ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2022» Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right)$$

Λύση

Έχουμε

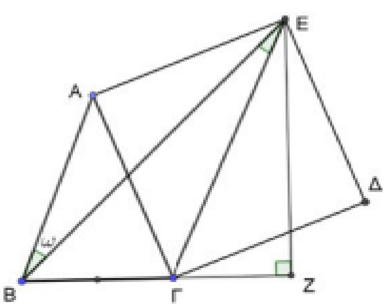
$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-21}{7}\right)^7 + \left(\frac{-15}{-5}\right)^7 + 4044 \right) : \left(\left(\frac{-14}{7}\right)^3 + \left(\frac{-18}{-9}\right)^3 + 2 \right) \\ &= \left((-3)^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left((-2)^3 + 2^3 + 2 \right) \\ &= \left(-3^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left(-2^3 + 2^3 + 2 \right) = 4044 : 2 = 2022. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $Α\hat{Β}Ε = \omega$ και $Ε\hat{Ζ}Γ = 90^0$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: $ΒΖ = ΕΖ$



Λύση

(α) Επειδή $ΑΕ = ΑΓ = ΑΒ$, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Ε}Β = \omega$.
Επειδή $Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + 90^0$, έπεται ότι:

$$\hat{Α} + 90^0 + 2\omega = 180^0 \Rightarrow \hat{Α} = 90^0 - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{Β} = \hat{Γ} = \frac{180^0 - \hat{Α}}{2} = \frac{180^0 - (90^0 - 2\omega)}{2} = 45^0 + \omega.$$

(β) Έχουμε $E\hat{B}Z = \hat{B} - \omega = \left(45^0 + \omega\right) - \omega = 45^0$. Επειδή το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο με $E\hat{Z}B = 90^0$, έπεται ότι $B\hat{E}Z = 90^0 - E\hat{B}Z = 90^0 - 45^0 = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με ΒΖ = ΕΖ.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα ¾ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2021» Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4 .

(*Σημείωση:* $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $y = \overline{cba}$ $=100c+10b+ a$).

Λύση

Εφόσον οι αριθμοί x, y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.

Εφόσον οι αριθμοί x, y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c < a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a, c) μπορεί να είναι:

$$(8,6) \text{ ή } (8,4) \text{ ή } (8,2) \text{ ή } (6,4) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (4,2).$$

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές του $b = 0$ ή $b = 1$ ή $b = 2$ ή $b = 3$ ή $b = 4$ ή $b = 5$ ή $b = 6$ ή $b = 7$ ή $b = 8$ ή $b = 9$

(σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x = \overline{abc}$ είναι οι: 884, 864, 844, 824, 804 και 692, 672, 652, 632, 612.

Οι αριθμοί $y = \overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x = \overline{abc}$.

Πρόβλημα 2 Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής: Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

Λύση Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta = 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta$$
$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta.$$

Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

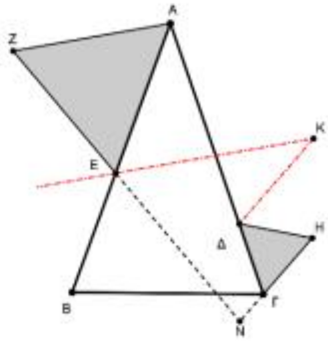
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{E}Z$ και $A\hat{\Delta}H$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

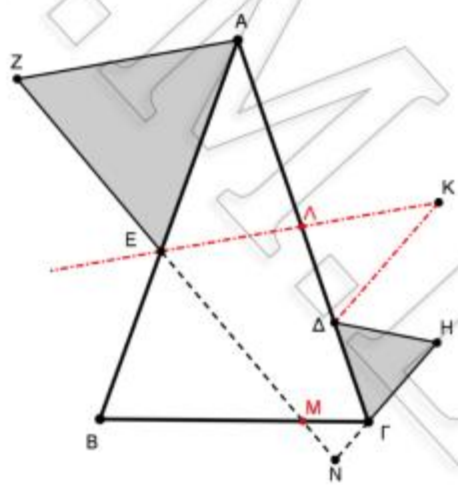
Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\hat{K}\Delta = B\hat{A}\Gamma$

(β) $E\hat{N}\Gamma = 120^0 - B\hat{A}\Gamma$



Λύση



Έστω τώρα Μ η τομή της ΕΝ με την ΒΓ και Λ η τομή της ΕΚ με την ΑΓ . Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $E\hat{K}\Delta = \Lambda\hat{K}\Delta = 180° - K\hat{\Lambda}\Delta - K\hat{\Delta}\Lambda = 180° - K\hat{\Lambda}\Delta - 60° = 120° - K\hat{\Lambda}\Delta =$
$= 120° - A\hat{\Lambda}E = 120° - (180° - \hat{A} - A\hat{E}\Lambda) = 120° - (180° - \hat{A} - 60°) = \hat{A}.$

(β) $E\hat{N}\Gamma = M\hat{N}\Gamma = 180° - N\hat{M}\Gamma - N\hat{\Gamma}M = 180° - E\hat{M}B - N\hat{\Gamma}M =$
$$= 180° - (180° - \hat{B} - B\hat{E}M) - (180° - \hat{\Gamma} - \Delta\hat{\Gamma}H) =$$
$$= 180° - (180° - \hat{B} - 60°) - (180° - \hat{\Gamma} - 60°) =$$
$$= \hat{B} + \hat{\Gamma} - 60° = 180° - \hat{A} - 60° = 120° - \hat{A}.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2020»
Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right)\\
&=\left(\frac{(-6)^{16}(-6)^1}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{15}(-12)}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^{16}+(-12)\cdot\left(\frac{-12}{6}\right)^{15}+2^0\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}+(-12)\cdot(-2)^{15}+2^0\right)\cdot\left((-2)^{31}+2^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)\cdot(-2)^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)^{16}+1\right)\cdot(0+2020)=(0+1)\cdot 2020=2020.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει μία μόνο φορά με όλες τις υπόλοιπες ομάδες. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες.

Λύση

Για να έχουν οι δώδεκα ομάδες διαφορετικούς βαθμούς στον πίνακα της βαθμολογίας, δεδομένου ότι ο μέγιστος αριθμός παιγνιδιών και βαθμών είναι 11, η μοναδική δυνατή βαθμολογία είναι η παρακάτω:

O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Επομένως, αν υπάρχει τέτοια αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες, αυτή θα είναι η ενδέκατη.

Η απάντηση αυτή θα είναι αποδεκτή, εφόσον αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να προκύψει η παραπάνω βαθμολογία στο τέλος της ενδέκατης αγωνιστικής ημέρας. Πράγματι, η παραπάνω βαθμολογία είναι εφικτή, αν υποθέσουμε ότι κάθε ομάδα έχει κερδίσει όλα τα παιγνίδια με ομάδες που βρίσκονται κάτω από αυτή στη βαθμολογία, δηλαδή η Ο1 θα κερδίσει όλες τις υπόλοιπες ομάδες, η Ο2 θα κερδίσει τις Ο3 , Ο4, …Ο12, κοκ. Επομένως, η αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες είναι η ενδέκατη.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει:

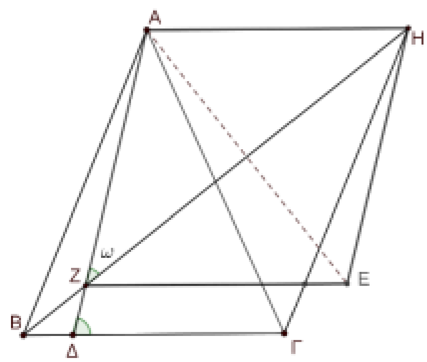
$$ΑΖ = ΒΓ.$$

Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες.

Αν $Α\hat{Ζ}Η = \omega$, τότε:

(α) Να βρείτε τη γωνία $Γ\hat{Δ}Ζ$ συναρτήσει του ω.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΓΗ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή έχουμε $ΒΓ = ΑΗ$. Όμως από υπόθεση ΑΖ = ΒΓ, οπότε θα είναι και ΑΖ = ΑΗ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει τις δύο γωνίες της βάσης του ίσες, δηλαδή

$$Α\hat{Η}Ζ = Α\hat{Ζ}Η = \omega. \qquad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΗ έχουμε ότι:

$$Ζ\hat{Α}Η = 180^0 - 2\cdot Α\hat{Ζ}Η = 180^0 - 2\omega. \qquad (2)$$

Τέλος, επειδή $ΑΗ \parallel ΒΓ$ που τέμνονται από την ΑΔ, έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$Γ\hat{Δ}Ζ + Ζ\hat{Α}Η = 180^0. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι:

$$180^0 - 2\omega + Ζ\hat{Α}Η = 180^0 \Rightarrow Ζ\hat{Α}Η = 2\omega.$$

(β) Επειδή οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΗ = ΖΕ και ΑΖ = ΗΕ. Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α) είναι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΕΗ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιες του ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2019» Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)\\&=\left(\left(\frac{-16}{-8}\right)^5+\left(\frac{-12}{6}\right)^5+1\right)\cdot\left(\left(\frac{-16}{8}\right)^3+\left(\frac{-12}{-6}\right)^3+2019\right)\\&=\left(2^5+(-2)^5+1\right)\cdot\left((-2)^3+2^3+2019\right)\\&=\left(2^5-2^5+1\right)\cdot\left(-2^3+2^3+2019\right)=1\cdot2019=2019.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x ευρώ.

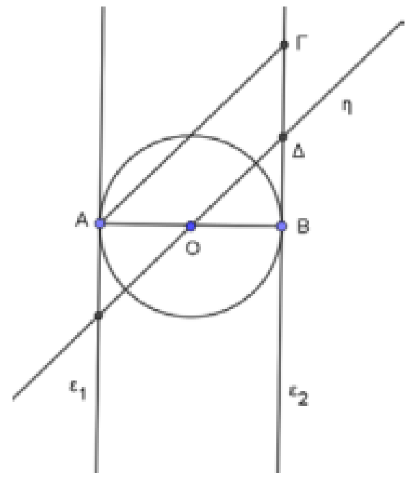
Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ ευρώ και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ ευρώ. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ ευρώ. Την τρίτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$ ευρώ.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5}=240\Leftrightarrow\frac{2x}{5}=\frac{240}{1}\Leftrightarrow 2x=1200\Leftrightarrow x=\frac{1200}{2}\Leftrightarrow x=600 \text{ ευρώ}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB, κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $OB\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $AO\Delta\Gamma$.

Λύση

(α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $A\hat{B}\Gamma = 90^0$, $AB = B\Gamma$, επομένως οι γωνίες της βάσης του $A\Gamma$ είναι 45^0 η καθεμία. Στο τρίγωνο $O\Delta B$, έχουμε $\Delta\hat{B}O = 90^0$, $\Delta\hat{O}B = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $\Gamma\hat{A}O = 45^0$ και $O\hat{\Delta}B = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $A\hat{\Gamma}B = 45^0$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο $OB\Delta$ είναι ισοσκελές και από την υπόθεση $B\Gamma = AB$ έχουμε:

$$\Delta B = OB = \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Επομένως το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

(γ) Το τετράπλευρο $AO\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του $AO, \Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο B και οι πλευρές του $A\Gamma, O\Delta$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει $AO = \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$. Επομένως, το τετράπλευρο $AO\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το 23/1 = 23.Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12. Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\frac{26}{13},\frac{25}{5},\frac{23}{1},\frac{22}{11},\frac{21}{7},\frac{20}{10},\frac{18}{9},\frac{15}{3},\frac{14}{2}\text{(υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)}$$

$$\frac{24}{8},\frac{16}{4},\frac{12}{6}\text{ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2018» Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)\\&=\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^3+\left(\frac{-12}{-3}\right)^3+10\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^2+\left(\frac{-12}{-3}\right)^2-22\right)\\&=\left((-4)^3+(+4)^3+10\right)\cdot\left((-4)^2+(+4)^2-22\right)\\&=\left(-4^3+4^3+10\right)\cdot(16+16-22)=10\cdot10=100.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A}=40^\circ$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.

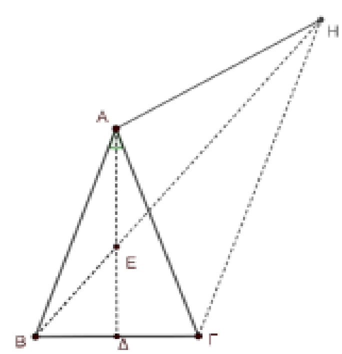
Να αποδείξετε ότι:

(α) $A\hat{H}B=20^\circ$,

(β) $A\hat{\Gamma}H=40^\circ$,

(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\widehat{A}=40^\circ$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1=B\hat{A}E=20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_1=\hat{A}_1=20^\circ$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $AB=AH$, θα ισχύει: $A\hat{H}B=\hat{B}_1=20^\circ$.

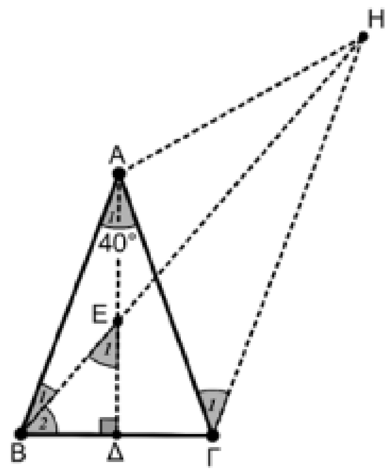
(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $A\hat{H}B=\hat{B}_1=20^\circ$ θα είναι

$$B\hat{A}H=180^\circ-\left(20^\circ+20^\circ\right)=140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$B\hat{A}H=B\hat{A}\Gamma+\Gamma\hat{A}H\Rightarrow140^\circ=40^\circ+\Gamma\hat{A}H\Rightarrow\Gamma\hat{A}H=100^\circ.$$

Επειδή $A\Gamma=AB=AH$, το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2\cdot A\hat{\Gamma}H = 180^\circ - \Gamma\hat{A}H \Rightarrow A\hat{\Gamma}H = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $A\hat{H}\Gamma = A\hat{\Gamma}H = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $A\hat{H}B = 20^\circ$, Επομένως θα έχουμε

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}\Gamma - A\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η BH είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{x}{2} + 50 \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow x = 100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y=\frac{y}{2}+40+100 \Leftrightarrow y-\frac{y}{2}=100+40 \Leftrightarrow \frac{y}{2}=140 \Leftrightarrow y=280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{z}{2}+30+280 \Leftrightarrow z-\frac{z}{2}=280+30 \Leftrightarrow \frac{z}{2}=310 \Leftrightarrow z=620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4
Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α,β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής
$\alpha=72\kappa,\ \beta=72\lambda,\ \gamma=72\mu$ (όπου κ,λ,μ διαφορετικοί ανά δύο με $\kappa<\lambda<\mu$).
Επειδή πρέπει οι αριθμοί α,β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008=14\cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa}=\frac{72\cdot 14}{72\kappa}=\frac{14}{\kappa},\quad \frac{1008}{72\lambda}=\frac{72\cdot 14}{72\lambda}=\frac{14}{\lambda},\quad \frac{1008}{72\mu}=\frac{72\cdot 14}{72\mu}=\frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ,λ,μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.
Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa<\lambda<\mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ,λ,μ) είναι:
$(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$.
Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\ \gamma=504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)=72$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\ \gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 144=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=504,\ \gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72,\beta=144,\ \gamma=504$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2017»

Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

$$A=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2=((-5)^3+(+5)^3)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2=$$

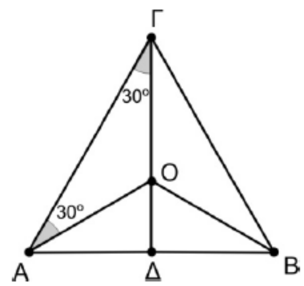
$$=(-5^3+5^3)\cdot(-8)+(+16)-(+16)=0\cdot(-8)+16-16=0.$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.

(β) Αν $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.



Λύση

(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma A = \Gamma B$ και $OA = OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{A}O = \Delta\hat{A}\Gamma - O\hat{A}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = O\hat{A}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2016»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

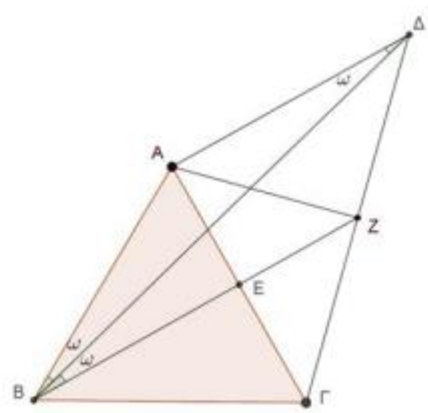
$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.



Λύση

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.

(β) Επειδή είναι $\mathrm{A\Delta}=\alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta \qquad (1)$$

Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $\mathrm{BE}\parallel \mathrm{A\Delta}$, οπότε

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}. \qquad (3)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}E}$, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{B}E} = \frac{\mathrm{A\hat{B}E}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, δηλαδή $\mathrm{A\hat{B}E} = \frac{\mathrm{A\hat{B}\Gamma}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} = 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\beta = 540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta = 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2015»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad B=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$A = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11} = 24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11} = 4+25-16+2+\frac{9}{11}$$

$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$B=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=\left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=144:9-1+\frac{5}{7}=16-1+\frac{5}{7}$$

$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $A-B=15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7}=15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7}=\frac{9}{11}-\frac{5}{7}=\frac{63-55}{77}=\frac{8}{77}>0$,

οπότε θα είναι $A>B$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(\alpha+\beta)=2(6+4)=20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $E=\alpha\beta=6\cdot 4=24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100}=6+1,2=7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100}=4-0,2=3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεών του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2\cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi'-\Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2\cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

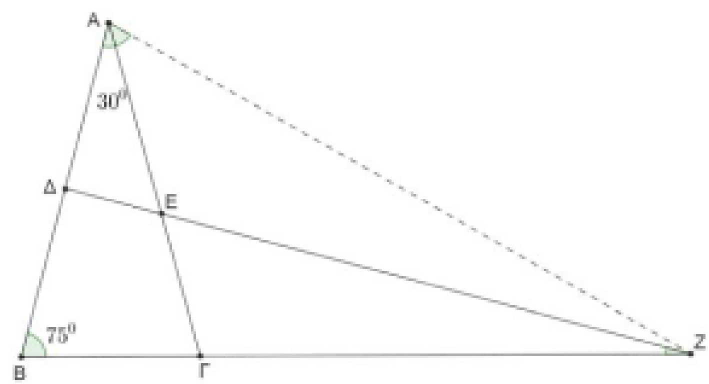
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E'-E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11) = 110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11) = 330$. Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2014»

Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^{2} : 8$$

$$= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16:8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200 - x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200 \cdot \frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} = 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800$$

$$\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200 - 80 = 120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009}>\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2013}>\frac{1012}{2015}>\frac{1012}{2017}>\frac{1012}{2019}>\frac{1012}{2021}>\frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{1012}{2009}<1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2013}<1-\frac{1012}{2015}<1-\frac{1012}{2017}<1-\frac{1012}{2019}<1-\frac{1012}{2021}<1-\frac{1012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

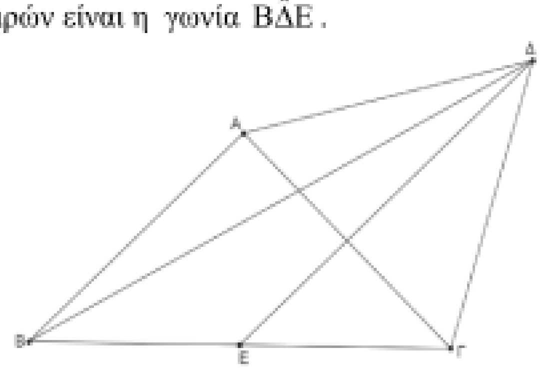
ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

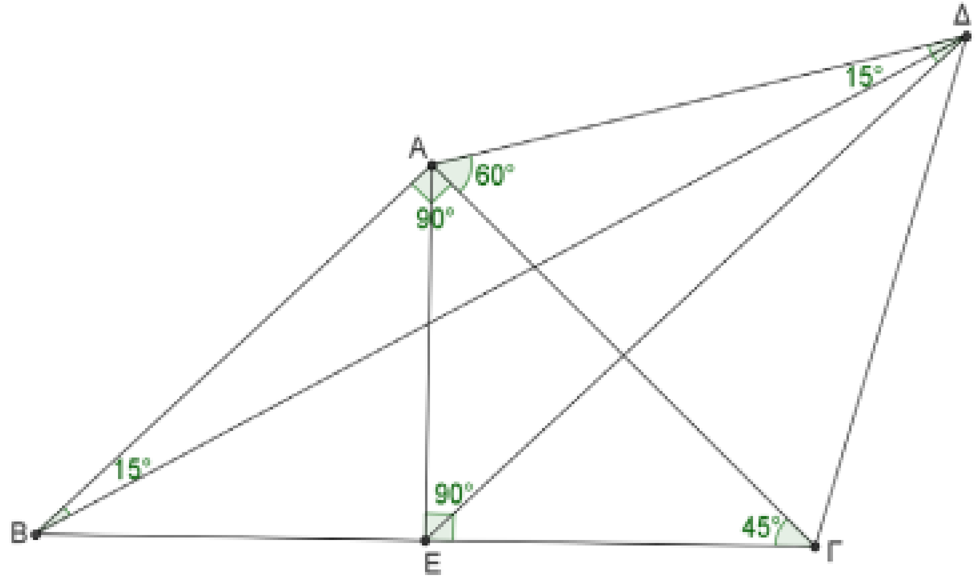
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $E\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \left(90^\circ + 45^\circ\right) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = E\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$B\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Delta = 15^\circ$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2013»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2

Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση

(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000-1360=640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

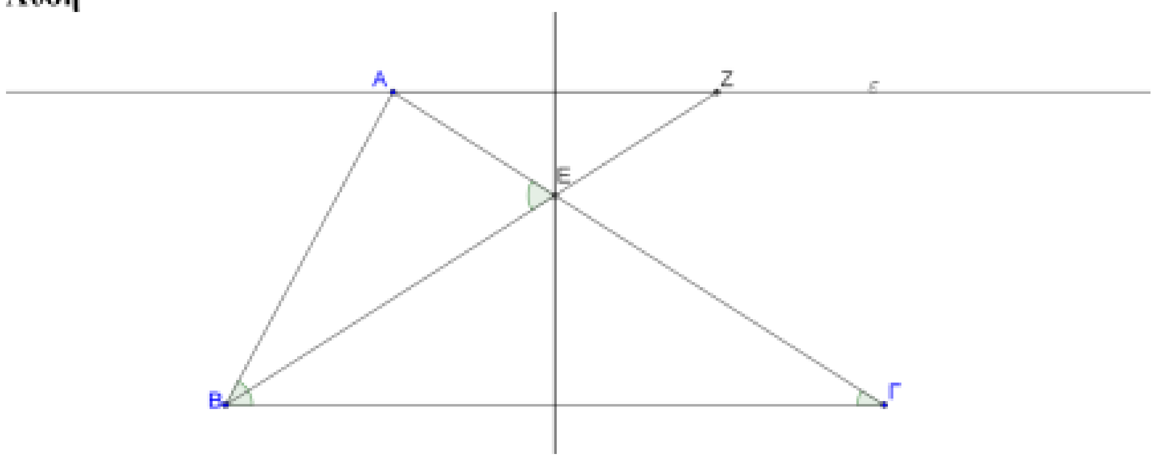
$$\frac{640}{2000}\cdot 100=\frac{64}{2}=32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $AZ=AB$, **(β)** $A\hat{E}B=\hat{B}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $EB=E\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $E\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Επειδή $AZ \parallel B\Gamma$ έπεται ότι: $E\hat{B}\Gamma=A\hat{Z}B$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{B}=2\cdot\hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$A\hat{Z}B=E\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}=\frac{\hat{B}}{2}=A\hat{B}Z.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.

(β) Η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$A\hat{E}B=E\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\Gamma}=\hat{B}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων), οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10, 2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΘΑΛΗΣ 2012»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A} = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right) = \frac{88}{5} \cdot \frac{5}{44} - \frac{39}{5} \cdot \frac{5}{39} = 2 - 1 = 1.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση

Είναι $\text{ΜΚΔ}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}$.

Για $\kappa=3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3}=\dfrac{0}{3}=0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{5}\neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

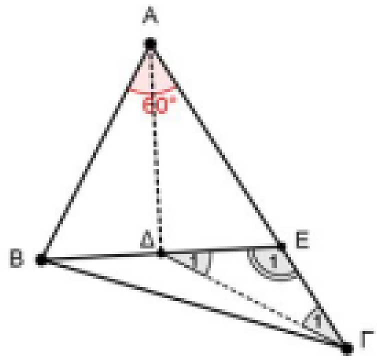
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2{,}5\cdot\dfrac{6}{100}=0{,}15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2{,}5-0{,}15=2{,}35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050+407=1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457:2{,}35=620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \frac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $AB = \alpha$.

Εφόσον $A\Gamma = \frac{3}{2} AB = \frac{3}{2}\alpha$ και $AE = AB = \alpha$, έχουμε:

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$) και η γωνία του $\hat{A}$ είναι 60°, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta E = \frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $\Delta E = E\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - A\hat{E}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2020» Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta \;,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Λύση

Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν τα άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως τα ψηφία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αρκεί να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi o\lambda.9 \,.$$

Επειδή $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έπεται ότι $10\le \alpha+\beta+\gamma+\delta \le 30$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=18,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta \text{ ή } \alpha+\beta+\gamma+\delta=27,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$$

$$\Leftrightarrow(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(1,2,6,9),(1,2,7,8),(1,3,5,9),(1,3,6,8).(1,4,5,8),(1,4,6,7),$$
$$(2,3,4,9),(2,3,5,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)\}$$

$$\text{ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(4,6,8,9),(5,6,7,9)\}.$$

Επιπλέον ένα ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε αρκεί ο ακέραιος $\overline{\gamma\delta}$ να είναι πολλαπλάσιος του 4. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις παραπάνω τετράδες στις :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,3,6,8) \text{ ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(3,4,5,6).$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι είναι οι: 13068, 34056.

Πρόβλημα 2

Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Λύση

Έστω ότι ο Γιάννης είχε α ευρώ μαζί του, οπότε η Μαρία θα είχε $600-\alpha$ ευρώ. Τότε ο Γιάννης ξόδεψε $\alpha\cdot\frac{100}{9}\cdot\frac{1}{100}=\frac{\alpha}{9}$ ευρώ, ενώ η Μαρία ξόδεψε $(600-\alpha)\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{100}=\frac{600-\alpha}{7}$.

Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\alpha}{9}+\frac{600-\alpha}{7}=80 \Leftrightarrow 7\alpha+9(600-\alpha)=5040$$

$$\Leftrightarrow 5400-2\alpha=5040 \Leftrightarrow 2\alpha=360 \Leftrightarrow \alpha=180.$$

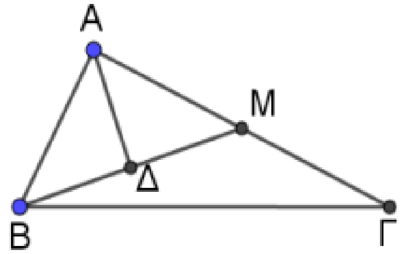
Άρα ο Γιάννης είχε μαζί του 180 ευρώ και η Μαρία είχε $600-180=420$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $ΑΒ = α\ cm$ και $ΑΓ = 2α\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.

(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Έχουμε:

$$(ΑΒΓ) = 2(ΑΒΜ) \Rightarrow \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = 2\frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΜ \Rightarrow ΑΓ = 2ΑΜ.$$

Επομένως Μ μέσον ΑΓ και Ισχύει $ΑΜ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{2α}{2} = α\ cm$. Αφού και $ΑΒ = α\ cm$, έχουμε $ΑΒ = ΑΜ$. Επομένως το σημείο Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ και αφού Δ μέσον της ΒΜ, προκύπτει ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΜ. Άρα είναι $ΑΔ \perp ΒΜ$.

Διαφορετικά, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο, άρα και ύψος.

(β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο και ύψος, το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος του. Επομένως $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Μ = 45^0$. Όμως ισχύει ότι $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Μ}Δ = 45^0$ (αφού ΑΒΜ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο) επομένως ΑΒΔ και ΑΔΜ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα δηλαδή $ΑΔ = ΔΜ = ΔΒ = \frac{ΒΜ}{2}$. Τώρα έχουμε:

$$\frac{Ε_{τετρ\ πλευράς\ ΑΔ}}{Ε_{τετρ\ πλευράς\ ΒΜ}} = \frac{ΑΔ^2}{ΒΜ^2} = \frac{ΑΔ^2}{(2ΑΔ)^2} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $Α = \overline{αβγδ}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $Β = \overline{αβγ}$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$Α - Β = \overline{αβγδ} - \overline{αβγ} = 2020.$$

Επειδή πρέπει $Α > 2020$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $α \geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha \geq 4$, τότε $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} \geq 4000$, $\mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma} < 1000$, οπότε

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{\alpha\beta\gamma} > 3000 > 2020, \text{ άτοπο.}$$

- Αν είναι $\alpha = 3$, τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{A} - \mathrm{B} &= \overline{3\beta\gamma\delta} - \overline{3\beta\gamma} \\ &= 3000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 300 - 10\beta - \gamma \\ &= 2700 + 90\beta + 9\gamma + \delta > 2020, \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$

- Αν είναι $\alpha = 2$, τότε

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} - \mathrm{B} = \overline{2\beta\gamma\delta} - \overline{2\beta\gamma} = 2020 \\ &\Leftrightarrow 2000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 200 - 10\beta - \gamma = 2020 \\ &\Leftrightarrow 1800 + 90\beta + 9\gamma + \delta = 2020 \\ &\Leftrightarrow 90\beta + 9\gamma + \delta = 220. \end{aligned}$$

  Επειδή τα β, γ, δ είναι ψηφία, θα είναι $0 \leq 9\gamma + \delta \leq 90$, οπότε πρέπει $130 \leq 90\beta \leq 220 \Leftrightarrow \beta = 2$. Τότε $9\gamma + \delta = 40 \Rightarrow 31 \leq 9\gamma \leq 40 \Rightarrow \gamma = 4$. Επομένως: $\delta = 40 - 36 = 4$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 2244$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2019» Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=(12-10)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

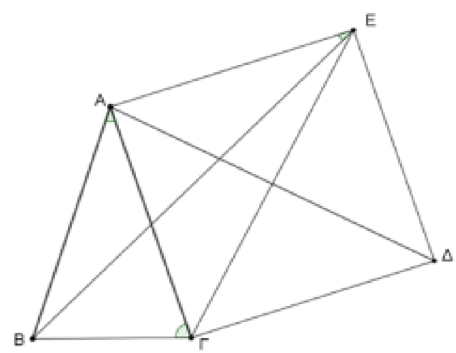
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ έπεται ότι $\hat{\Gamma}=\hat{\mathrm{B}}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$, οπότε από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{\mathrm{A}}+2\hat{\mathrm{A}}+2\hat{\mathrm{A}}=180^\circ\Rightarrow 5\hat{\mathrm{A}}=180^\circ\Rightarrow\hat{\mathrm{A}}=36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AE}$ και ισχύει ότι

$$\mathrm{B\hat{A}E}=\mathrm{B\hat{A}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{A}E}=36^\circ+90^\circ=126^\circ,$$

οπότε θα είναι $\mathrm{A\hat{E}B}=\dfrac{180^\circ-\mathrm{B\hat{A}E}}{2}=\dfrac{180^\circ-126^\circ}{2}=27^\circ$.

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}=45^\circ$. Επομένως είναι

$$\mathrm{B\hat{A}\Delta}=\mathrm{B\hat{A}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}=36^\circ+45^\circ=81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $\mathrm{\Gamma\hat{A}E}=90^\circ$ προκύπτει ότι: $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}=45^\circ$, οπότε $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}=\mathrm{A\hat{E}\Gamma}-\mathrm{A\hat{E}B}=45^\circ-27^\circ=18^\circ$.

Πρόβλημα 3
Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. Σημείωση: Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα.

Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right)\Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728\Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364\Rightarrow 3\alpha+4=364\Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση
(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: $2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7$, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.
Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A=55789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2,\ 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3$. Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.
(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2018»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$

$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot 500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

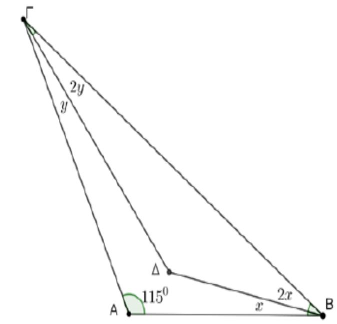
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι, άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 1, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο 14 και το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17}\cdot3^4\cdot5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός και για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Έχουμε 2 επιλογές: να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην 1^{η} περίπτωση, το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{16}\cdot3^4\cdot5^2= (2^8\cdot3^2\cdot5)^2$ και στη 2^{η} περίπτωση, το γινόμενο είναι $\Gamma = (2^{14}\cdot3^4\cdot5)^2 = = (2^8\cdot3^2\cdot5)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2: το 14 και το 2 ή το 14 και το 8.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2\cdot\Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2\cdot\Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2\cdot\Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$. τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2\cdot\Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A}+3x+3y=180^\circ \Rightarrow 3(x+y)=180^\circ-115^\circ \Rightarrow x+y=\frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ-2x-2y=180^\circ-2(x+y)=180^\circ-2\cdot\frac{65^\circ}{3}=180^\circ-\frac{130^\circ}{3}=\frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40 \Leftrightarrow \frac{12x}{15}=24 \Leftrightarrow 12x=360 \Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2017»

Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha+\beta=4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)$.

Λύση

(α) Αφού το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μη μηδενικό πρέπει $\alpha \neq 0$ και αφού το β είναι παρονομαστής πρέπει $\beta \neq 0$. Αφού α, β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha+\beta=4$ πρέπει να ισχύει $\alpha<4$ και $\beta<4$. Επομένως, έχουμε:

$$\alpha=3,\ \beta=1,\ \frac{\alpha}{\beta}=3\ ,\ \ \alpha=2,\ \beta=2,\ \frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \ \alpha=1,\ \beta=3,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

(β) Το μικρότερο από τα κλάσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι το $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)=\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot1}{3}-\frac{9}{27}\right)$$
$$=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Λύση

Επειδή είναι $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ τα δυνατά ψηφία του Α, έτσι ώστε αυτά να έχουν άθροισμα 9 είναι τα εξής:

(α) 2,6,1 (τριψήφιος αριθμός)

(β) 3,4,1,1 (τετραψήφιος αριθμός)

(γ) 2,2,3,1,1 (πενταψήφιος αριθμός)

Η μικρότερη δυνατή τιμή μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (α). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4. οι δυνατές τιμές του Α είναι οι 216 και 612. Επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι **216.**

Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (γ). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του Α πρέπει να έχουν τελευταίο διψήφιο τμήμα το 12 ή το 32. Όμως για τον προσδιορισμό της μεγαλύτερης δυνατής τιμής του Α πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 3. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α είναι **32112**.

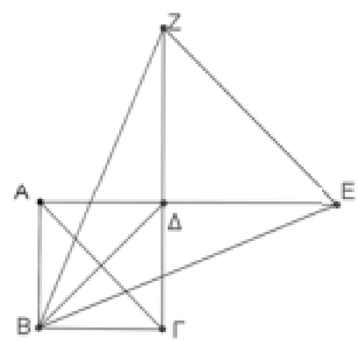
Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta Z = B\Delta$.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{B}E$ και $\Delta\hat{Z}B$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Επειδή $AE \parallel B\Gamma$ και τέμνονται από την ευθεία ΒΕ έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, δηλαδή

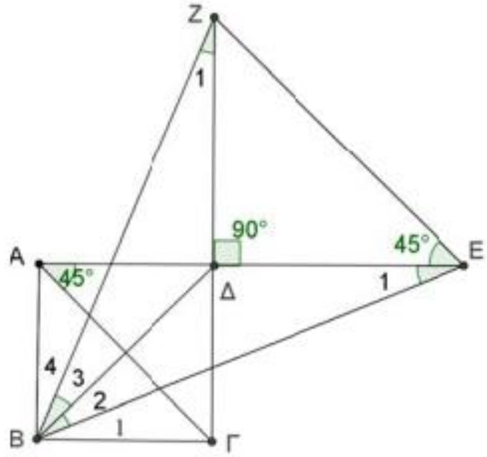
$$\hat{B}_1 = \hat{E}_1 \qquad (1)$$

Επειδή από υπόθεση $\Delta E = \Delta B$, το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\Delta\hat{B}E = \hat{B}_2 = \hat{E}_1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$\Delta\hat{B}E = \hat{B}_2 = \hat{B}_1 \qquad (3)$$



Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($B\Gamma = \Gamma\Delta$, $\hat{\Gamma} = 90^\circ$) θα έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} 2\cdot\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Gamma\hat{B}\Delta = 22,5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού ΔΒ = ΓΖ, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22,5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4}-1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4}-1\right)-1=\frac{x}{4}-2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x-4$ και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}-2-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12}-\frac{2x-8}{12}=\frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x-(2x-8)=30 \Leftrightarrow 3x-2x+8=30 \Leftrightarrow x=22.$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2016»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{gathered} \alpha = 0{,}222\ldots \\ 10\alpha = 2{,}222\ldots \\ 10\alpha = 0{,}222\ldots + 2 \\ 10\alpha = \alpha + 2 \\ 9\alpha = 2 \end{gathered}$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

Λύση

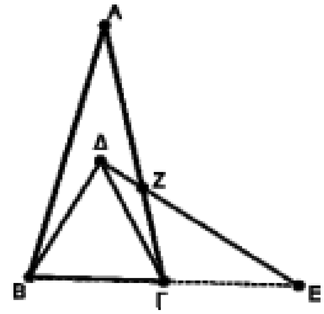
Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2\cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016 : (2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.

Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{A} = 30^0$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z , τότε:

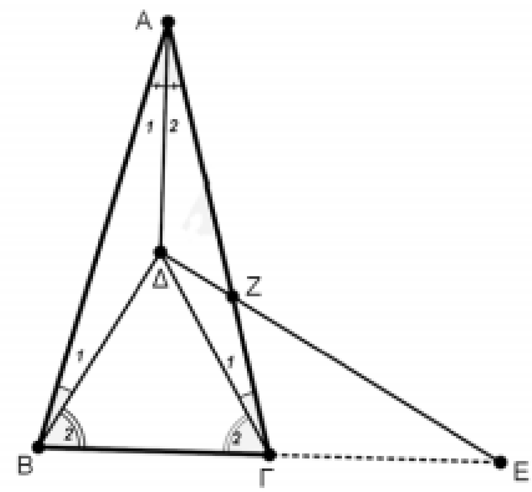


(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 30^0$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 75^0$.

Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B} - \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2 = 75^0 - 60^0 = 15^0 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 15^0 .$$

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Delta B = \Delta\Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^0 .$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.

(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta = \Gamma E$) με

$$\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma}_1 + Z\hat{\Gamma}E = 15^0 + (180^0 - \hat{\Gamma}) =$$

$$= 15^0 + 180^0 - 75^0 = 120^0 .$$

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}\Gamma = 30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = 60^\circ ,$$

έπεται ότι:

$$B\hat{\Delta}E = 180^\circ - \left(E\hat{B}\Delta + \Delta\hat{E}B\right) = 180^\circ - \left(60^\circ + 30^\circ\right) = 90^\circ ,$$

οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t + \frac{5}{4}t + \frac{5}{3}t + x = 4t \Leftrightarrow x = t\left(3 - \frac{5}{4} - \frac{5}{3}\right) = t\frac{(36-15-20)}{12} = \frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300 + y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x = \frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t = \frac{1}{12}t \Rightarrow 6000 = y + 300 \Rightarrow 5700 = y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2015»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $(3150-x)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta = \frac{3\gamma}{4},\ \alpha = \frac{2\beta}{3},\ \delta = \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha = \frac{2\beta}{3},\ \gamma = \frac{4\beta}{3},\ \delta = \frac{6\beta}{3} = 2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2} = \beta = \frac{3\gamma}{4} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2/3} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{4/3} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2, 3, 4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15 = 646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646 \cdot 2 = 1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646 \cdot 3 = 1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646 \cdot 4 = 2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646 \cdot 6 = 3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{6} = \omega \Rightarrow \alpha = 2\omega,\ \beta = 3\omega,\ \gamma = 4\omega,\ \delta = 6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

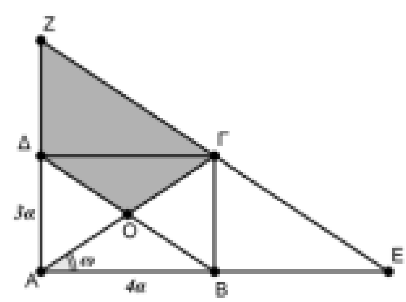
$$2\omega + 3\omega + 4\omega + 6\omega = 9690 \Leftrightarrow 15\omega = 9690 \Leftrightarrow \omega = 646.$$

Άρα είναι: $\alpha = 2\omega = 1292,\ \beta = 3\omega = 1938,\ \gamma = 4\omega = 2584,\ \delta = 6\omega = 3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B = \omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB = 4\alpha\ cm,\ A\Delta = 3\alpha\ cm.$$



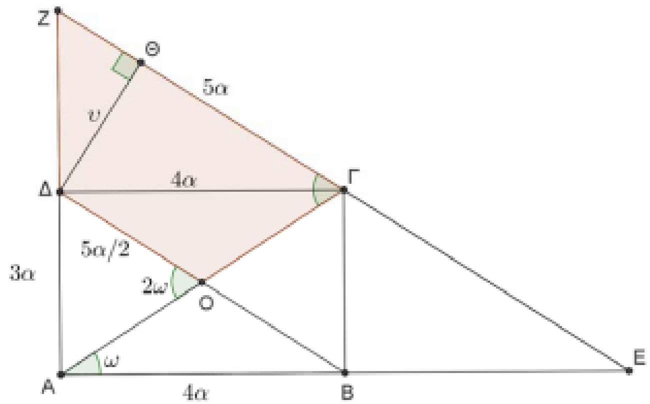
1. Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.

2. Αποδείξετε ότι: $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.

3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $O\hat{B}A = \omega = O\hat{A}B$. Η γωνία $A\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $A\hat{O}\Delta = O\hat{A}B + O\hat{B}A = 2\omega$. Από την παραλληλία $EZ \parallel B\Delta$, επειδή οι γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $A\hat{\Gamma}Z = 2\omega$.

2. Επειδή $EZ \parallel B\Delta$ και $\Gamma\Delta \parallel AE$, $B\Gamma \parallel AZ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $B\Delta = \Gamma Z = \Gamma E$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $A\Gamma = B\Delta$. Επομένως, θα είναι και $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = \Gamma Z$, οπότε το ύψος του $\Gamma\Delta = AB = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $AZ = 2 \cdot A\Delta = 6\alpha\ cm$ και $\Delta Z = 3\alpha\ cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 \Rightarrow B\Delta^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow B\Delta = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $O\Delta = \frac{B\Delta}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και $\Gamma Z = 5\alpha\ cm$.
Για το ύψος $\upsilon = \Delta\Theta$ έχουμε ότι:

$$E(\Gamma\Delta Z) = \frac{\Delta\Gamma \cdot \Delta Z}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \Delta\Theta}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$E(\Delta O\Gamma Z) = \frac{(\Delta O + \Gamma Z)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2014»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$

$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$

$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$

$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2

Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση ΑΔ, μεγάλη βάση ΒΓ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα)

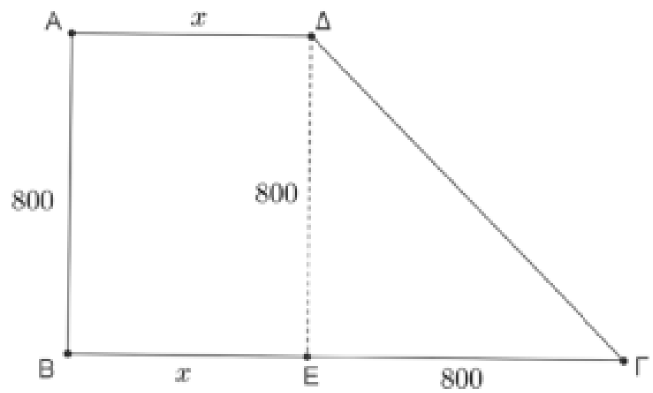
Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\mathrm{\Delta E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\mathrm{\Delta E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\mathrm{\Gamma\Delta}=800\sqrt{2}$ μέτρα.

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x)=x+800+x+800+800\sqrt{2}=2x+1600+800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x)=\frac{2x+800}{2}\cdot 800=(x+400)\cdot 800=800x+320000.$$



Σχήμα 1

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x+1600+800\sqrt{2}<2810+800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x<1210 \Leftrightarrow x<605$$

$$800x+320000>796000 \Leftrightarrow 800x>476000 \Leftrightarrow x>595$$

Επομένως έχουμε $595<x<605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x=600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $ΑΔ=600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800\cdot 600+320000=480000+320000=800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ=ΑΓ$ και $\hat{Α}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $Α\hat{Δ}Γ=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $Κ\hat{Μ}Β$ και $Μ\hat{Α}Λ$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha=ΑΔ$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{Γ}=\frac{180^\circ-\hat{Α}}{2}=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{Β}=\hat{Γ}=75^\circ$, οπότε έχουμε $Κ\hat{Μ}Β=Μ_1=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$Μ\hat{Α}Γ=Μ\hat{Γ}Α \Leftrightarrow Μ\hat{Α}Λ+\hat{Α}=\hat{Γ} \Leftrightarrow Μ\hat{Α}Λ=\hat{Γ}-\hat{Α}=75^\circ-30^\circ=45^\circ.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2013»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3 + 1000^0 + \frac{2}{9}:\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \quad \text{και} \quad B = \left(1 - \frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4} - \frac{79}{9^2}\right) + \frac{67}{41}.$$

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3 + 1000^0 + \frac{2}{9}:\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{31}\cdot\left(27 + 1 + \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{31}\cdot\left(28 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{112}{31}$$

$$B = \left(1 - \frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4} - \frac{79}{9^2}\right) + \frac{67}{41} = \frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81} - \frac{79}{81}\right) + \frac{67}{41} = \frac{1}{41}:\frac{1}{81} + \frac{67}{41} = \frac{81}{41} + \frac{67}{41} = \frac{148}{41}$$

Επειδή $A - B = \frac{112}{31} - \frac{148}{41} = \frac{112\cdot 41 - 148\cdot 31}{31\cdot 41} = \frac{4592 - 4588}{1271} = \frac{4}{1271} > 0$, έπεται ότι $A > B$.

Πρόβλημα 2

Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100} = 36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720 + 36 = 756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756 : 12 = 63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100} = 100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720 + 100,8 = 820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8 : 24 = 34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $Α\hat{Β}Γ$.

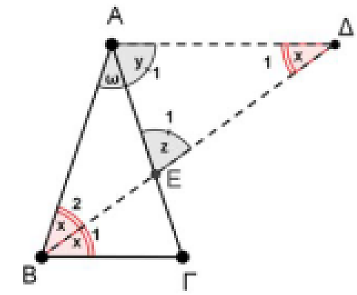
(β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $Β\hat{Α}Γ = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Delta$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$.

Οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$. Επομένως η $B\Delta$ διχοτομεί την γωνία $A\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $A\Delta E$, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Delta$, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των $A\Delta$ και $B\Gamma$ (με τέμνουσα την $A\Gamma$), έχουμε:

$$\hat{y} = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \qquad (A) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (B).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε: $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{B} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, τότε $B\hat{A}\Gamma = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60+45)-15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που

δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24 \cdot \frac{100}{10} = 240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240 \cdot \frac{60}{100} = 144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240 \cdot \frac{45}{100} = 108$.