Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

		Σωστό	**Λάθος**
i)	Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$	❑	❑
ii)	Αν $α > β$, τότε $-α < -β$	❑	❑
iii)	Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$	❑	❑
iv)	Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$	❑	❑
v)	Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$	❑	❑
vi)	Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$	❑	❑
vii)	Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$	❑	❑
viii)	Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$	❑	❑
ix)	Αν $0 < x < y$ τότε $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$	❑	❑
x)	Αν $x < 0 < y$ τότε $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$	❑	❑
xi)	Αν $2 < x < ψ$ τότε $xψ > 0$	❑	❑
xii)	Αν $2 < x < y$, τότε $xy - y^2 > 0$	❑	❑
xiii)	Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $3x - 2y < 0$	❑	❑
xiv)	Αν $x > 1$, τότε $x^{-2} > 1$	❑	❑
xv)	Αν $α > 0$, $β \cdot δ < 0$ και $α \cdot β \cdot γ \cdot δ > 0$ τότε $γ < 0$	❑	❑
xvi)	Αν $α < 1$ και $β > 2$, τότε $\frac{α-1}{β-2} < 0$	❑	❑

2. Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$) ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i) Αν $α > 3$, τότε $α - 3$ ... 0

ii) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε α ... γ

iii) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β}$... 0

iv) Αν $γ < 0$ και $αγ \leq βγ$, τότε α ... β

v) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2$ ... 0

vi) Αν $α \leq 0$ και $β \leq 0$, τότε $α + β$ ... 0

3. Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;

i) $α + β > 15$ **ii)** $α - β > 9$ **iii)** $αβ > 36$ **iv)** $\frac{α}{β} > 4$

4. Ενας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, αρκεί να ισχύει αδ = βγ. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\gamma}{\delta}$, αρκεί να αποδείξει ότι αδ > βγ. Είναι σωστή η σκέψη του;

5. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Για την παράσταση $\Pi=\alpha\cdot\beta+\alpha+\beta-1$, όπου $\alpha\cdot\beta>0$ και $\beta>1$, ισχύει

Α. Π >0 **Β.** Π < 0 **Γ.** Π = 0

ii) Αν ισχύει α – 3 < β – 3 και β + 4 < γ + 4, τότε συμπεραίνουμε ότι:

Α. α = γ **Β.** α > γ **Γ.** α < γ

iii) Αν $(x-2)^2+(y-3)^2\leq 0$, τότε:

Α. x = – 2 και y = –3 **Β.** x = 2 και y = 3 **Γ.** x = 2 και y = –3

iv) Αν 3 < x < 4, τότε η παράσταση $\Pi=(x-3)(x-4)$ είναι:

Α. Π > 0 **Β.** Π = 0 **Γ.** Π < 0

Α΄ ΟΜΑΔΑ

6. Αν x > y, να συγκρίνετε τους αριθμούς. Α = 3x – 4ω και Β = 3y – 4ω

*(**Απ.:** Α > Β)*

7. Αν α < β και α, β θετικοί αριθμοί, να διατάξετε τους αριθμούς 1, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

8. Αν α < β < γ, να δείξετε ότι: $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)>0$

9. Αν x > –3, να αποδείξετε ότι: $2x+6>3+x$

10. Αν α > 4, να αποδείξετε ότι: $2\alpha+5>13$

11. Αν x > 3 και y > 4, να αποδείξετε ότι: $3x+4y>25$

12. Αν $2<x<5$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις.

Α = x – 2 Β = 3x + 1 Γ = 1 – 4x

*(**Απ.:** $0<A<3$, $7<B<16$, $-19<\Gamma<-7$)*

13. Αν $-1<\alpha<2$ και $-\frac{2}{3}<\beta<1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

$A=\alpha-\beta$ $B=3\beta-2\alpha+5$

*(**Απ.:** $-2<A<\frac{8}{3}$, $-1<B<10$)*

14. Αν 3 < x < 9 και –2 < y < 8, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

$A=3x+2y$ $B=-4x-y$

*(**Απ.: 5 < Α < 43,** $-42<B<-10$)*

15. Αν είναι 1 < x < 2 να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$A=(1-x)(x-2)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

***(Απ.:** A > 0)*

16. Αν x > 1 > y, να αποδείξετε ότι: $x+y>1+xy$

17. Να αποδείξετε ότι:

i) $x^2+9\geq 6x$ **ii)** $2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

iii) $(x+y)^2+4xy\geq -8y^2$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

18. Αν 0 < α < 1, να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha+1}{2},\ 0,\ \alpha-1,\ 1,\ \alpha$$

19. Αν 1 < α < β, να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta,\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta^2},\ 1$$

20. Αν 2 < x < 3 και 1< y < $\frac{5}{2}$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

$A=x^2+y^2$ $B=3x^2-2y+4xy$

***(Απ.:** $5<A<\frac{61}{4}$, $15<B<55$)*

21. Αν 0 < α < β και 0 < γ < δ, να δείξετε ότι: $\alpha-\frac{1}{\gamma}<\beta-\frac{1}{\delta}$

22. Αν $\alpha+\beta=3$, να αποδείξετε ότι: α) $\alpha\beta\leq\frac{9}{4}$ β) $\alpha^2+\beta^2\geq\frac{9}{2}$

23. **i)** Να δείξετε ότι για κάθε αριθμό x ισχύει: $x^2+1\geq 2x$

ii) Να δείξετε ότι για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ ισχύει: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)$

24. Για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών α, β, να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 4$

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό x, ισχύει ότι: $\frac{x^2}{x^4+1}\leq\frac{1}{2}$

26. Να αποδείξετε ότι: **i)** $2x^2+2x+1>0$ **ii)** $x^2-4x+5>0$

27. Αν $\alpha+\beta=2$ να αποδείξετε ότι: **i)** $\alpha\beta\leq 1$ **ii)** $\alpha^2+\beta^2\geq 2$

28. Αν α > 4, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha+1)x^2-(3\alpha-2)x+\alpha+1=0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

29. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $A=\alpha^2-10\alpha\beta+27\beta^2-8\beta+8$.

Για ποιες τιμές των α, β, η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη;

30. Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2-2\alpha\beta$

ii) $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2+2\alpha\beta$

iii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

31. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A=(1+\alpha)(1+\beta)$ και $B=1+\alpha+\beta$

Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο

Ερωτήσεις κατανόησης

32. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

		Σωστό	**Λάθος**
i)	Η ανίσωση $0x\geq 0$ αληθεύει για κάθε αριθμό x.	❑	❑
ii)	Η ανίσωση $0x>-3$ είναι αδύνατη.	❑	❑
iii)	Η ανίσωση $\lambda x<0$ με $\lambda>0$ έχει θετικές λύσεις.	❑	❑
iv)	Οι λύσεις της εξίσωσης 0x = 0 είναι και λύσεις της ανίσωσης 0x < 2.	❑	❑
v)	Ο αριθμός –1 είναι λύση της ανίσωσης $-3x-2>4+x$.	❑	❑
vi)	Οι ανισώσεις $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$ και $5x-5\geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	❑	❑

33. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

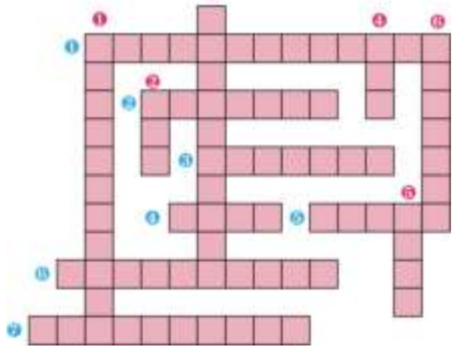
i) Η ανίσωση $-3x\leq 0$ αληθεύει όταν:
Α. $x\geq -3$ Β. $x\geq 3$ Γ. $x\leq 0$ Δ. $x\geq 0$

ii) Αν $-3x\geq 4x-7$, τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι:
Α. $x\leq 1$ Β. $x\geq -7$ Γ. $x\geq 1$ Δ. $x\leq 0$

iii) Αν $x+2<0$ και $3x-1<2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ τότε οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι για:
Α. $x>0$ Β. $x<0$ Γ. $-2<x<0$ Δ. $x<-2$

iv) Η ανίσωση $(\lambda-2)x>7-\lambda$ είναι αδύνατη όταν:
Α. $\lambda=9$ Β. $\lambda=7$ Γ. $\lambda=2$ Δ. $\lambda=5$

34. ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$.
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι ... της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x-1)^2=0$.

6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με ... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0$ με $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ έχει ... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει ... λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση 0x = 8.

Α΄ ΟΜΑΔΑ

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2(x+1)+3\geq 5(x-2)+7$ ii) $4(x-4)<3x-14$

(Απ.: i) $x\leq\frac{8}{3}$ ***, ii)*** *x < 2)*

36. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x+1}{2}-\frac{2x+3}{5}>\frac{x+5}{4}$ ii) $\frac{x-1}{3}<\frac{x}{6}+\frac{x-2}{2}$ iii) $\frac{x+4}{3}-2<\frac{x-4}{5}+\frac{3x-1}{15}$

(Απ.: i) *x < –9,* ***ii)*** *x > 2,* ***iii)*** *x > 3)*

37. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{x}{6}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{5}\right)$ ii) $\frac{3x}{4}-5<\frac{7x}{12}+\frac{x}{6}$

(Απ.: i) $x\leq\frac{3}{5}$ ***, ii)*** *αδύνατη)*

38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x+1}{2}>x-\frac{2x+3}{4}$ ii) $\frac{x-15}{2}+\frac{x-3}{2}+\frac{5}{4}>x-3$

(Απ.: i) *αληθεύει για όλα τα x,* ***ii)*** *αδύνατη)*

39. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

i) $\begin{cases}4x+1\geq 5x-2\\ 3x+8\geq 2(x-1)\end{cases}$ ii) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>\frac{x-1}{4}\\ \frac{2(2x-1)}{3}\geq\frac{3(x+1)}{4}\end{cases}$ iii) $\begin{cases}\frac{x-1}{3}-\frac{x-2}{2}<\frac{x}{6}\\ x-\frac{x-1}{2}<\frac{x-2}{3}\end{cases}$

(Απ.: i) $-10\leq x\leq 3$ ***, ii)*** $x\geq\frac{17}{7}$ ***, iii)*** *δεν έχουν κοινή λύση)*

40. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $-6<2-4x<9$

(Απ.: *–1, 0, 1)*

41. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x$ ii) $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5}$

(Απ.: i) *αδύνατη,* ***ii)*** *αληθεύει για όλα τα x)*

Β΄ ΟΜΑΔΑ

42. Να βρείτε όλες τις ακέραιες και θετικές τιμές του x για τις οποίες το κλάσμα $\frac{5-x}{2}$ είναι θετικό και μικρότερο του 4.

***(Απ.:** 1, 2, 3, 4)*

43. Αν για x = 2 επαληθεύεται η ανίσωση: $\mu+3x-\frac{1}{2}>2(x-\mu)+3$ να βρείτε τις τιμές του μ.

***(Απ.:** $\mu>\frac{1}{2}$)*

44. Αν η ανίσωση $\frac{7x-4}{15}-\frac{1-x}{3}<\frac{5x-9}{10}$ και μια άλλη ανίσωση έχουν κοινές λύσεις $-3<x<-1$, να βρείτε τη λύση της δεύτερης ανίσωσης.

***(Απ.:** $x>-3$)*

45. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $3(x+1)^2-3(2x+2)<x(3x-1)$ **ii)** $(x+2)^3\geq x^3+6x(x-3)$

***(Απ.:** **i)** $x<3$, **ii)** $\chi\geq-\frac{4}{15}$)*

46. Για ποια τιμή του λ οι ανισώσεις $2x-5>19$ και $4\lambda x-12>0$ έχουν τις ίδιες λύσεις:

***(Απ.:** $\lambda=\frac{1}{4}$)*

47. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό x για τον οποίο ισχύει: $\frac{x}{x+1}<\frac{31}{40}$ και $\frac{x+1}{x+2}>\frac{31}{40}$.

48. Για ποιες τιμές του μ ο αριθμός $3\mu+4$ είναι λύση της ανίσωσης: $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-1}{2}-3\leq0$

***(Απ.:** $\mu\leq3$)*

49. Για ποιες τιμές του α ο αριθμός $3\alpha+2$ είναι λύση της ανίσωσης: $5x+2-(3x+5)\geq4x+17$;

50. Για ποιες τιμές του μ οι ανισώσεις $4x+6>14$ και $3\mu x-4>0$ έχουν τις ίδιες λύσεις;

51. Ενα ορθογώνιο οικόπεδο έχει μήκος 32 m και πλάτος 20 m. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα 10 cm για κάθε διάσταση, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου.

***(Απ.:** $103{,}6\leq\pi\leq104{,}4$)*

52. Ενας όμιλος τέννις προσφέρει στα μέλη του δύο τρόπους για να κάνουν χρήση των γηπέδων του.
Α΄ Να πληρώνουν για κάθε ώρα παιχνιδιού 2 €.
Β΄ Να πληρώνουν ετήσια συνδρομή 25 € και για κάθε ώρα παιχνιδιού 1,5 €.
Πόσες ώρες πρέπει να παίξει κάποιος σε ένα χρόνο ώστε να τον συμφέρει ο Β΄ τρόπος;

***(Απ.:** Πάνω από 50 ώρες)*