ΜΑΘΗΜΑ 13

Κεφάλαιο 2ο : Αλγεβρικές Παραστάσεις

Υποενότητα 2.2: Εξισώσεις 2ου Βαθμού ($\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\quad \alpha\neq 0$).

Θεματικές Ενότητες:

1. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης.
2. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.
3. Παραγοντοποίηση Τριωνύμου.

Α. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

➢ ΟΡΙΣΜΟΙ

✓ Κάθε εξίσωση της μορφής: $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ καλείται **εξίσωση 2ου βαθμού** ή **δευτεροβάθμια εξίσωση με έναν άγνωστο.**
π.χ $x^2-4x+8=0$

Παρατηρήστε ότι τώρα η μεγαλύτερη δύναμη που είναι υψωμένος ο άγνωστος είναι το 2 σε αντίθεση με τις πρωτοβάθμιες που ήταν το 1

✓ Τα **α, β, γ** καλούνται **συντελεστές** της εξίσωσης.

✓ Πιο συγκεκριμένα ο συντελεστής **γ** λέγεται και **σταθερός όρος της εξίσωσης**.

✓ Στη συγκεκριμένη ενότητα για τη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα χρειαστούμε τον εξής ορισμό:
Ένα γινόμενο παραγόντων είναι ίσο με το μηδέν, όταν είτε ο ένας είτε ο άλλος παράγοντας είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει:
$A\cdot B=0 \Leftrightarrow A=0$ **ή** $B=0$

π.χ $(x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ή $x-2=0$ δηλαδή όταν $x=-3$ ή $x=2$

✓ Επίσης πρέπει να γνωρίζουμε ότι:

- $A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ π.χ $(2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$
- $A^2 = -\alpha$ είναι **αδύνατη** π.χ η εξίσωση $(x-1)^2 = -1$ είναι αδύνατη!!!

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ Με βάση τον παραπάνω ορισμό για να λύσουμε μια δευτέρου βαθμού εξίσωση ακολουθούμε τη παρακάτω διαδικασία:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1ο μέλος της
- Αναλύουμε το 1ο μέλος σε γινόμενο παραγόντων (δηλαδή κάνουμε παραγοντοποίηση),αν αυτό βέβαια είναι εφικτό, φέρνοντάς το στη μορφή $A \cdot B = 0$
- Λύνουμε ξεχωριστά της εξισώσεις $A = 0$ και $B = 0$
- Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα είναι οι δύο λύσεις που παίρνουμε λύνοντας τις $A = 0$ και $B = 0$

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 = -4x$ **β.** $x^2 - 16 = 0$

γ. $x^2 - 4x + 4 = 0$ **δ.** $x^2 + 2x + 1 = 4$

Λύση.

α. $x^2 = -4x$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

$x = 0$ η $x + 4 = 0$

$x = 0$ η $x = -4$

β. $x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 4^2 = 0$

$(x-4)(x+4) = 0$

$x - 4 = 0$ η $x + 4 = 0$

$x = 4$ η $x = -4$

Ένας άλλος τρόπος θα μπορούσε να είναι:

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = 4$ η $x = -4$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Η εξίσωση $x^2 = a$, λύνεται και ως εξής:
  - ✓ Αν **α θετικός**, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x_1 = \sqrt{a}$ και $x_2 = -\sqrt{a}$.
  - ✓ Αν **α αρνητικός**, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
  - ✓ Αν **α = 0**, τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 = 0$ που γράφεται και $x \cdot x = 0$ δηλαδή x = 0 ή x = 0.

    (*) Για αυτό λέμε ότι η λύση αυτή είναι **διπλή.**

γ. $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2 - 4x + 2^2 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

δ. $x^2 + 2x + 1 = 4$

$x^2 + 2x + 1^2 = 4$

$(x+1)^2 = 4$

$x + 1 = \pm\sqrt{4}$

$x + 1 = 2$ η $x + 1 = -2$

$x = 2 - 1$ η $x = -2 - 1$

$x = 1$ η $x = -3$

Ποιος ή ποια θα λύσει την εξίσωση $x^2 + 2x + 1 = -4$ **και**

$$\frac{(x-1)^2}{2} = 8 \quad \textbf{???}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2-1)^2+(2x-3)(x+1)^2=0$

Λύση.

$(x^2-1)^2+(2x-3)(x+1)^2=0$

$[(x-1)(x+1)]^2+(2x-3)(x+1)^2=0$

$(x-1)^2(x+1)^2+(2x-3)(x+1)^2=0$

$(x+1)^2\cdot[(x-1)^2+(2x-3)]=0$

$(x+1)^2=0$ η $(x-1)^2+(2x-3)=0$

$x+1=0$ η $x^2-2x+1+2x-3=0$

$x=-1$ η $x^2-2=0$

$x=-1$ η $x^2=2$

$x=-1$ η $x=\pm\sqrt{2}$

➢ Ερωτησεισ τυπου «Σωστου - Λαθοσ»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

1. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με άγνωστο το x είναι 2ου βαθμού **Σ** ☐ **Λ** ☐

2. Αν ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ τότε γ = 0 **Σ** ☐ **Λ** ☐

3. Ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-3x+1=0$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

4. Οι λύσεις της εξίσωσης $(x+2)\cdot(2x-1)=0$ είναι οι X = -2 και $x=\frac{1}{2}$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

5. Η εξίσωση $x^2=1$ έχει μοναδική λύση την x = 1 **Σ** ☐ **Λ** ☐

6. Η εξίσωση $(x-1)^2 = 0$ έχει διπλή ρίζα τη x = 1 **Σ** ☐ **Λ** ☐

7. Η εξίσωση $x^2 + 4 = 0$ δεν έχει λύση **Σ** ☐ **Λ** ☐

8. Η εξίσωση $(\lambda-1)x^2+\lambda x-2=0$ είναι 2ου βαθμού όταν $\lambda \neq 1$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

9. Η εξίσωση $(\lambda-1)x^2+\lambda x-2=0$ είναι 1ου βαθμού όταν $\lambda = 1$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}(x-1)(x-2)=0\\
&\text{ii)}(x+3)(x+4)=0\\
&\text{iii)}(2x-1)(x+3)=0\\
&\text{iv)}(4-x)(2+3x)=0
\end{aligned}
$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}(x^2-1)(x+4)=0\\
&\text{ii)}x(x+1)(x-5)=0\\
&\text{iii)}(2x^2+x)(x-1)=0\\
&\text{iv)}(2-3x)^2=0
\end{aligned}
$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}x^2+x=0\\
&\text{ii)}2x^2-4x=0\\
&\text{iii)}x^2=-4x\\
&\text{iv)}(3x)^2=-x
\end{aligned}
$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\text{i)}x^2-1=0$

$\text{ii)}x^2+5=0$

$\text{iii)}3x^2-15=0$

$\text{iii)}2x^2=\dfrac{1}{2}$

$\text{iv)}(3x-1)^2=9$

$\text{v)}(x+1)^2+1=0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\text{i)}x^2+9x+20=0$

$\text{ii)}x^2-x-12=0$

$\text{iii)}x^2+8x+7=0$

$\text{iv)}x^2-8x+15=0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\text{i)}2x^2+6x+6=x^2+1$

$\text{ii)}7x^2+3x+5=5x^2-7x-7$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\text{i)}(x+3)(x-2)(x+4)=0$

$\text{ii)}(x^2+3)x(x^2-1)=0$

$\text{iii)}(x^2+1)^2+5=0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\text{i)}x^5-16x=0$

$\text{ii)}(x^2+6x+5)(x^2+4x+3)=0$

$\text{iii)}2(x^2+1)+7x=2x$

$\text{iv)}4(x^2+x+1)=3x^2+1$

9. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2+\beta x-4=0$ είναι το 2, να βρείτε την άλλη ρίζα της.

10. Αν οι εξισώσεις $2x+1=0$ και $4x^2+\alpha x+9=0$ (1) έχουν κοινή λύση, να λύσετε την εξίσωση (1).

Β. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ

➢ ΟΡΙΣΜΟΙ

✓ Εξισώσεις 2ου βαθμού ονομάζονται οι εξισώσεις της μορφής

$$\boxed{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0 \ \text{ με } \ \alpha \neq 0}$$

✓ Το **α** λέγεται συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου.

✓ Το **β** λέγεται συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου.

✓ Το **γ** λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης.

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ Για να βρούμε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
Γράφουμε την εξίσωση διαδοχικά :

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \quad (1)$$

Ορίζουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ **= Δ** και την ονομάζουμε **ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ…**

Έτσι η (1) παίρνει τη μορφή : $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$ (2)

Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν **Δ > 0** , τότε από τη (2) έχουμε :

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Άρα για **<u>Δ > 0</u>** η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει **<u>δύο άνισες λύσεις</u>**, τις :

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2. Αν **Δ = 0** , τότε η (2) γράφεται :

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει μια **<u>διπλή ρίζα</u>**, την:

$$x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

3. Αν **Δ < 0** , τότε $\frac{\Delta}{4\alpha^2}<0$ και επομένως η δευτεροβάθμια εξίσωση είναι **<u>Αδύνατη....!!!</u>**

Συμπερασματικά έχουμε το παρακάτω διάγραμμα :

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$

$\mathbf{\Delta} = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\mathbf{\Delta > 0}$	$\mathbf{\Delta = 0}$	$\mathbf{\Delta < 0}$
ΔΥΟ ΑΝΙΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ	ΜΙΑ ΔΙΠΛΗ ΛΥΣΗ	ΚΑΜΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ (δηλ. ΑΔΥΝΑΤΗ)
$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$	

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Η χρησιμοποίηση του τύπου* $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ δε μας συμφέρει πάντοτε αφού υπάρχουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις που λύνονται ευκολότερα με παραγοντοποίηση χρησιμοποιώντας τον τρόπο που δείξαμε στη προηγούμενη ενότητα

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x^2 - x - 2 = 0$ **β.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **γ.** $x - 1 = x^2$

Λύση.

α. Στην εξίσωση $3x^2 - x - 2 = 0$ είναι **α = 3, β = -1** και **γ = -2**. Άρα έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25.$$

Αφού η *Διακρίνουσα* βγήκε *θετικός αριθμός* σημαίνει ότι η εξίσωση μας θα έχει 2 άνισες πραγματικές λύσεις. Αυτές θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{1-5}{6} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

β. Στην εξίσωση $9x^2 - 12x + 4 = 0$ είναι **α = 9, β = -12** και **γ = 4**. Άρα έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Αφού η *Διακρίνουσα* βγήκε *μηδέν* σημαίνει ότι η εξίσωση μας θα έχει 1 διπλή λύση. Αυτή θα είναι:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

γ. Στην εξίσωση $x - 1 = x^2$ **ή** $x^2 - x + 1 = 0$ είναι **α = 1, β = -1** και **γ = 1**. Άρα έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

Αφού η *Διακρίνουσα* βγήκε *αρνητικός αριθμός* σημαίνει ότι η εξίσωση μας **ΔΕΝ** έχει λύσεις, δηλαδή είναι **αδύνατη**.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $(2x-1)^2 - x(x-1) = 3 + x^2$ **β.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x - 1$

Λύση.

α. Κάνοντας λίγο της πράξεις έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(2x-1)^2 - x(x-1) = 3 + x^2 \\
&(2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 - x^2 + x = 3 + x^2 \\
&4x^2 - 4x + 1 - x^2 + x - 3 - x^2 = 0 \\
&2x^2 - 3x - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Άρα **α = 2, β = -3** και **γ = -2** και έτσι:

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Αφού η *Διακρίνουσα* βγήκε *θετικός αριθμός* σημαίνει ότι η εξίσωση μας θα έχει 2 άνισες πραγματικές λύσεις. Αυτές θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} =$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

β. Πολλαπλασιάζοντας με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{2} - \frac{x-1}{3} = x - 1 \\
&6\cdot\frac{x^2}{2} - 6\cdot\frac{(x-1)}{3} = 6x - 6 \\
&3x^2 - 2(x-1) = 6x - 6 \\
&3x^2 - 2x + 2 - 6x + 6 = 0 \\
&3x^2 - 8x + 8 = 0
\end{aligned}
$$

Άρα **α = 3, β = -8** και **γ = 8** και έτσι:

$\Delta=(-8)^2-4\cdot3\cdot8=64-96=-32<0$

Αφού η *Διακρίνουσα* βγήκε *αρνητικός αριθμός* σημαίνει ότι η εξίσωση μας **ΔΕΝ** έχει λύσεις, δηλαδή είναι **αδύνατη**.

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΣ»

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

Έστω η εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$ με $\alpha\neq0$.

1. Η παράσταση $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης. **Σ** ☐ **Λ** ☐

2. Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

3. Αν $\Delta\geq0$, τότε η εξίσωση δεν είναι αδύνατη **Σ** ☐ **Λ** ☐

4. Η εξίσωση έχει δύο το πολύ λύσεις **Σ** ☐ **Λ** ☐

5. Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της εξίσωσης, τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)$

Σ ☐ **Λ** ☐

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις εφαρμόζοντας τον τύπο: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (ανεξάρτητα αν συμφέρει ή όχι)

$i)\, y^2+5y=0$

$ii)\, \omega^2+6=0$

$iii)\, 4x^2=16$

$iv)\, x^2=7x$

$v)\, 9(x^2-3)=8x(x-4)+6$

$vi)\, x^2+(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x+2)^2=-x$

ii) $(2x^2+5x+2)\cdot(x^2-6x+8)=0$

iii) $(x^2+x+1)\cdot(x^2-5x+6)=0$

iv) $(x+1)^2+(x-5)^2=0$

v) $(3x-6)(x+1)=(5x-10)(x-1)$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2(x^2+2x)=3-x$

ii) $4x^2+5=20(x-1)$

iii) $(x-2)^2+2x(x+6)=2(3x+10)$

iv) $(4x-1)^2-9=(x-1)^2$

v) $(x-2)(x+3)-2x(x-2)=(3-x)(x+1)$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sqrt{2}\cdot x^2+5x+2\sqrt{2}=0$

ii) $x^2-2\sqrt{3}\cdot x+3=0$

iii) $\sqrt{5}\cdot x^2+5\sqrt{2}\cdot x+\frac{\sqrt{5}}{4}=0$

iv) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}=0$

v) $\frac{5}{3}x^2+\frac{x}{2}-3=0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{x(x-4)}{2}-3=\frac{7x}{6}-\frac{5x+4}{4}$

ii) $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{(6x-1)^2}{10}=7-\frac{3-7x}{2}$

6. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2=0$ να έχει ρίζα το 2 και στη συνέχεια να δειχθεί ότι η ρίζα αυτή είναι διπλή.

7. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η εξίσωση $3\lambda x^2-(4\lambda-1)x+\lambda=0$ να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε.**(Υπόδειξη**: για να έχει μια διπλή ρίζα θα πρέπει **Δ = 0)**

8. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε ο αριθμός –2 να είναι ρίζα της εξίσωσης : $\left(\lambda^2-2\lambda-2\right)x^2+\left(4\lambda+7\right)x+2\lambda^2=0$

9. Για ποίες τιμές του λ η εξίσωση $3x^2-2x+\left(1-5\lambda\right)=0$ έχει:
(i) δύο άνισες ρίζες (ii) μια διπλή ρίζα (iii) καμία πραγματική ρίζα

10. Να βρείτε δύο διαδοχικούς αριθμούς αν έχουν γινόμενο ίσο με 240.

11. Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 100.

12. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 22 και γινόμενο 117.

13. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 11 και γινόμενο 30.

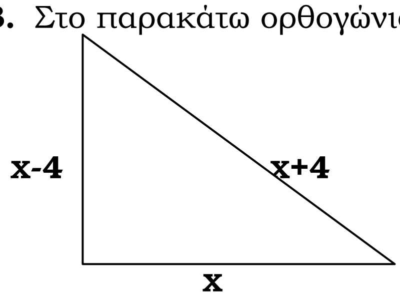
14. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν διαφορά 12 και γινόμενο -35.

15. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν διαφορά 10 και γινόμενο -60.

16. Αν στο τετράγωνο ενός αριθμού προσθέσουμε το τριπλάσιο του θα βρούμε το 4. Ποιος είναι ο αριθμός;

17. Ο Βαγγέλης είναι τέσσερα χρόνια μεγαλύτερος από την αδερφή του τη Χριστίνα. Αν η ηλικία του Βαγγέλη πολλαπλασιαστή με την ηλικία της Χριστίνας, δίνει γινόμενο ίσο με την ηλικία της μητέρας τους που είναι τετραπλάσια από την ηλικία του Βαγγέλη. Να βρείτε πόσο χρονών είναι ο καθένας.

18. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε το x:



19. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις που διαφέρουν κατά 2 και ύψος ίσο με το άθροισμα των βάσεων. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με $288cm^2$, να υπολογίσετε τις βάσεις και το ύψος του τραπεζίου.

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $3x^2+2x=0$
2. $x^2-4=0$
3. $x^2-5x+4=0$
4. $2x^2-11x+5=0$
5. $x^2+2x=5$
6. $x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$
7. $(x-1)(x^2-7x+12)=0$
8. $4-4x^2=0$
9. $(x-2)(x-5)(x+1)=0$
10. $2(x^2+20)=21x$
11. $2x^2-5x+3=0$
12. $x^2-7x+6=0$
13. $x^2+3x+3=0$
14. $6x^2-x-2=0$
15. $x^2=\frac{1}{4}$
16. $5x-10x^2=0$
17. $x^2-(2x-1)^2=0$
18. $\frac{x-3}{2}+\frac{2x+3}{6}=\frac{x^2-1}{3}$
19. $\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{6}+2$
20. $2x^2-10x+12=0$
21. $x^2-12x-85=0$
22. $x^2-14x+49=0$
23. $x^2-x-56=0$
24. $3x^2+18=0$
25. $3x^2=2x-1$
26. $-6x^2+7x+20=0$
27. $2x^2+14x=0$
28. $\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{3x-10}{4}$
29. $x^2-8=-6x$
30. $4y^2-9y=0$

Γ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ - - ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

✓ Πολλές φορές προκειμένου:

- Να παραγοντοποιήσουμε παραστάσεις,
- Να αποδείξουμε ανισότητες,
- Να επιλύσουμε ανισώσεις,
- Να απλοποιήσουμε κλασματικές παραστάσεις,

Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω μορφές τριωνύμου.

✓ Έστω η εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

- Αν **Δ > 0**, τότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες τις ρ_1, ρ_2 και το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γράφεται:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

- Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα την ρ_1 η οποία δίνεται και από τον τύπο $\rho_1 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και έτσι το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γράφεται:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a \cdot (x - \rho_1)^2 = a \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

- Αν **Δ < 0**, τότε η εξίσωση **ΔΕΝ** έχει ρίζες και έτσι το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ **ΔΕΝ** παραγοντοποιείται.

✓ Τα παραπάνω αποδεικνύονται ως εξής: **(Εκτός ύλης....)**

✓ Ένα τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μπορεί, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x)&=\alpha x^2+\beta x+\gamma \\ &=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \\ &=\alpha\left[x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right] \\ &=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \\ &=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \quad (1) \end{aligned}$$

Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε ισχύει $\sqrt{\Delta^2}=\Delta$, οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x)&=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \\ &=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] \\ &=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \\ &=\alpha\left[x-\left(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right] \\ &=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

Άρα όταν $\Delta>0$, το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες!!!

- Αν $\Delta = 0$, τότε η σχέση (1) παίρνει μορφή:

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Δηλαδή όταν $\Delta = 0$, το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο!!!

- Αν $\Delta<0$, τότε $-\Delta=|\Delta|$, οπότε η σχέση (1) γράφεται:
  $f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ η οποία δεν αναλύεται σε γινόμενο, αφού η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι πάντα (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) θετική.

  Οπότε αν $\Delta<0$, το τριώνυμο ΔΕΝ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων!!!

➢ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνει γινόμενο το τριώνυμο $f(x)=2x^2-5x+2$.

Λύση.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0$

Οπότε οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $x_1=\frac{5+3}{2\cdot2}=2$ και $x_2=\frac{5-3}{2\cdot2}=\frac{1}{2}$

Έτσι το τριώνυμο μπορεί να γραφτεί υπό μορφή γινομένου ως εξής:

$f(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2. Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση: $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2$

Λύση.

Θεωρώντας το α ως μεταβλητή, δηλαδή ως x, τότε η παράσταση $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2+8\beta^2=9\beta^2\geq0$

Έτσι οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $\alpha_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{9\beta^2}}{2}=\frac{-\beta\pm3\beta}{2}=\begin{cases}\alpha_1=-2\beta\\ \alpha_2=\beta\end{cases}$

Έτσι η παράσταση μπορεί να γραφτεί υπό μορφή γινομένου ως εξής:

$\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)=(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)$

3. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \dfrac{x^2 - 9x + 20}{2x^2 - 14x + 24}$.

Λύση.

***Πρώτα** βρίσκω για ποίες τιμές του x ορίζεται η παράσταση!!!*

Το τριώνυμο $2x^2 - 14x + 24$ έχει ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = 3$, άρα γράφεται με τη μορφή γινομένου ως εξής: $2x^2 - 14x + 24 = 2(x-3)(x-4)$
Άρα η παράσταση ορίζεται αν
$2(x-3)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$ και $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq 4$.

Τώρα το τριώνυμο $x^2 - 9x + 20$ έχει ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = 5$, άρα γράφεται με τη μορφή γινομένου ως εξής: $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$

Επομένως για κάθε $x \neq 3$ και $x \neq 4$ έχουμε:

$$A = \frac{x^2 - 9x + 20}{2x^2 - 14x + 24} = \frac{(x-5)(x-4)}{2(x-3)(x-4)} = \frac{(x-5)}{2(x-3)}.$$

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιήσετε, εφόσον είναι δυνατόν, τα παρακάτω τριώνυμα:

i) $x^2 + x - 6$
ii) $2x^2 - x - 1$
iii) $6x^2 - x - 1$
iv) $4x^2 + 20x + 25$
v) $x^2 - 7x + 12$
vi) $5x^2 + x - 4$
vii) $10x^2 - x - 2$
viii) $-49x^2 + 14x - 1$

2. Να παραγοντοποιήσετε, εφόσον είναι δυνατόν, τα παρακάτω τριώνυμα:

i) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
ii) $f(x) = x^2 - 6x - 7$
iii) $f(x) = x^2 - x - 12$
iv) $f(x) = 4x^2 + 8x - 12$
v) $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$
vi) $f(x) = 2x^2 - 9x - 5$
vii) $f(x) = 8x^2 - 18x - 5$
viii) $f(x) = 2x\left(x - \dfrac{7}{2}\right) + 5$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $x^2-(\alpha+1)x+\alpha$

ii) $x^2+6\alpha x+(9\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2$

iv) $\alpha^2+\alpha\beta-20\beta^2$

v) $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2$

vi) $\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1$ με $\alpha\beta\neq 0$

vii) $\alpha(\alpha+\beta)x^2+\beta x-1$ με $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq -\beta$

viii) $(\alpha-2\beta)^2-7(2\beta-\alpha)+12$ με $\alpha\neq 2\beta$

ix) $(3\beta-2\alpha)^2+5(2\alpha-3\beta)+6$ με $3\beta\neq 2\alpha$

4. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $6x^2+x-1$, $-9x^2+6x-1$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\dfrac{6x^2+x-1}{-9x^2+6x-1}$.

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις $A=\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-1}$ και $B=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-3x+2}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\left(3\lambda+1\right)x+9\lambda^2-2,\quad \lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η f

i) να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

ii) να γράφεται ως τέλειο τετράγωνο