

Ασκήσεις στα ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γεώργιος Χ. Δομουχτσής *

13 Μαΐου 2019

*ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - Γ. Μπούσγου, Ι. Ταμβακλή - 1974

1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ-ΟΡΟΙ-ΒΑΘΜΟΣ-ΟΜΟΓΕΝΕΣ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ

1. Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα. Να κάνετε τις αναφερόμενες ενέργειες.

- $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - x^2 + 7x - 8$
- $Q(\alpha, \beta) = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $R(x, w) = xw^2 - 3x^2w + 12w - 5$
- $S(\alpha, \beta) = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$
- $T(x, y, w) = 4xy^2w - 7xy + 5y^2 + 12xy - 6xy^3w - 4$
- $U(x) = -8 + 10x - 6x^2 + 2x^3$
- $V(x, w) = 5 - 12w - xw^2 + 3x^2w$

(α') Να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων.

(β') Να βρείτε τον βαθμό καθενός ως προς τις μεταβλητές του.

(γ') Να εξετάσετε ποια είναι ίσα.

(δ') Να εξετάσετε ποια είναι αντίθετα.

2. Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα. Να κάνετε τις αναφερόμενες ενέργειες.

- $P(x) = 7x^3 - 5x + 2x^2 - 6x^4 - x^3 + 8x - 13x^2 + 45$
- $Q(x, y) = -5x^2y^3 + 6xy^4 + 3y^5 - 8xy^4 + 12x^3y^3 - 4y^5 + 2xy^4 - 3xy$
- $R(x, y) = 2xy - x^2 + y^2 - 4x + 3y - 5xy - 2x^2 + x - y + 41$
- $S(x, w) = -\frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{2}w^2x - \frac{5}{3}wx^2 + \frac{1}{2}w^3 - x^3 + w^2x - \frac{1}{3}wx^2 - 100$

(α') Να τα γράψετε στην ανηγμένη τους μορφή.

(β') Να βρείτε τον βαθμό καθενός ως προς τις μεταβλητές του.

(γ') Να τα διατάξετε ως προς τις ανιούσες δυνάμεις μιας από τις μεταβλητές τους.

(δ') Ποιο από αυτά είναι ομογενές;

(ε') Ποιο διατάσσεται σε ομάδες ομογένειας;

3. Δίνονται το σύνολο μονωνύμων. Να κάνετε τις αναφερόμενες ενέργειες.

- $\Sigma = \{-\frac{3}{5}x^4, 2x^3, -x, 7x^2, -\frac{1}{2}x, -4x^2, -\frac{2}{5}x^4, x^3\}$

(α') Να σχηματισθεί το πολυώνυμο με όρους τα παραπάνω μονώνυμα.

(β') Να γραφεί στη συνεπτυγμένη του μορφή.

(γ') Να τα διαταχθεί κατά τις κατιούσες δυνάμεις του x .

(δ') Να εξεταστεί αν είναι πλήρες ή ελλιπές πολυώνυμο.

4. Δίνονται το σύνολο μονωνύμων. Να κάνετε τις αναφερόμενες ενέργειες.

- $\Sigma = \{-x^2y, 5xy, -2xy^2, \frac{1}{2}xy, 4x^3y, -4xy^3, \frac{2}{5}x^2y, 2xy^3, -x^3y\}$

(α') Να βρείτε τις κλάσεις των όμοιων μονωνύμων.

(β') Να σχηματισθεί το πολυώνυμο με όρους τα στοιχεία του Σ .

(γ') Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού ως προς x ;

(δ') Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού ως προς y ;

(ε') Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού ως προς $x \wedge y$;

(στ') Να τα διαταχθεί το πολυώνυμο κατά τις ανιούσες δυνάμεις του y .

(ζ') Να εξεταστεί αν είναι συμμετρικό ως προς τις μεταβλητές του.

2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ-ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να βρείτε το άθροισμα των πολωνύμων:

$$\Phi(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x - 6$$

$$\Pi(x) = -x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 12$$

$$\Sigma(x) = 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$\Phi(x) + \Pi(x) = (2x^5 - 3x^4 + 7x - 6) + (-x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 12)$$

2. Αν είναι:

$$A = 3x^2 - 7x + 8$$

$$B = 6x - 5$$

$$\Gamma = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 3$$

$$\Delta = x^3 - 5x^2 + x + 2$$

$$A = 3(-3)^2 - 7(-3) + 8 = 3 \cdot 9 + 21 + 8 = 27 + 21 + 8 = 56$$

να βρείτε την αριθμητική τιμή του B για $x=1$, -2 και 4

να βρεθούν τα αθροίσματα:

$$(\alpha') A + B + \Gamma + \Delta =$$

$$(\beta') A - B + \Gamma - \Delta =$$

$$(\gamma') A - B - \Gamma + \Delta =$$

$$(\delta') -A - (B - \Gamma) - \Delta =$$

$$(\epsilon') A + B - (\Gamma - \Delta) =$$

3. Αν είναι:

$$A = 3x - 5 + 6x^2 - 3x^3 + x^4$$

$$B = -x^2 + 2x - x^3 - 6x^4 + 7$$

$$\Gamma = x^3 + 2x - 2 - x^4 + 3x^2$$

να βρεθούν τα πολυώνυμα:

$$(\alpha') \Phi(x) = A + B - \Gamma$$

$$(\beta') \Pi(x) = A - B + \Gamma$$

$$(\gamma') \Sigma(x) = A - B - \Gamma$$

$$(\delta') P(x) = A + B + \Gamma$$

• Ποιο είναι το άθροισμα $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) + P(x)$;

• Τι παρατηρείτε;

4. Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα. Να κάνετε τις αναφερόμενες ενέργειες.

$$A = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

$$B = -2x^2 + y^4$$

$$\Gamma = 3xy + 2x^2y^2 + x^3y^3$$

(α') Να υπολογίσετε το πολυώνυμο $A + B - \Gamma$.

(β') Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x ;

(γ') Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς y ;

(δ') Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς $x \wedge y$;

5. Αν είναι:

$$\varphi(x, y) = 3x + y - 5$$

$$\sigma(x, y) = -2x - 3y + 8$$

$$f(x, y) = x - 2y + 3$$

να βρεθούν στη συνεπτυγμένη τους μορφή τα πολυώνυμα:

$$(\alpha') \varphi(x, y) + \sigma(x, y) + f(x, y) =$$

$$(\beta') \quad \varphi(x, y) - [\sigma(x, y) - f(x, y)] =$$

$$(\gamma') \quad -[\varphi(x, y) - \sigma(x, y)] - f(x, y) =$$

6. Αν είναι:

$$\bullet \quad \varphi(x, y) = x - 2y + 3$$

$$\bullet \quad \sigma(x, y) = 3x + y - 5$$

$$\bullet \quad f(x, y) = -5x + 3y - 1$$

να βρεθούν τα πολυώνυμα:

$$(\alpha') \quad A = 2\varphi(x, y) + 2\sigma(x, y) - f(x, y) =$$

$$(\beta') \quad B = 2\sigma(x, y) + 2f(x, y) - \varphi(x, y) =$$

$$(\gamma') \quad \Gamma = 2\varphi(x, y) + 2f(x, y) - \sigma(x, y) =$$

Κατόπιν

$$\bullet \quad \text{να βρεθεί το } \Pi = A + B + \Gamma.$$

$$\bullet \quad \text{να βρεθεί το } P = \varphi(x, y) + \sigma(x, y) + f(x, y).$$

$$\bullet \quad \text{Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ του } \Pi \text{ και του } P;$$

3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΟ

Να γίνουν οι πράξεις: ($\mu, \nu \in \mathbb{N}$)

$$1. \left(\frac{2}{5}x^3 - 4x^2 + 7x - 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3\right) =$$

$$2. (-3x^2 + x - 5) \cdot \left(-\frac{2}{3}x^4\right) =$$

$$3. (5\omega^3 - 3\omega^2 + 2) \cdot \left(-\frac{4}{5}\omega^3\right) =$$

$$4. (\alpha^{2\nu} + \alpha^\nu + 1) \cdot \alpha^\nu =$$

$$5. (2x^{\mu-3} - 4x^{\mu-2} + x^{\mu-1}) \cdot (-3x^4) =$$

$$6. (x^2 - 2y) \cdot 3y + (xy + y^2) \cdot (-x) + (x + y) \cdot (-2xy) - (x + 3) \cdot 2y^2 =$$

$$7. 4[2(x - y) - 3(2x + y)] + 2[3(x^2 - xy + y^2) - 4x - (x^2 - y)] =$$

$$8. 4[2(x - y) + 3(2x - y)] - 2[3(x^2 + xy - y^2) + 4x - (x^2 + y)] =$$

4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Να γίνουν οι πράξεις:

$$1. (x^3 - 7x^2 + 6x - 2) \cdot (x + 3) =$$

$$2. (-2x^3 + 5x^4 - 7x - 8 + x^2) \cdot (-3 + x^2 - 5x) =$$

$$3. (x + 1)(x + 2)(x + 3) =$$

$$4. (x - 1)(x - 2)(x - 3) =$$

$$5. (x^3 + xy^2 + x^2y + y^3)(x - y) =$$

$$6. (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) + (x^2 - 2xy + y^2)(x - y) =$$

$$7. (64\alpha^3 - 48\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 - 27\beta^3)(4\alpha + 3\beta) =$$

$$8. \text{Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παρακάτω παράστασης για } x = \frac{1}{3}:$$

$$(x + 5)(x - 1)(x - 3) - (x + 3)(x - 2)^2$$

$$9. \text{Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παρακάτω παράστασης για } x = -1:$$

$$(x^3 + 2x^2 + 5x - 1)(2 - 2x^2) - (x^3 - 3x^2 + x - 2)(x^3 - 2x^2 + 1)$$

Επιμεριστική
 $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

5 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΟ

Να γίνουν οι πράξεις: ($\mu, \nu \in \mathbb{N}$)

1. $(8x^5 - 3x^4 + 6x^3) : (-3x^3) =$
2. $(-12ax^5 + 18ax^3 - 6ax^2) : (-6ax^2) =$
3. $(\omega^{2\nu} + \omega^{3\nu}) : \omega^{2\nu} =$
4. $(\alpha^{3\mu} + 2\alpha^{2\mu} + 6\alpha^\mu) : (-3\alpha^\mu) =$
5. $(6ax^5 - 3ax^4 + 9a^2x^3 - 12a^3x^2) : (-2ax^2) =$
6. $\left(\frac{12}{5}\alpha^3\beta^2 - \frac{4}{5}\alpha^2\beta^3 + \frac{8}{15}\alpha^2\beta^2\right) : \left(-\frac{4}{5}\alpha^2\beta^2\right) =$

6 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Να γίνουν οι πράξεις:

1. $(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x + 5)$
2. $(18x^3 + 9x^2 - 50x - 25) : (3x - 5)$
3. $(2x^3 - 3x^2 - 17x - 12) : (2x + 3)$
4. $(\omega^3 + 4\omega^2 - 11\omega - 30) : (\omega^2 - \omega - 6)$
5. $(9x^6 - 4x^4 + 21x^3 + 14x^2) : (3x - 2)$
6. $(x^3 + 4x^2 - 18x + 2) : (x^2 + 1)$
7. $(\psi^4 + 2\psi^3 - 19\psi^2 - 8\psi + 60) : (\psi^2 - 5\psi + 6)$
8. $(\omega^4 - \omega^2 + 1) : (\omega^2 + \omega + 1)$
9. $[(3x + 5)^2 + (2x + 3)^2 - 3x(2x + 4) - (x + 1)^2] : (3x - 2)$
10. $(3a^{4x} + 14a^{3x} + 9a^x + 2) : (a^{2x} + 5a^x + 1)$
11. $[(x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2] : (x^2 + x - 12)$
12. $[(x + 3y)^2 + 4(x + 2y)^2 - (x + y)^2] : 4(x + 3y)$
13. $(3\alpha^5 + 25\alpha^4\beta + 33\alpha^3\beta^2 + 14\alpha^2\beta^3) : (\alpha^2 + 7\alpha\beta)$
14. $(x^4 - 3x^3y + 6x^2y^2 - 3xy^3 + y^4) : (x^2 - xy + y^2)$
15. Αν είναι $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3$, να εκτελεσθεί η διαίρεση: $[\varphi(x) + \varphi(x - 2) - \varphi(x - 1)] : (x - 3)$
16. Αν είναι $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, να εκτελεσθεί η διαίρεση: $[\varphi(x + 1) + \varphi(x - 1) - \varphi(x)] : (x - 2)$
17. Αν είναι $\varphi(x) = x^2 + 5x - 6$, να εκτελεσθεί η διαίρεση: $[\varphi(x - 2)\varphi(x + 2) - \varphi(x) - 10] : (x^2 - x - 2)$
18.
 - Να δείξετε την ταυτότητα: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.
 - Αν $x \in \mathbb{N}$, τι συμπεραίνετε από την ταυτότητα αυτή;
19.
 - Να συμπτυχθεί το πολυώνυμο $\Delta(x) = x + 5\lambda - \lambda x^2 + 3x^2 + 3x^3 + 4x^2 - 4\lambda x$, όταν $\lambda = 6$
 - κι ύστερα να γίνει η διαίρεση $\Delta(x) : (x + 3)(x - 2)$.
 - Το $\Delta(x)$ μπορεί να πάρει τη μορφή γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων;
20. Να βρεθεί πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x^2 - x + 1$ να δίνει γινόμενο το $x^4 - x^2 + 2x - 1$.
21. Να βρεθεί πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x + 3$ να δίνει γινόμενο το $x^3 - 5x^2 + 7x + 95$.