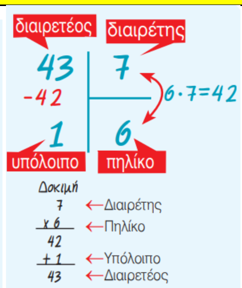
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – Οι φυσικοί αριθμοί

	1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών
Ορισμός	Το γινόμενο $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \dots\ \cdot\alpha$, που έχει **ν** παράγοντες ίσους με το **α**, λέγεται **δύναμη του α στη ν** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με **α^{ν}**. $\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$
	Ο αριθμός **α** λέγεται **βάση της δύναμης** και ο **ν** λέγεται **εκθέτης**.
	Η **δύναμη** του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το α^2, λέγεται και **τετράγωνο του α**. α^2 Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το α^3, λέγεται και **κύβος του α**. 
Ορισμός	Το α^1, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α**. $\alpha^1=\alpha$
	Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^{ν}, είναι **όλες ίσες με 1**. $1^{\nu}=1$
Τι λέγεται Αριθμητική παράσταση;	**Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
Ποια η Προτεραιότητα των πράξεων;	1. Υπολογισμός **δυνάμεων**. 2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**. 3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**. Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** με την παραπάνω σειρά. Το τελικό αποτέλεσμα που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση το λέμε **τιμή** της.
Δυνάμεις του 10	*Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;* *ση* $10^2 = 10\cdot 10 = 100$ $10^3 = 10\cdot 10\cdot 10 = 100\cdot 10 = 1.000$ $10^4 = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 1.000\cdot 10 = 10.000$ $10^5 = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10.000\cdot 10 = 100.000$ $10^6 = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 100.000\cdot 10 = 1.000.000$ Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις δυνάμεις του 10, που υπολογίστηκαν, έχει τόσα μηδενικά όσος είναι και ο εκθέτης της δύναμης. Για παράδειγμα: $10^6 = 1.000.000$ *(έξι μηδενικά)*.
Ανάπτυγμα αριθμού σε δυνάμεις του 10	*Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 7.604 με χρήση των δυνάμεων του 10.* Είναι: $7.604 = 7$ χιλιάδες $+ 6$ εκατοντάδες $+ 0$ δεκάδες $+ 4$ μονάδες $= 7\cdot 1000 + 6\cdot 100 + 0\cdot 10 + 4\cdot 1 =$ $= 7\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 4$ Η μορφή αυτή $7\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 4$ του αριθμού 7.604 είναι **το ανάπτυγμα του αριθμού σε δυνάμεις του 10**.
	1.4. Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα
Τι γνωρίζεται για την Ευκλείδεια Διαίρεση;	Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon}$ Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ** **υπόλοιπο** της διαίρεσης. 
	Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{\upsilon < \delta}$

Πότε η Διαίρεση λέγεται Τέλεια;	Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση**: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$
	Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη του πολλαπλασιασμού**, δηλαδή: αν $\Delta = \delta \cdot \pi$ τότε $\Delta : \delta = \pi$ ή $\Delta : \pi = \delta$.
	Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι **0**. $\delta \neq 0$
SOS 1	Όταν $\Delta = \delta$, τότε το πηλίκο $\pi = 1$. | $\alpha : \alpha = 1$
SOS 2	Όταν ο διαιρέτης $\delta = 1$, τότε το πηλίκο $\pi = \Delta$. | $\alpha : 1 = \alpha$
SOS 3	Όταν ο διαιρετέος $\Delta = 0$, τότε το πηλίκο $\pi = 0$. | $0 : \alpha = 0$
	1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
Τι είναι τα Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;	**Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς. $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots$
	▶ Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του. ▶ Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του. ▶ Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)	Το μικρότερο (≠0) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών (≠0) το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
Τι είναι οι Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού;	**Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
Πότε ένας αριθμός λέγεται Πρώτος και πότε Σύνθετος;	Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)	Δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των **α** και **β** και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β)**.
SOS **Ποιοι αριθμοί λέγονται Πρώτοι μεταξύ τους;**	Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1**.

Παράδειγμα

1. *Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;*

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
Πολλαπλάσια του 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

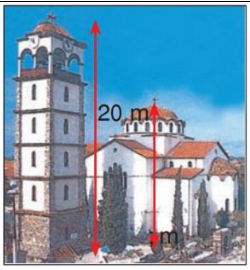
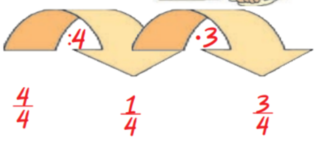
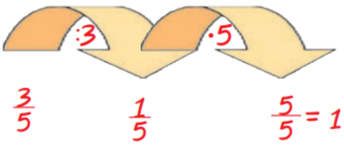
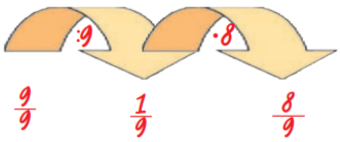
Οι αριθμοί **0, 12, 24, 36**, ... είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών **3** και **4**. Επειδή, το μικρότερο (≠0) από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το **12**, γράφουμε: ΕΚΠ(3, 4) = 12.
Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

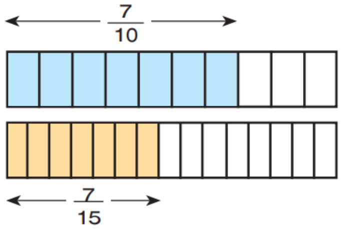
Τι είναι Κριτήρια Διαιρετότητας;	**Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.
SOS **Πότε ένας αριθμός διαιρείται με το** **10** **2** **5** **3 ή 9** **4 ή 25;**	▶ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε **ένα μηδενικό**. ▶ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8. ▶ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**. ▶ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα. ▶ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι μηδέν.

Super SOS	*Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.*
Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων **Εύρεση ΕΚΠ-ΜΚΔ**	Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ. 2520 | 2 διαιρώ με το 2 1260 | 2 » 630 | 2 » 315 | 3 διαιρώ με το 3 105 | 3 » 35 | 5 διαιρώ με το 5 7 | 7 διαιρώ με το 7 1 | 2940 | 2 διαιρώ με το 2 1470 | 2 » 735 | 3 διαιρώ με το 3 245 | 5 διαιρώ με το 5 49 | 7 διαιρώ με το 7 7 | 7 » 1 | 3780 | 2 διαιρώ με το 2 1890 | 2 » 945 | 3 διαιρώ με το 3 315 | 3 » 105 | 3 » 35 | 5 διαιρώ με το 5 7 | 7 διαιρώ με το 7 1 | $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ ΜΚΔ(2520, 2940, 3780) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ και ΕΚΠ(2520, 2940, 3780) $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Τα Κλάσματα

	2.1. Η έννοια του κλάσματος
Τι σημαίνει η λέξη κλάσμα;	Η λέξη "κλάσμα" προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη "κλάω" ή "κλω" που σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα λοιπόν δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι, δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα Μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται, μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το "κλάσμα" πρέπει να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε το ολόκληρο (τον "όλον") και πόσα από αυτά πήραμε. Κλάσμα: $\dfrac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}} : \dfrac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$ (παρονομαστής όχι μηδέν)
Τι είναι κλασματική μονάδα;	Το σύμβολο $\frac{1}{\nu}$ (ν φυσικός, $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα ν ίσα μέρη, στα οποία χωρίζεται μία ποσότητα, ονομάζεται **κλασματική μονάδα**.
Τι ονομάζεται Κλάσμα;	**Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. αριθμητής → 2 κλασματική γραμμή → — παρονομαστής → 3 όροι του κλάσματος
Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$;	Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ν ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μία ποσότητα. Γενικά: $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa \cdot \frac{1}{\nu}$, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.
Ποια πράξη παριστάνει το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$;	Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Γενικά ισχύει $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$. $\frac{3}{8} = 3 : 8$
SOS	Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί $\kappa = \kappa : 1 = \frac{\kappa}{1}$. $6 = \frac{6}{1}$, $15 = \frac{15}{1}$, $21 = \frac{21}{1}$
Καταχρηστικό Κλάσμα	Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1. Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

Παράδειγμα 1	**1.** *Το καμπαναριό μιας εκκλησίας έχει ύψος 20 m, ενώ η εκκλησία έχει ύψος τα $\frac{3}{5}$ του ύψους του καμπαναριού.* *Ποιο είναι το ύψος της εκκλησίας;*  **Λύση** Όλο το ύψος του καμπαναριού, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$, είναι $20 m$, επομένως το $\frac{1}{5}$ αυτού θα είναι $\frac{1}{5} \cdot 20\ cm = \frac{20}{5}\ m = 4m$. Τότε τα $\frac{3}{5}$ θα είναι $3 \cdot 4\ m = 12\ m$. Άρα το ύψος της εκκλησίας θα είναι $12\ m$.
Παράδειγμα 2	**2.** *Μια δεξαμενή πετρελαίου σε μια πολυκατοικία, χωράει 2000 lt. Ο διαχειριστής σε μια μέτρηση βρήκε ότι ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{4}$. Πόσα λίτρα πετρέλαιο είχε η δεξαμενή;*  **Λύση** Η δεξαμενή ολόκληρη είναι τα $\frac{4}{4}$ και χωράει 2000 lt.  Το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής θα χωράει $\frac{1}{4} \cdot 2.000\ lt = \frac{2000}{4}\ lt = 500\ lt$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα $\frac{3}{4}$ θα περιέχουν $3 \cdot 500\ lt = 1500\ lt$.
Αναγωγή στη μονάδα	Ο παραπάνω τρόπος λύσης ονομάζεται **αναγωγή στη μονάδα** και μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που είναι γνωστή η τιμή του όλου και ζητείται του μέρους. Άλλος τρόπος λύσης είναι ο πολλαπλασιασμός του αριθμού που εκφράζει το μέρος επί τον αριθμό που εκφράζει το όλον (π.χ. $\frac{3}{4} \cdot 2.000\ lt = 1.500\ lt$).
Παράδειγμα 3	**3.** *Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ενός μπαχαρικού κοστίζουν 27 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού;* **Λύση** Τα $\frac{3}{5}$ κοστίζουν 27 €. Άρα το $\frac{1}{5}$ κοστίζει $27 €: 3 = 9 €$. Τα $\frac{5}{5}$ κοστίζουν $5 \cdot 9 € = 45 €$.  ◆ Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας (αναγωγή στη μονάδα). Τα $\frac{9}{9}$ κοστίζουν 45€. Άρα το $\frac{1}{9}$ κοστίζει $\frac{45}{9} € = 5 €$. Έτσι τα $\frac{8}{9}$ κοστίζουν $8 \cdot 5 € = 40 €$. Διότι είναι: $1 = \frac{5}{5} = \frac{9}{9} = \ldots$ 
	2.2. Ισοδύναμα κλάσματα
Ποια κλάσματα λέγονται Ισοδύναμα ή ίσα;	Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ $\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ ισοδύναμα δηλαδή: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$
Η ιδιότητα «Χιαστί»	**Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα "χιαστί γινόμενα" $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα και αντιστρόφως.** Δηλαδή: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ και αντιστρόφως. $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ τότε: $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$ $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ γιατί: $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Μετατροπή Ισοδύναμου κλάσματος	Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο. $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$
Super SOS **Απλοποίηση κλάσματος**	Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο. $\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$
Ποιο κλάσμα λέγεται Ανάγωγο;	Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή εκτός από τη μονάδα) λέγεται **ανάγωγο**. $\frac{7}{12}$ ανάγωγο αφού ΜΚΔ(7, 12)=1
Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα και ποια ετερώνυμα;	Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**. $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$ ομώνυμα $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{3}$ ετερώνυμα
	2.3. Σύγκριση κλασμάτων
Πως συγκρίνω ομώνυμα κλάσματα;	Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο. $\frac{9}{13}>\frac{5}{13}$
Πως συγκρίνω ετερώνυμα κλάσματα;	Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους. $\frac{7}{12}=\frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$ Άρα: $\frac{7}{12}>\frac{5}{16}$
Πως συγκρίνω κλάσματα με ίδιο αριθμητή;	Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή. $\frac{13}{9}<\frac{13}{5}$
Παράδειγμα 1	**1.** *Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$.*  **Λύση** Από το σχήμα παρατηρούμε ότι "σε όσα περισσότερα μέρη χωρίζεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος, τόσο μικρότερα είναι τα μέρη αυτά". Δηλαδή: $\frac{1}{15}<\frac{1}{10}$ και $\frac{7}{15}<\frac{7}{10}$. 
Παράδειγμα 2	**2.** *Να συγκριθούν τα κλάσματα: $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$.* **Λύση** Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. ΕΚΠ(8, 9)=72, επομένως $72:8=9$ και $72:9=8$ οπότε $\frac{^{9)}5}{8}=\frac{45}{72}$ και $\frac{^{8)}4}{9}=\frac{32}{72}$. Άρα $\frac{5}{8}>\frac{4}{9}$.
	2.4. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων
Πως προσθέτω ομώνυμα κλάσματα;	Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ $\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\frac{9}{5}$
Πως προσθέτω ετερώνυμα κλάσματα;	Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}+\frac{2}{3}=\frac{21}{12}+\frac{8}{12}=\frac{29}{12}$
Πως αφαιρώ ομώνυμα κλάσματα;	Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$ $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$
Πως αφαιρώ ετερώνυμα κλάσματα;	Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13}{12}$
SOS	Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών στα κλάσματα.
Τι ονομάζεται Μεικτός Αριθμός;	Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1+\frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$. Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

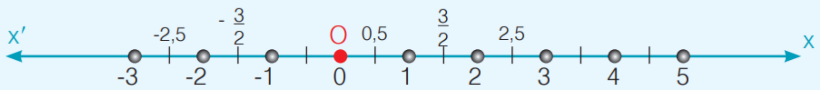
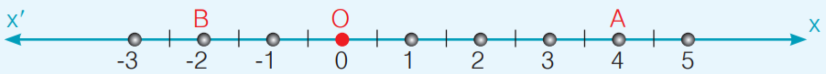
Super SOS **Βασική εφαρμογή** **Διάσπαση κλάσματος**	**2.** *Να αποδειχθεί ότι: (α)* $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ *και (β)* $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$. **Λύση** (α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ (β) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$
	2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
Πως πολλαπλασιάζω κλάσματα;	Το γινόμενο **δύο κλασμάτων είναι το** κλάσμα που έχει αριθμητή το **γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή το **γινόμενο των παρονομαστών**. $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot5}{7\cdot4}=\frac{15}{28}$
Super SOS **Πως πολλαπλασιάζω φυσικό αριθμό με κλάσμα;**	Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού** επί ένα **κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή το **γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό** και με τον ίδιο παρονομαστή. $\lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lambda=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta}$ $7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot3}{5}=\frac{21}{5}$
Τι είναι τα Αντίστροφα κλάσματα;	Δύο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα** όταν έχουν **γινόμενο 1**. Επειδή $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι **αντίστροφα**. $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{7\cdot5}{5\cdot7}=\frac{35}{35}=1$
SOS	Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.
Super SOS	**1.** *Να βρεθεί το γινόμενο:* $\frac{3}{7}\cdot\frac{70}{6}\cdot\frac{8}{5}$. **Λύση**
ΟΧΙ **με αυτόν τον τρόπο**	$\frac{3}{7}\cdot\frac{70}{6}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3\cdot70\cdot8}{7\cdot6\cdot5}=\frac{3\cdot560}{7\cdot30}=\frac{1680}{210}=8$
Επιμένουμε στην απλοποίηση	$\frac{\cancel{3}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{70}}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{6}}}\cdot\frac{8}{\cancel{5}}=8$
	2.6. Διαίρεση κλασμάτων
Πως διαιρώ φυσικούς αριθμούς;	Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ $5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
Πως διαιρώ κλάσματα;	Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$ $\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot4}{3\cdot5}=\frac{28}{15}$
Τι είναι Σύνθετο Κλάσμα;	*Μετατροπή σύνθετου σε απλό* Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**. $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7\cdot4}{3\cdot5}=\frac{28}{15}$ *διότι* $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{15}$
Παράδειγμα	**1.** *Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα: (α)* $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}$, *(β)* $\frac{4}{\frac{9}{8}}$, *(γ)* $\frac{\frac{7}{10}}{5}$. **Λύση** (α) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}=\frac{2\cdot9}{3\cdot10}=\frac{2\cdot3\cdot3}{3\cdot2\cdot5}=\frac{3}{5}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{9}{8}}=\frac{4\cdot8}{1\cdot9}=\frac{32}{9}=3\frac{5}{9}$, (γ) $\frac{\frac{7}{10}}{5}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{5}{1}}=\frac{7\cdot1}{10\cdot5}=\frac{7}{50}$

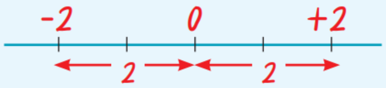
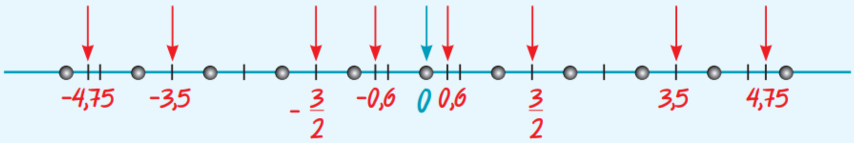
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο – Ποσοστά

	5.1. Ποσοστά
Τι είναι το ποσοστό επί τοις εκατό;	Το σύμβολο **α%** ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{100}$.
Τι είναι το ποσοστό επί τοις χιλίοις;	Χρησιμοποιούμε ακόμη το ποσοστό **α ‰** που διαβάζεται **ποσοστό επί τοις χιλίοις** και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$.
SOS	Το ποσοστό α% του β είναι $\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$
SOS	Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.
Παράδειγμα 1	**1.** *Να γραφούν, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:* *(α)* $\frac{4}{5}$, *(β)* $\frac{3}{8}$, *(γ)* $\frac{84}{91}$ *με στρογγυλοποίηση στο εκατοστό.*  **Λύση** (α) $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} = 80\%$, (β) $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 12{,}5}{8 \cdot 12{,}5} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$, (γ) $\frac{84}{91} = 0{,}92 = \frac{92}{100} = 92\%$.
Παράδειγμα 2	**2.** *Να γραφούν, ως κλάσματα, τα ακόλουθα ποσοστά: (α) 12%, (β) 73%, (γ) 32,5%.* **Λύση** (α) $12\% = \frac{12}{100} = \frac{12:4}{100:4} = \frac{3}{25}$, (β) $73\% = \frac{73}{100}$, (γ) $32{,}5\% = \frac{32{,}5}{100} = \frac{325}{1000} = \frac{13}{40}$
	5.2. Προβλήματα με ποσοστά
Παράδειγμα 1	*Ένας ηλεκτρολόγος είχε έσοδα 2.856 € το δεύτερο τρίμηνο του έτους. Πόσα χρήματα πρέπει να αποδώσει στο κράτος, αν ο Φ.Π.Α. που παρακρατά από τους πελάτες του είναι 19%;* Το ποσό Φ.Π.Α. έχει παρακρατηθεί από τον ηλεκτρολόγο, αφού κάθε πελάτης του έχει επιβαρυνθεί με 19%, επί της αξίας της εργασίας του ηλεκτρολόγου. Έτσι για εργασία 100 € ο πελάτης έχει πληρώσει 119 €, δηλαδή ο ηλεκτρολόγος σε έσοδα 119 € οφείλει στο κράτος 19 €, δηλαδή τα $\frac{19}{119}$ των εσόδων. Οφειλόμενος ΦΠΑ = Έσοδα $\cdot \frac{19}{119} = 2856 \cdot \frac{19}{119} = 456$ €
Παράδειγμα 2	*Στην περίοδο των εκπτώσεων, ένα κατάστημα έκανε έκπτωση 35% στα είδη ρουχισμού και 15% στα παπούτσια. Πόσο θα πληρώσουμε για ένα πουκάμισο και ένα ζευγάρι παπούτσια που κόστιζαν 58 € και 170 €, αντίστοιχα, πριν τις εκπτώσεις.* Η τιμή κάθε είδους υπολογίζεται από τη σχέση: **Τιμή μετά την έκπτωση = Τιμή πριν την έκπτωση - Ποσό έκπτωσης.** Για το πουκάμισο έχουμε ποσό έκπτωσης: $35\% \cdot 58$ € $= \frac{35}{100} \cdot 58$ € $= 20{,}30$ €. Η τιμή του πουκάμισου μετά την έκπτωση είναι: 58 € $- 20{,}30$ € $= 37{,}70$ €. Για τα παπούτσια έχουμε ποσό έκπτωσης: $15\% \cdot 170$ € $= \frac{15}{100} \cdot 170$ € $= 25{,}50$ €. Η τιμή των παπουτσιών μετά την έκπτωση είναι: 170 € $- 25{,}50$ € $= 144{,}50$ €. Και για τα δύο μαζί θα πληρώσουμε: $37{,}70$ € $+ 144{,}50$ € $= 182{,}20$ €.
Παράδειγμα 3	*Ποσό 1.000 € κατατέθηκε σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 5%. Πόσος είναι ο τόκος που θα αποδώσει το κεφάλαιο αυτό, μετά από 18 μήνες, αν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο κάθε χρόνο;*

	Γνωρίζουμε ότι: Τόκος = Κεφάλαιο · Επιτόκιο Άρα: Τόκος α' έτους είναι: $1000\ € \cdot 5\% = 1000\ € \cdot \frac{5}{100} = 50\ €$ Στο τέλος των 12 μηνών το κεφάλαιο θα γίνει: $1000\ € + 50\ € = 1050\ €$ Ο τόκος στους επόμενους 6 μήνες θα είναι τα $\frac{6}{12}$ του ετήσιου τόκου, δηλαδή: $1050\ € \cdot 5\% \cdot \frac{6}{12} = 1050\ € \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{6}{12} = 26{,}25\ €$ Ο συνολικός τόκος που απέδωσαν τα 1.000 € για 18 μήνες είναι: 50€+26,25€=76,25€.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο – Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

	7.1. Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου
Πρόσημα	Τα σύμβολα «+» και «−» λέγονται **πρόσημα**. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**. $+3,\ +\frac{3}{4},\ +15{,}7$ και $+0{,}352$ θετικοί αριθμοί $-2,\ -10,\ -28{,}95$ και $-0{,}098$ αρνητικοί αριθμοί
	Οι αριθμοί που συναντήσαμε μέχρι τώρα ήταν μόνο θετικοί και επομένως δεν υπήρχε ανάγκη να χρησιμοποιούμε πρόσημο. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη της τοποθέτησης πρόσημου μπροστά από όλους τους αριθμούς. Έτσι γίνεται φανερό ποιοι αριθμοί είναι οι **θετικοί** και ποιοι οι **αρνητικοί**. Σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς, μπορούμε να παραλείπουμε το πρόσημο + π.χ. αντί να γράφουμε +7 παραλείπουμε το + και γράφουμε 7.
	Το **μηδέν** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
Ποιοι αριθμοί λέγονται Ομόσημοι;	**Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **το ίδιο πρόσημο**. π.χ. οι αριθμοί $-7,\ -0{,}58$ και $-\frac{3}{4}$ είναι ομόσημοι και οι αριθμοί $+1{,}25,\ +\frac{10}{7}$ και $+5$ είναι ομόσημοι.
Ποιοι αριθμοί λέγονται ετερόσημοι;	**Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο**. Οι αριθμοί -7 και $+0{,}58$ είναι ετερόσημοι αλλά και οι αριθμοί $-1{,}25$ και $+\frac{10}{7}$ είναι ετερόσημοι.
Ποιοι αριθμοί είναι οι Ακέραιοι;	**Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι **φυσικοί** αριθμοί μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς** αριθμούς. ..., $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$, ...
Ποιοι αριθμοί είναι οι Ρητοί;	**Ρητοί** αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: **φυσικοί**, **κλάσματα** και **δεκαδικοί** μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς**.
Ποια είναι η Παράσταση των Ρητών αριθμών;	Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής **Ο** του ημιάξονα **Οx** των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα **Οx'**, μπορούμε να παραστήσουμε τους αρνητικούς αριθμούς σε συμμετρικά σημεία, ως προς **Ο**, των αντιστοίχων σημείων που παριστάνουν τους θετικούς αριθμούς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε σημεία που να παριστάνουν κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς. 
	Η θέση ενός σημείου **Α** επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται **τετμημένη του σημείου**.  Το σημείο **Α** έχει τετμημένη **4** και το σημείο **Β** έχει τετμημένη **–2**.
	7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

Τι είναι η Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού;	Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού **α** εκφράζει την **απόσταση του σημείου με τετμημένη α** από την αρχή **Ο** του άξονα και συμβολίζεται με |α|.
Ποιοι αριθμοί ονομάζονται Αντίθετοι;	**Αντίθετοι** ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι **ετερόσημοι** και έχουν την **ίδια απόλυτη τιμή**.  $\|-2\| = \|+2\| = 2$
SOS **Τι παριστάνει ο –x;**	Ο αντίθετος του **x** είναι ο **–x**. ο αντίθετος του +5,1 είναι ο -5,1 ο αντίθετος του -2,7 είναι ο -(-2,7)=+2,7
Τι ισχύει για την απόλυτη τιμή |α|;	▶ Η **απόλυτη τιμή** ενός **θετικού αριθμού** είναι ο **ίδιος ο αριθμός**. π.χ. $\|+9,63\| = 9,63$ ▶ Η **απόλυτη τιμή** ενός **αρνητικού αριθμού** είναι ο **αντίθετός του**. π.χ. $\|-8,4\| = 8,4 = -(-8,4)$ ▶ **Η απόλυτη τιμή του μηδενός** είναι το **μηδέν**. π.χ. $\|0\| = 0$
	Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα. 
	Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό. $-4,75 < -3,5 < -\frac{3}{2} < -0,6 < 0 < 0,6 < +\frac{3}{2} < +3,5 < +4,75$
	Το **μηδέν** είναι **μικρότερο** από κάθε θετικό αριθμό και **μεγαλύτερο** από κάθε αρνητικό αριθμό. π.χ. $0<2,9$ και $-3,8<0$
Πως συγκρίνω θετικούς ρητούς;	Ο **μεγαλύτερος** από δύο **θετικούς ρητούς** είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα. $+2,67 < +5,89$ διότι $\|2,67\| < \|5,89\|$
Πως συγκρίνω αρνητικούς ρητούς;	Ο **μεγαλύτερος** από δύο **αρνητικούς ρητούς** είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα. $-6,8 < -3,7$ διότι $\|-6,8\| = 6,8 > 3,7 = \|-3,7\|$
	7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών
Πως προσθέτουμε ομόσημους αριθμούς;	Για να **προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς** αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους. $(+8,5) + (+6,2) = +14,7$ $(-8,5) + (-6,2) = -14,7$
Πως προσθέτουμε ετερόσημους αριθμούς;	Για να **προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς** αριθμούς, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. $(+8,5) + (-6,2) = +2,3$ $(-8,5) + (+6,2) = -2,3$
Ποια είναι η Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης;	Αντιμεταθετική ιδιότητα (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος) $\boxed{α + β = β + α}$ $(+1,5) + (-2,3) = -0,8$ $(-2,3) + (+1,5) = -0,8$
Ποια είναι η Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης;	Προσεταιριστική ιδιότητα $\boxed{α + (β+γ) = (α+β) + γ}$ $(-1,4) + [(+2,7) + (-3,1)] = (-1,4) + (-0,4) = -1,8$ $[(-1,4) + (+2,7)] + (-3,1) = (+1,3) + (-3,1) = -1,8$
Ποιο είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης;	Το άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν ισούται με τον **ίδιο τον ρητό**. $\boxed{α + 0 = 0 + α = α}$ $(+1,5) + 0 = +1,5$ $0 + (-2,3) = -2,3$

<table>
<tr>
<td>Ποιο είναι το συμμετρικό στοιχείο της πρόσθεσης;</td>
<td>
Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

$\boxed{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0}$

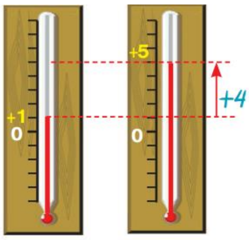
$(+\frac{9}{4}) + (-\frac{9}{4}) = 0$ ή

$(-\frac{9}{4}) + (+\frac{9}{4}) = 0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Βασικό Παράδειγμα</td>
<td>
1. Σε μια πόλη παρατηρήθηκαν οι παρακάτω αυξομειώσεις της θερμοκρασίας:

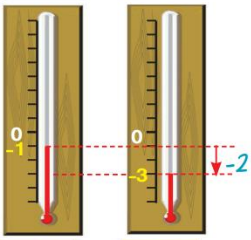
<u>Αρχικές θερμοκρασίες</u> — <u>Αυξομειώσεις θερμοκρασίας</u>
(α) Βράδυ $+1^\circ C$ — την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά $4^\circ C$
(β) Μεσημέρι $-1^\circ C$ — το βράδυ μειώθηκε κατά $2^\circ C$
(γ) Βράδυ $-2^\circ C$ — την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά $5^\circ C$
(δ) Μεσημέρι $+5^\circ C$ — το βράδυ μειώθηκε κατά $7^\circ C$
(ε) Μεσημέρι $-3^\circ C$ — το βράδυ μειώθηκε κατά $3^\circ C$

Ποια ήταν η τελική θερμοκρασία σε κάθε περίπτωση;

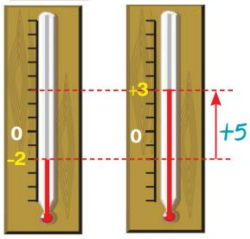
Λύση



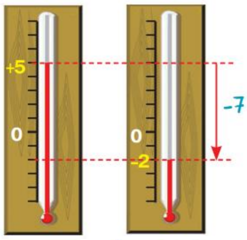
(α) Την επομένη ημέρα η θερμοκρασία έχει αυξηθεί κατά $4^\circ C$, δηλαδή έχει μεταβληθεί κατά $+4^\circ C$.
Η θερμοκρασία θα είναι $5^\circ C$ πάνω από το μηδέν, διότι:
$(+1) + (+4) = +5$



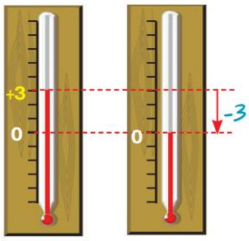
(β) Από $-1^\circ C$ η θερμοκρασία μειώθηκε κατά $2^\circ C$, άρα μεταβλήθηκε κατά $-2^\circ C$.
Η νέα θερμοκρασία είναι $-3^\circ C$, διότι έχουμε:
$(-1) + (-2) = -3$



(γ) Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία από $-2^\circ C$, αυξήθηκε κατά $5^\circ C$, δηλαδή έχουμε μια μεταβολή $+5^\circ C$.
Η θερμοκρασία έφτασε στους $+3^\circ C$, διότι:
$(-2) + (+5) = +3$



(δ) Η αρχική θερμοκρασία ήταν $+5^\circ C$ και μειώθηκε κατά $7^\circ C$, δηλαδή έχουμε μια μεταβολή κατά $-7^\circ C$.
Η θερμοκρασία έγινε, τελικά $-2^\circ C$, διότι:
$(+5) + (-7) = -2$



(ε) Από $3^\circ C$ η θερμοκρασία μειώθηκε κατά $3^\circ C$, δηλαδή μεταβλήθηκε κατά $-3^\circ C$.
Η θερμοκρασία έγινε τελικά $0^\circ C$, διότι:
$(+3) + (-3) = 0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Παράδειγμα</td>
<td>
2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
(α) $(+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4)$ και
(β) $(-1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (-4,8) + (-3,4) + (+1,5)$.

Λύση

(α) $(+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4) =$
$= (+5,6) + (+8,7) + (+3,2) + (-3,2) + (-6,9) + (-7,4) =$
(χωρίζουμε τους αρνητικούς από τους θετικούς)

$= (+17,5) + (-17,5) = 0$
(προσθέτουμε χωριστά τους αρνητικούς και τους θετικούς)
</td>
</tr>
</table>

	(β) $(-1{,}8) + (+4{,}8) + (+9{,}7) + (-4{,}8) + (-3{,}4) + (+1{,}5) =$ $= (-1{,}8) + (-4{,}8) + (-3{,}4) + (+4{,}8) + (+9{,}7) + (+1{,}5) =$ $= (-10) + (+16) = +6$
	7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών
Πως αφαιρούμε αριθμούς;	Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό **α** τον αριθμό **β**, **προσθέτουμε** στον **α** τον **αντίθετο** του **β**. $\boxed{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$ $(+8{,}5) - (+6{,}2) = (+8{,}5) + (-6{,}2) =$ $= 8{,}5 - 6{,}2 = 2{,}3$ $(+8{,}5) - (-6{,}2) = (+8{,}5) + (+6{,}2) =$ $= 8{,}5 + 6{,}2 = 14{,}7$
	Στους ρητούς αριθμούς **η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση** και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).
Πως γίνεται η Απαλοιφή Παρενθέσεων;	◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους. $(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$ $(9{,}1-6{,}2+3{,}4) + (-7{,}5+10-8{,}3) =$ $= 9{,}1-6{,}2 + 3{,}4-7{,}5 + 10-8{,}3$ ◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το –, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το – και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα. $(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$ $-(9{,}1-6{,}2+3{,}4)-(-7{,}5+10-8{,}3) =$ $= -9{,}1+6{,}2-3{,}4+7{,}5-10+8{,}3$
Βασικό Παράδειγμα	**3.** *Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $x + (+3) = (-9)$, (β) $(-8) - x = +7$.* **Λύση** (α) Αν είναι: $x + (+3) = (-9)$ τότε $x = (-9) - (+3)$ ή $x = (-9) + (-3)$ ή $x = (-12)$. Δηλαδή, $x = -12$. (β) Εφ' όσον $(-8) - x = +7$ θα ισχύει ότι: $(-8) = (+7) + x$ και επίσης: $x = (-8) - (+7)$ ή $x = (-8) + (-7)$ δηλαδή $x = -15$.
Παράδειγμα	**4.** *Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $-13 - (0{,}38 - 11 - 13) + (0{,}38 - 11)$.* **Λύση** Έχουμε: $-13 - (0{,}38 - 11 - 13) + (0{,}38 - 11) =$ $= -13 - 0{,}38 + 11 + 13 + 0{,}38 - 11 =$ $= -13 + 13 - 0{,}38 + 0{,}38 - 11 + 11 =$ $= 0 + 0 + 0 = 0$.
	7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών
Τι ισχύει για το γινόμενο ρητών αριθμών;	► Το γινόμενο δύο **θετικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός. ► Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** ρητού είναι **αρνητικός** ρητός.

	Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων. $(-10)\cdot(+9) = -90$ $(-10)\cdot(+8) = -80$ Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το -10, και ο άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά. $(-10)\cdot(+7) = -70$ $(-10)\cdot(+6) = -60$ $(-10)\cdot(+5) = -50$ $(-10)\cdot(+4) = -40$ Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10. $(-10)\cdot(+3) = -30$ $(-10)\cdot(+2) = -20$ Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι: $(-10)\cdot(+1) = -10$ $(-10)\cdot 0 = 0$ $(-10)\cdot(-1) =$; $(-10)\cdot(-1) = +10 = +(10\cdot 1)$ $(-10)\cdot(-2) =$; $(-10)\cdot(-2) = +20 = +(10\cdot 2)$ $(-10)\cdot(-3) =$; $(-10)\cdot(-3) = +30 = +(10\cdot 3)$ $(-10)\cdot(-4) =$; $(-10)\cdot(-4) = +40 = +(10\cdot 4)$ .... Διαπιστώνουμε επομένως ότι: ▶ Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων είναι **θετικός** ακέραιος. Γενικότερα: ▶ Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.
Πως προσθέτουμε ομόσημους αριθμούς;	Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+». Δηλαδή: $+\cdot+=+$ και $-\cdot-=+$ $(+1{,}5)\cdot(+2{,}2) = (+3{,}3)$ $(-1{,}5)\cdot(-2{,}2) = (+3{,}3)$
Πως προσθέτουμε ετερόσημους αριθμούς;	Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «−». Δηλαδή: $+\cdot-=-$ και $-\cdot+=-$ $(+1{,}5)\cdot(-2{,}2) = (-3{,}3)$ $(-1{,}5)\cdot(+2{,}2) = (-3{,}3)$
Ποια είναι η Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού;	**Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου) $\boxed{\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha}$ $(+1{,}5)\cdot(-2{,}2) = -3{,}3$ $(-2{,}2)\cdot(+1{,}5) = -3{,}3$
Ποια είναι η Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμου;	**Προσεταιριστική ιδιότητα** $\boxed{\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma}$ $(-0{,}5)\cdot[(+2{,}2)\cdot(-3{,}5)] = (-0{,}5)\cdot(-7{,}7) = +3{,}85$ $[(-0{,}5)\cdot(+2{,}2)]\cdot(-3{,}5) = (-1{,}1)\cdot(-3{,}5) = +3{,}85$
Ποιο είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμου;	Το **γινόμενο ενός ρητού αριθμού** με τη **μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό**. $\boxed{1\cdot\alpha = \alpha\cdot 1 = \alpha}$ $1\cdot(+1{,}5) = (+1{,}5)\cdot 1 = +1{,}5$ $1\cdot(-2{,}2) = (-2{,}2)\cdot 1 = -2{,}2$
Ποια είναι η επιμεριστική ιδιότητα;	**Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση: $\boxed{\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}$ και $\boxed{\alpha\cdot(\beta-\gamma) = \alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma}$ $0{,}15\cdot(-5) + 1{,}85\cdot(-5) =$ $(-0{,}75) + (-9{,}25) = -10$ ή $(0{,}15+1{,}85)\cdot(-5) = 2\cdot(-5) = -10$
Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;	Οι ρητοί αριθμοί **α** και **β** λέγονται **αντίστροφοι**, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα: $\boxed{\alpha\cdot\beta = 1}$ Ο καθένας από τους **α** και **β** είναι αντίστροφος του άλλου. $(+3)\cdot(+\frac{1}{3}) = +(3\cdot\frac{1}{3}) = 1$ $(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{3}{2}) = +(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}) = 1$
Ποιο είναι το απορροφητικό στοιχείο;	Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν. $\boxed{0\cdot\alpha = \alpha\cdot 0 = 0}$ $(-0{,}25)\cdot(-4) = +(0{,}25\cdot 4) = 1$ $(-1{,}3)\cdot 0 = 0$ ή $0\cdot(+\frac{2}{3}) = 0$

Πως υπολογίζουμε το Γινόμενο πολλών παραγόντων;	◆ Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε: • Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** *(ζυγό)*. • Το πρόσημο –, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** *(μονό)*. ◆ Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.
	Το σημείο του πολλαπλασιασμού «•» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.
Διπλή Επιμεριστική	*Να δειχθεί ότι:* $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$. Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta)\gamma+(\alpha+\beta)\delta = \alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$
	7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών
Πως διαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;	Για να **διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς**, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε: ▶ το πρόσημο +, αν είναι **ομόσημοι**. Δηλαδή: $+ : + = +$ και $- : - = +$ ▶ το πρόσημο –, αν είναι **ετερόσημοι**. Δηλαδή: $+ : - = -$ και $- : + = -$ $(+11{,}22) : (+2{,}2) = (+5{,}1)$ $(-11{,}22) : (-2{,}2) = (+5{,}1)$ $(+11{,}22) : (-2{,}2) = (-5{,}1)$ $(-11{,}22) : (+2{,}2) = (-5{,}1)$
Τι είναι ο λόγος δύο αριθμών;	Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha:\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha$. Ο λόγος του −20 προς το 4 είναι: $(-20):(+4) = \frac{-20}{+4} = -5$ διότι $(+4)\cdot(-5) = (-20)$ Ο λόγος του −7 προς το −2 είναι: $(-7):(-2) = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ διότι $(-2)\cdot\frac{7}{2} = (-7)$
Τι παριστάνει η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$;	Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί και να γραφεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ $(-3):(-4) = \frac{-3}{-4} = -3\cdot(-\frac{1}{4})$ $6:(-7) = \frac{6}{-7} = 6\cdot(-\frac{1}{7})$ $(-5):(+2) = \frac{-5}{2} = -5\cdot(\frac{1}{2})$
SOS	Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.
Βασικό Παράδειγμα	**2.** *Να λυθούν οι εξισώσεις:* (α) $-6x = -24$, (β) $-3x = +15$, (γ) $x : (-2) = -3$. **Λύση** (α) $-6x = -24$ $x = (-24):(-6)$ $x = +(24:6)$ $x = +4$ (β) $-3x = +15$ $x = (+15):(-3)$ $x = -(15:3)$ $x = -5$ (γ) $x:(-2) = -3$ $x = (-3)\cdot(-2)$ $x = +(3\cdot 2)$ $x = +6$
Παράδειγμα	**3.** *Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:* $[\frac{2}{3}(-3)-(-2)(-9)] : [0{,}4(-10)-(-0{,}2)(-5)]+7$. **Λύση** $[\frac{2}{3}(-3)-(-2)(-9)] : [0{,}4(-10)-(-0{,}2)(-5)]+7 =$ $= [-(\frac{2}{3}\cdot 3)-(2\cdot 9)] : [-(0{,}4\cdot 10)-(0{,}2\cdot 5)]+7 =$ (κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις) $= (-2-18) : (-4-1) + 7 =$ $= (-20) : (-5) + 7 =$ (κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις) $= +(20 : 5) + 7 =$ $= +4 +7 =$ (κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις) $= +11$