ συμπίπτει με το Δ.*	*Το Δ′ βρίσκεται στην προέκταση του ΓΔ προς το Δ.*
Τότε λέμε ότι το **ΑΒ** είναι **μικρότερο** από το **ΓΔ** και γράφουμε: ΑΒ<ΓΔ	Τότε λέμε ότι τα **ΑΒ** και **ΓΔ** έχουν το **ίδιο μήκος** και γράφουμε: ΑΒ=ΓΔ	Τότε λέμε ότι το **ΑΒ** είναι **μεγαλύτερο** από το **ΓΔ** και γράφουμε: ΑΒ>ΓΔ

Τι ονομάζουμε Μέσο ευθύγραμμου τμήματος;	**Μέσο** ενός ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ** ονομάζουμε το σημείο **Μ** του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.
Εύρεση το μέσου ευθύγραμμου τμήματος	**3.** *Να βρεθεί το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.* *Λύση* Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ένα σημείο Μ του ΑΒ, για το οποίο είναι: **ΑΜ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.** Αλλά τότε και **ΜΒ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.** Δηλαδή: **ΑΜ = ΜΒ.**  ◆ **Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει πάντα ένα μέσο Μ, που είναι και μοναδικό.**
	1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών - Διχοτόμος γωνίας
Ποια είναι η μονάδα μέτρησης γωνιών και ποιες οι υποδιαιρέσεις της;	▶ Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο.** ▶ Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο της γωνίας.** ▶ Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα**, που γράφεται: **1°.** ▶ Είναι: **1° = 60′ (πρώτα λεπτά)** και **1′ = 60″ (δεύτερα λεπτά).**
	● **Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο** που εξαρτάται μόνο από το **“άνοιγμα” των πλευρών της.** ● **Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.**
	Στο εξής με $x\hat{O}y$ ή $\hat{\omega}$ θα συμβολίζουμε τη γωνία και το μέτρο της.
Πως γίνεται η σύγκριση γωνιών;	**1.** *Να γίνει σύγκριση δύο γωνιών με ένα διαφανές χαρτί.* *Λύση* ◆ Αποτυπώνουμε τη γωνία **$A\hat{O}B$** στο διαφανές χαρτί.  ◆ Τοποθετούμε το αποτύπωμα πάνω στη γωνία **$\Lambda\hat{K}N$** έτσι, ώστε το **Ο** να ταυτιστεί με το **Κ** και η πλευρά **ΟΑ** με τη **ΚΛ**. Τότε μία μόνο από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστεί.

	
Super SOS **Βασική εφαρμογή**	**2.** *Να συγκριθούν οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου.* **Λύση** Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ. Με το διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις **προσκείμενες στη βάση** γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$.  Διαπιστώνουμε ότι: ▶ Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.
Τι είναι η διχοτόμος γωνίας;	**Διχοτόμος γωνίας** ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε **δύο ίσες γωνίες**. 
	1.6. Είδη γωνιών - Κάθετες ευθείες
Ποια γωνία λέγεται ορθή;	● **Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 90˚**. ▶ Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι **κάθετες ημιευθείες**. 
Ποια γωνία λέγεται οξεία;	● **Οξεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μικρότερο των 90˚**. 
Ποια γωνία λέγεται αμβλεία;	● **Αμβλεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μεγαλύτερο των 90˚** και μικρότερο των **180˚**. 
Ποια γωνία λέγεται ευθεία;	● **Ευθεία γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 180˚**. ▶ Οι πλευρές της ευθείας γωνίας *είναι αντικείμενες ημιευθείες.* 

Ποια γωνία λέγεται μη κυρτή;	● **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μεγαλύτερο των 180°** και μικρότερο των **360°**. 
Ποια γωνία λέγεται μηδενική;	● **Μηδενική γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας **το μέτρο είναι ίσο με 0°**. 
Ποια γωνία λέγεται πλήρης;	● **Πλήρης γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 360°**.  ◆ **Η ημιευθεία** της τελικής πλευράς μιας **μηδενικής** και μιας **πλήρους γωνίας** ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.
Κάθετες ευθείες **Κάθετες ημιευθείες** **Κάθετα ευθύγραμμα τμήματα**	● Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες, που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές. *Πώς συμβολίζουμε την καθετότητα δύο ευθειών;* ● Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι κάθετες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "⊥", γράφουμε $ε_1 \perp ε_2$ και διαβάζουμε: *"η $ε_1$ είναι κάθετη στην $ε_2$"*. ● Δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) που βρίσκονται πάνω σε δύο κάθετες ευθείες, λέγονται **κάθετα ευθύγραμμα τμήματα** (ή **κάθετες ημιευθείες**). 
Βασική Κατασκευή	*Να σχεδιαστεί ευθεία ε′, που διέρχεται από σημείο Α και είναι κάθετη σε ευθεία ε.* *1η περίπτωση: Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε*  *2η περίπτωση: Το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε* 
	1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες - Άθροισμα γωνιών
Ποιες γωνίες λέγονται Εφεξής;	**Εφεξής γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την **ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο**. 

Ποιες γωνίες λέγονται Διαδοχικές;	Οι γωνίες $\widehat{ΔΟΑ}$ και $\widehat{ΑΟΒ}$ καθώς και οι γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$ και $\widehat{ΒΟΓ}$ είναι εφεξής. Τότε οι γωνίες $\widehat{ΔΟΑ}$, $\widehat{ΑΟΒ}$ και $\widehat{ΒΟΓ}$ λέγονται **διαδοχικές**. 
	Σε αρκετές περιπτώσεις χρειάζεται να προσθέσουμε δύο γωνίες, δηλαδή να βρούμε μια τρίτη γωνία, που να είναι το άθροισμά τους. Ας δούμε πώς γίνεται αυτό.
Πως προσθέτω γωνίες;	**2.** *Να βρεθεί η γωνία, που είναι άθροισμα δύο γωνιών.* **Λύση** Με το διαφανές χαρτί, όπως κάναμε και προηγουμένως, φέρνουμε τις δύο γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$ και $\widehat{ΓΚΔ}$ σε θέση τέτοια, ώστε να γίνουν εφεξής. Τότε οι μη κοινές πλευρές **ΟΑ** και **ΟΔ** σχηματίζουν μια νέα γωνία την $\widehat{ΑΟΔ}$, για την οποία διαπιστώνουμε, με το μοιρογνωμόνιο, ότι έχει μέτρο $\hat{α} + \hat{β}$, δηλαδή είναι το **άθροισμα** των μέτρων ($\hat{α}$ και $\hat{β}$) των δύο γωνιών. 
	1.8. Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες - Κατακορυφήν γωνίες
Super SOS **Ποιες γωνίες λέγονται Παραπληρωματικές;**	**Παραπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 180°**. Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης. 
Super SOS **Ποιες γωνίες λέγονται Συμπληρωματικές;**	**Συμπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 90°**. Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης. 
Super SOS **Ποιες γωνίες λέγονται Κατακορυφήν;**	**Κατακορυφήν γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την **κορυφή τους κοινή** και τις **πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες**. 
Super SOS **ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**	**4.** *Να εξεταστεί με διαφανές χαρτί η σχέση δύο κατακορυφήν γωνιών.*  *Αναποδογυρίζουμε το διαφανές χαρτί*

Διαπιστώνουμε, λοιπόν ότι:

- *Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.*

Βασικό Παράδειγμα

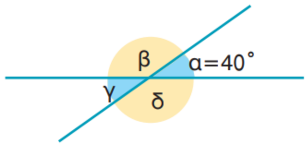
6. *Να υπολογιστούν οι γωνίες του σχήματος, εάν είναι $\hat{\alpha}=40°$.*

Λύση

Επειδή οι γωνίες με μέτρα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\alpha}$ είναι κατακορυφήν, επομένως θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}=40°$. Οι γωνίες, όμως, με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι:

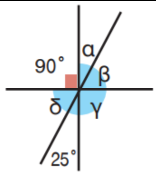
$\hat{\beta}=180°-40°=140°$.

Αλλά οι γωνίες με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\delta}=\hat{\beta}=140°$.



Βασική Άσκηση

11. *Να υπολογίσεις τις γωνίες του διπλανού σχήματος (χωρίς μοιρογνωμόνιο).*



1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

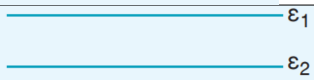
Ποιες ευθείες λέγονται Παράλληλες και ποιες Τεμνόμενες ;

- **Δύο ευθείες** του ιδίου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- **Δύο ευθείες** του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται **τεμνόμενες** και το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής** των δύο ευθειών.

► **Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.**

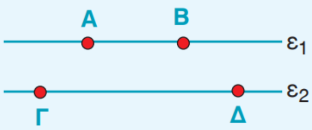
Συμβολισμός

- Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "//" και γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Ποια ευθύγραμμα τμήματα λέγονται παράλληλα;

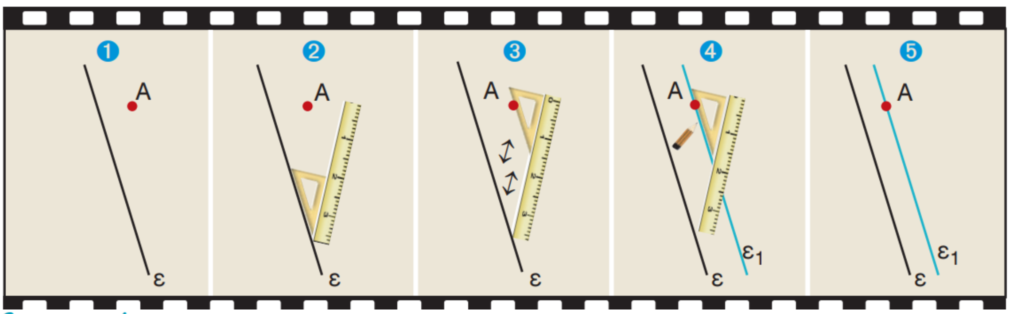
Δύο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες, θα λέγονται **παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα** και γράφουμε ΑΒ//ΓΔ.



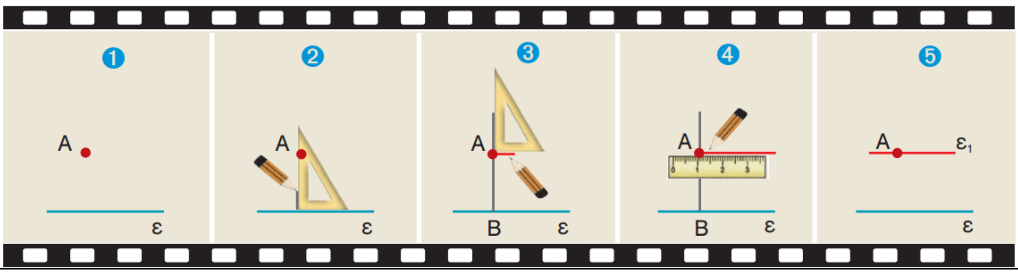
Κατασκευή Παράλληλης

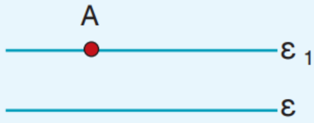
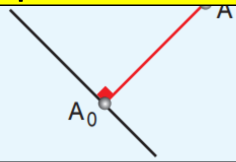
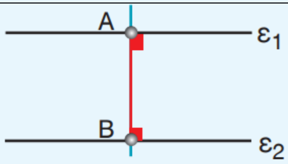
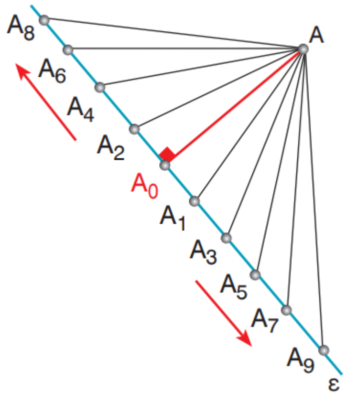
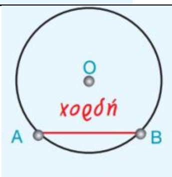
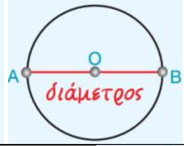
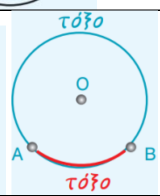
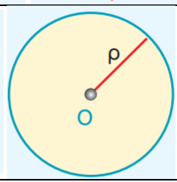
2. *Να σχεδιαστεί ευθεία ε_1, που να είναι παράλληλη προς μια ευθεία ε και να διέρχεται από σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ε.*

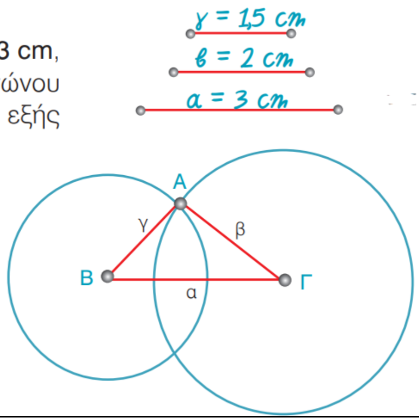
1ος τρόπος: Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε με τον κανόνα και τον γνώμονα την ευθεία **ε_1**, που διέρχεται από το σημείο **Α** και είναι παράλληλη προς την **ε**.



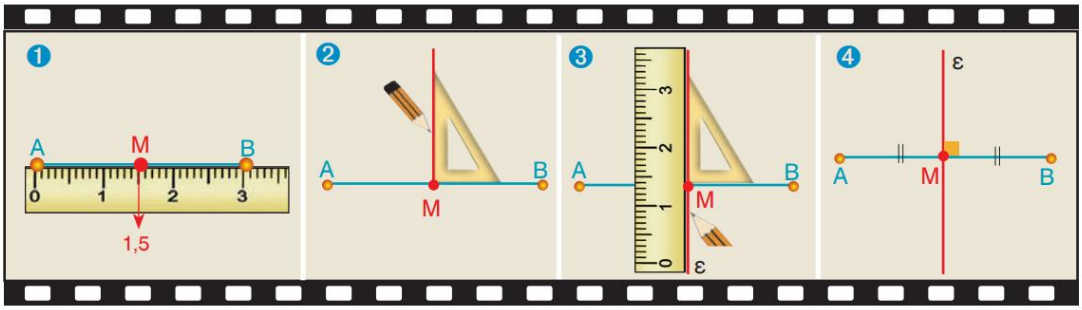
2ος τρόπος: Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα για να φέρουμε κάθετο **ΑΒ** από το σημείο **Α** στην ευθεία **ε**. Στη συνέχεια φέρουμε την **ε_1** κάθετη από το **Α** στην **ΑΒ** η οποία είναι η ζητούμενη παράλληλη της **ε**.



Κριτήριο Παραλληλίας	● Δύο ευθείες του επιπέδου **κάθετες σε μια ευθεία** είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.
Αξίωμα	Δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση: ▶ Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία $ε_1$ παράλληλη στην ε. 
	1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων
Τι ονομάζουμε απόσταση σημείου από ευθεία;	**Απόσταση** του σημείου **Α** από την ευθεία **ε** ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος $ΑΑ_0$ από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε**. 
Τι ονομάζουμε απόσταση παράλληλων ευθειών;	**Απόσταση** δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το **ΑΒ**. 
Εφαρμογή	**2.** *Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.* ***Λύση*** Από το σημείο **Α** φέρνουμε το κάθετο τμήμα $ΑΑ_0$ στην ευθεία **ε** και συνδέουμε το σημείο **Α** με διάφορα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$, $Α_5$, $Α_6$, $Α_7$, $Α_8$ και $Α_9$ της **ε**. Μετράμε τις αποστάσεις του **Α** από αυτά και παρατηρούμε ότι αυτές μεγαλώνουν συνεχώς όσο απομακρυνόμαστε **αριστερά** και **δεξιά** από το $Α_0$, άρα η ελάχιστη απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΑ_0$. Επομένως το $Α_0$, είναι το ζητούμενο σημείο και ονομάζεται **ίχνος** της κάθετης από το Α. 
	1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου
Τι είναι Κύκλος;	● **Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.** ● **Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κύκλου.** ◆ Ένας κύκλος με κέντρο **Ο** και ακτίνα **ρ**, συμβολίζεται με συντομία **(Ο, ρ)**. ◆ Για να σχεδιάσουμε έναν κύκλο χρησιμοποιούμε τον 
Πότε δύο κύκλοι είναι ίσοι;	▶ Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.
Τι είναι χορδή κύκλου; Τι είναι διάμετρος κύκλου;	● Το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β** του κύκλου, λέγεται **χορδή** του κύκλου.  ● Ειδικά **η χορδή** που περνάει **από το κέντρο** του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου. ▶ Η **διάμετρος** είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και **χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη** (ημικύκλια). 
Τι είναι τόξο κύκλου;	● Δύο σημεία **Α** και **Β** του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται **τόξο του κύκλου με άκρα τα Α και Β**. 
Τι είναι κυκλικός δίσκος;	● **Κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι ο κύκλος (Ο, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.** ▶ Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ. 

Κατασκευή Τριγώνου 1 **(με γνωστές πλευρές)**	*Να σχεδιαστεί ένα τρίγωνο, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του.* *Λύση* Ας υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα **α=3 cm**, **β=2 cm** και **γ=1,5 cm** είναι οι πλευρές του τριγώνου που πρέπει να σχεδιάσουμε. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Παίρνουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε πλευρά **ΒΓ = α**. Μετά χαράζουμε τους κύκλους **(Β,γ=1,5cm)** και **(Γ,β=2cm)**. Οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται στο σημείο **Α**. Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι το ζητούμενο διότι έχει πλευρές: **ΒΓ=3 cm**, **ΑΒ=1,5 cm**, ως ακτίνα του κύκλου **(Β,1,5cm)** και **ΑΓ=2 cm**, ως ακτίνα του κύκλου **(Γ,2cm)**, αφού το **Α** ανήκει και στους δύο κύκλους. 

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Συμμετρία

	2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος
Τι είναι η Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος **Και ποιες οι Ιδιότητές της;**	● **Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος** λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του. ▶ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του. ▶ Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του. ▶ Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.
	 *Κατά τον* **Ευκλείδη** *οι Κατασκευές, στηρίζονται σε* τρεις κανόνες (“αιτήματα”). • Από δύο σημεία να διέρχεται μία μόνο ευθεία. • Ένα ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα. • Ο κύκλος ορίζεται με ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα).
	Με βάση τους παραπάνω κανόνες (“αιτήματα”) μπορούν να γίνουν οι κατασκευές όλων των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση “τον κανόνα και τον διαβήτη”. (“Κανόνας” είναι ένας χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις για να χαράζουμε ευθείες και όχι για να κάνουμε μετρήσεις μηκών). Οι κατασκευές αυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδεξιότητα και γνώση, δίνουν όμως ακριβέστερα αποτελέσματα και βοηθούν να αποφεύγονται λάθη, που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούμε στην πράξη.
Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος	**1.** *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα.* *Λύση* Προσδιορίζουμε το μέσον **Μ** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** με το υποδεκάμετρο και στη συνέχεια με τον γνώμονα σχεδιάζουμε την ευθεία **ε**, που διέρχεται από το **Μ** και είναι κάθετη στο **ΑΒ**. 

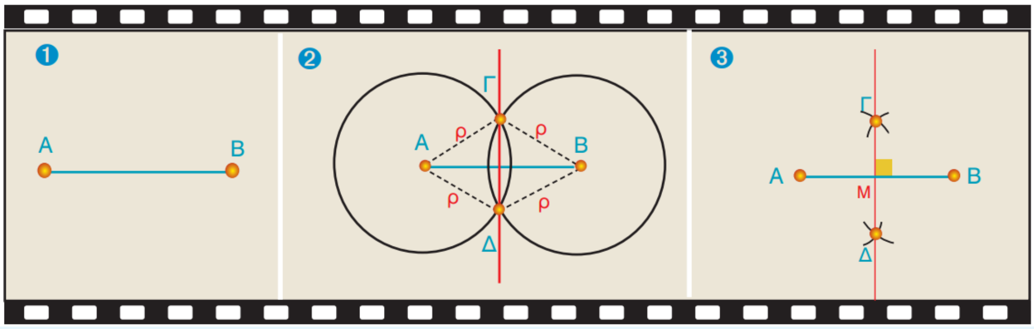
<table>
<tr>
<td>Βασική Γεωμετρική Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος (Κανόνα-Διαβήτη)</td>
<td>

2. *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα, αλλά μόνο με τη χρήση "του κανόνα και του διαβήτη".*

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετος, όπως κάθε ευθεία, ορίζεται από δύο σημεία και ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Για να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** πρέπει να βρούμε δύο σημεία που να ισαπέχουν από τα **Α** και **Β**. Γράφουμε, λοιπόν, δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα άκρα **Α** και **Β** του ευθυγράμμου τμήματος και με ακτίνα **ρ** (μεγαλύτερη από το μισό μήκος του **ΑΒ**, για να τέμνονται).
Τα σημεία **Γ** και **Δ**, στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, διότι δύο σημεία της, τα **Γ** και **Δ**, απέχουν εξίσου από τα άκρα **Α** και **Β**, αφού είναι $ΓΑ=ΓΒ=ρ$ και $ΔΑ=ΔΒ=ρ$.



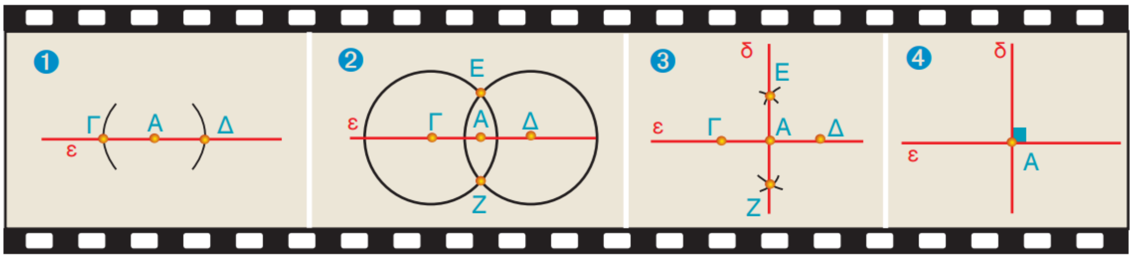
◆ Με την κατασκευή της **μεσοκαθέτου** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, βρήκαμε με ακρίβεια και το μέσο **Μ**, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Κατασκευή καθέτου σε σημείο ευθείας</td>
<td>

3. *Να κατασκευαστεί ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της Α.*

Λύση

Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και τυχαία ακτίνα, που τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** είναι μέσο του **ΓΔ**, αρκεί να φέρουμε τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το μέσο του **Α** και είναι κάθετη στην **ε**.

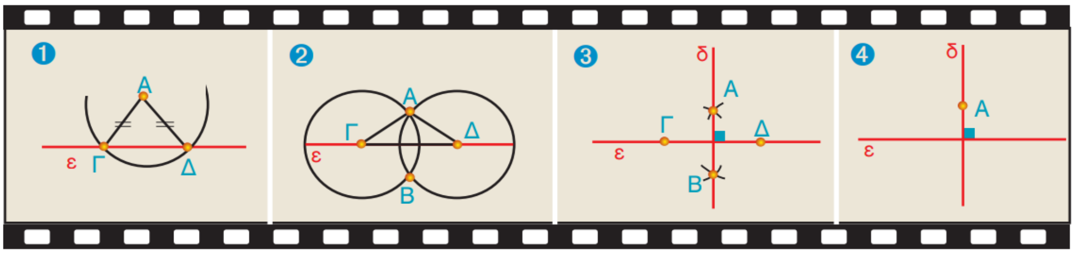


</td>
</tr>
<tr>
<td>Κατασκευή καθέτου από σημείο σε ευθεία</td>
<td>

4. *Να κατασκευαστεί η κάθετη δ μιας ευθείας ε από σημείο Α εκτός αυτής.*

Λύση

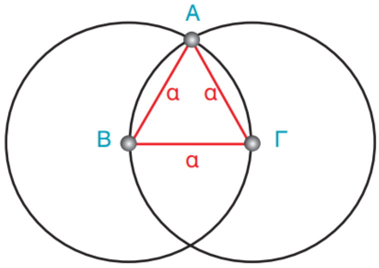
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και ακτίνα τέτοια ώστε να τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** ισαπέχει από τα **Γ** και **Δ**, θα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος **ΓΔ**. Επομένως, αρκεί να φέρουμε, με τον τρόπο που μάθαμε στην εφαρμογή 2, τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το **Α**.



</td>
</tr>
</table>

SOS
Κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου

5. *Να κατασκευαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.*



Λύση

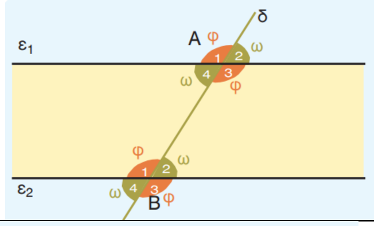
Γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ = α$.
Με κέντρα τα άκρα **Β** και **Γ** και ακτίνα ίση με **α** γράφουμε δύο κύκλους. Έστω **Α** το ένα σημείο από τα δύο που τέμνονται οι κύκλοι αυτοί.
Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι το ζητούμενο ισόπλευρο, διότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες με **α**, ως ακτίνες ίσων κύκλων ακτίνας **α**.

2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

- Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ ονομάζονται **"εντός"** (των ευθειών) και όλες οι άλλες **"εκτός"**.

  $\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ είναι "εντός" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$ είναι "εκτός"



- Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας **δ** ονομάζονται **"επί τα αυτά"** (μέρη της ευθείας).

  $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ είναι "επί τα αυτά" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_4$ είναι "επί τα αυτά"

- Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιπέπεδο της ευθείας **δ**, λέγονται μεταξύ τους **"εναλλάξ"**.

  π.χ. η $\hat{A}_4$ με την $\hat{B}_2$ είναι "εναλλάξ" αλλά και η $\hat{A}_2$ με την $\hat{B}_1$ είναι "εναλλάξ" κ.ο.κ.

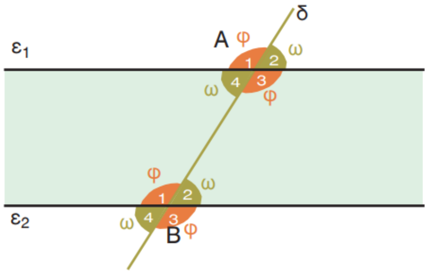
Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε τις παρακάτω έξι ονομασίες για τα 16 διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

(α) **εντός εναλλάξ** και (β) **εκτός εναλλάξ**
(γ) **εντός και επί τα αυτά** και (δ) **εκτός και επί τα αυτά**
(ε) **εντός - εκτός εναλλάξ** και (στ) **εντός - εκτός επί τα αυτά.**

Super SOS

Να συγκριθούν μεταξύ τους οι γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει μια ευθεία δ δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε (μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο) ότι οι γωνίες που σχηματίζονται και στα δύο σημεία τομής **Α** και **Β**, είναι δύο ειδών:



- Οι οξείες γωνίες $\hat{ω}$, που είναι μεταξύ τους ίσες και
- Οι αμβλείες γωνίες $\hat{φ}$, που είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **οξείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις "εντός εναλλάξ": $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$
- Από τις "εκτός εναλλάξ": $\hat{A}_2 = \hat{B}_4$
- Από τις "εντός - εκτός επί τα αυτά": $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **αμβλείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις "εντός εναλλάξ": $\hat{A}_3 = \hat{B}_1$
- Από τις "εκτός εναλλάξ": $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$
- Από τις "εντός - εκτός επί τα αυτά": $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$

Επειδή όμως οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ είναι **παραπληρωματικές**, θα ισχύει γενικά:

$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ.$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα ζευγάρια των γωνιών είναι ζευγάρια **παραπληρωματικών** γωνιών, τα οποία και είναι τα εξής:

- Οι "εντός επί τα αυτά": $\hat{A}_3 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ και $\hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180^\circ$
- Οι "εκτός επί τα αυτά": $\hat{A}_1 + \hat{B}_4 = 180^\circ$ και $\hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$
- Οι "εντός-εκτός εναλλάξ": $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ και $\hat{A}_2 + \hat{B}_1 = 180^\circ$ και $\hat{A}_3 + \hat{B}_4 = 180^\circ$ και $\hat{A}_4 + \hat{B}_3 = 180^\circ$

Βασική Άσκηση

2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι $\hat{\alpha} = 40^\circ$.*

Λύση

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 40^\circ$

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$, από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 140^\circ$.

Αλλά επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η ε_3 τέμνουσα των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι:

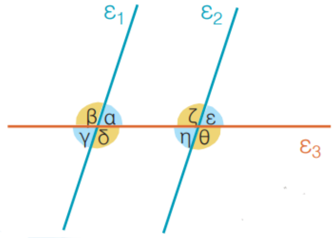
$\hat{\varepsilon} = \hat{\alpha}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{\varepsilon} = 40^\circ$

$\hat{\zeta} + \hat{\alpha} = 180^\circ$, ως εντός επί τα αυτά,

άρα: $\hat{\zeta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\hat{\eta} = \hat{\alpha}$, ως εντός εναλλάξ, επομένως: $\hat{\eta} = 40^\circ$ και

$\hat{\theta} = \hat{\delta}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{\theta} = 140^\circ$.

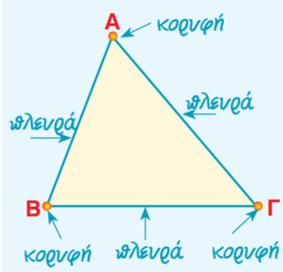


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

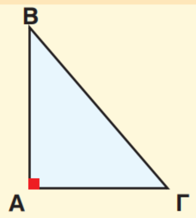
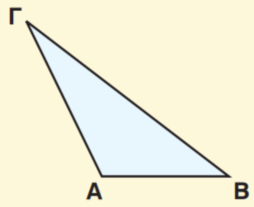
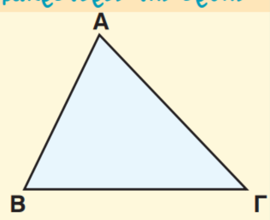
3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

Ποια είναι τα κύρια στοιχεία τριγώνου;

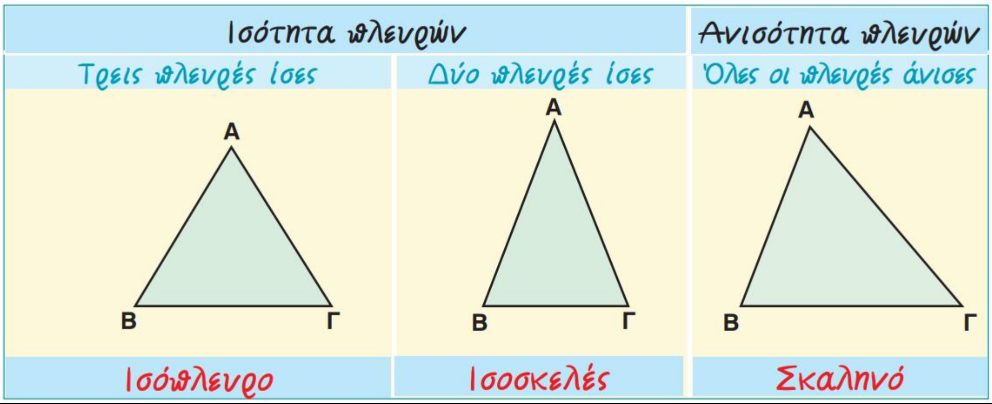
- Κάθε τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει τρεις **κορυφές Α, Β, Γ**, τρεις **πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ** και τρεις **γωνίες** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.
- Τα **ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ**, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.



Ποια είναι τα Είδη τριγώνων ως προς τις ΓΩΝΙΕΣ;

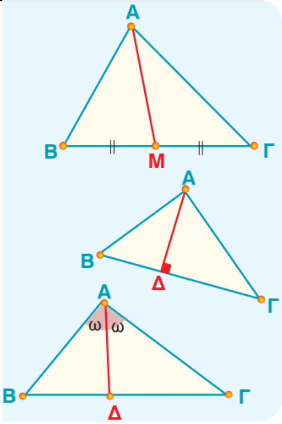
Πλευρές κάθετες	Όχι κάθετες πλευρές	
Μία γωνία ορθή	Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής	Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής
		
Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο	Οξυγώνιο

Ποια είναι τα Είδη τριγώνων ως προς τις ΠΛΕΥΡΕΣ;



Ποια είναι τα Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου;

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται **διάμεσος**.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται **ύψος** του τριγώνου.
- Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται **διχοτόμος** του τριγώνου.



Βασική Δραστηριότητα

Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των αντίστοιχων τριγώνων.

ΤΡΙΓΩΝΑ	Οξυγώνιο	Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο
Σκαληνό			
Ισοσκελές			
Ισόπλευρο			

3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Super SOS

Τι ισχύει για τις γωνίες ενός τριγώνου;

▶ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.