Μετρώντας ισοσκελή τρίγωνα

Βασιλόπουλος Γεώργιος
gvasilopo@sch.gr

Θεματική Ενότητα: *Η παρουσία και ο ρόλος των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης: Μια ανοιχτή και διαρκής πρόκληση.*

Περίληψη

Η μελέτη δύο απλών προβλημάτων συνδυαστικής γεωμετρίας, που έχουν ήδη επιλυθεί, οδηγεί στη δημιουργία ενός νέου προβλήματος στο οποίο η ανακάλυψη της ύπαρξης ενός μοτίβου,οδηγεί στη μέτρηση του πλήθους ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται σε τετραγωνικό πλέγμα $n \times n$ σημείων.

Abstract

The study of two simple solved problems in combinational geometry, lead to a new problem in which a pattern recognition lead to counting the isosceles triangles which can be drawn into a $n \times n$ grid of points.

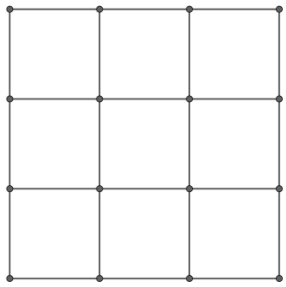
Εισαγωγή

Προβλήματα συνδυαστικής γεωμετρίας εμφανίζονται συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Για το λόγο αυτό, με αφετηρία δύο απλά προβλήματα συνδυαστικήςγεωμετρίας και βασιζόμενοι στην παρατήρηση της ύπαρξης ενός μοτίβου, οδηγούμαστε σε ένα νέο πρόβλημα,το οποίο αφορά τη μέτρηση του πλήθους ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται σε τετραγωνικό πλέγμα $n \times n$ σημείων. Άλλωστε, η μελέτη ενός μοτίβου αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές που προετοιμάζονταιγια μαθηματικούς διαγωνισμούςσε διάφορα επίπεδα (Ψύχας, 2018).

Βασιζόμενοι στις ιδιότητες της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος και του ισοσκελούς τριγώνου, θα μελετήσουμε το συνδυασμό και την εξέλιξη δύο απλών προβλημάτων. (Ευκλείδης, 2013; Ψύχας, 2012).

Πρώτο πρόβλημα

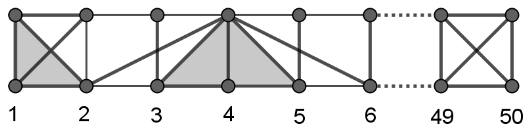
Στο πρώτο γνωστό πρόβλημα, το ζητούμενο είναι η μέτρηση του πλήθους των τετραγώνων που σχηματίζονται σε τετράγωνο πλέγμα $n \times n$σημείων, με κορυφές σημεία του πλέγματος. (Ψύχας, 2012)



Έχει αποδειχθεί, ότι το πλήθος των τετραγώνων αυτών είναι ίσο με το άθροισμα : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$

Δεύτερο πρόβλημα

Στο δεύτερο πρόβλημα, το ζητούμενο είναι η μέτρηση του πλήθους των ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται σε ορθογώνιο πλέγμα50×2 σημείων, με κορυφές σημεία του πλέγματος. (Ευκλείδης, 2013). Έχει αποδειχθεί ότι σχηματίζονται 1396 ισοσκελή τρίγωνα.



Το πρόβλημα αυτό μπορεί να γενικευτεί για ορθογώνιο πλέγμα $n \times 2$σημείων. Το πλέγμα αυτό χωρίζεται σε $n-1$τετράγωνα, μέσα σε καθένα από τα οποία σχηματίζονται 4 ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα. Συνεπώς, σχηματίζονται $4 \cdot (n-1)$ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) **Αν $\boldsymbol{n}$ άρτιος,** τότε τα σημεία του πλέγματος, στην πρώτη γραμμή, πλην του πρώτου και του τελευταίου αποτελούν κορυφή για

$\left(1 + 2 + \cdots \frac{n-2}{2}\right) + \left(\frac{n-2}{2} + \cdots + 2 + 1\right) = \frac{n(n-2)}{4}$ ισοσκελή τρίγωνα.

Συνεπώς, τα σημεία του πλέγματος και στις δύο γραμμές, πλην του πρώτου και του τελευταίου κάθε γραμμής, αποτελούν κορυφή για $\frac{n(n-2)}{2}$ ισοσκελή τρίγωνα.Τότε,σχηματίζονται συνολικά $4(n-1) +$

$\frac{n(n-2)}{2}$ισοσκελή τρίγωνα.Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτό στο πλέγμα των πλέγμα 50×2 σημείων, προκύπτει το εξής πλήθος ισοσκελών τριγώνων :

$$4 \cdot (50-1) + \frac{50(50-2)}{2} = 1396$$

β) **Αν $\boldsymbol{n}$ περιττός**, τότε τα σημεία του πλέγματος, στην πρώτη γραμμή, πλην του πρώτου, του τελευταίου και του μεσαίου σημείου αποτελούν κορυφή για$\left(1+2+\cdots\frac{n-3}{2}\right)+\left(\frac{n-3}{2}+\cdots+2+1\right)=\frac{(n-1)(n-3)}{4}$ισοσκελή τρίγωνα.

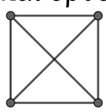
Το μεσαίο σημείο αποτελεί κορυφή για $\frac{n-1}{2}$ισοσκελή τρίγωνα.

Συνεπώς τα σημεία του πλέγματος και στις δύο γραμμές, πλην του πρώτου και του τελευταίου κάθε γραμμής, αποτελούν κορυφή για $\frac{(n-1)(n-3)}{2}+n-1$ ισοσκελή τρίγωνα.Τότε,σχηματίζονται συνολικά $4(n-1)+\frac{(n-1)(n-3)}{2}+n-1=\frac{(n-1)(n-7)}{2}$ισοσκελή τρίγωνα.

Νέο πρόβλημα

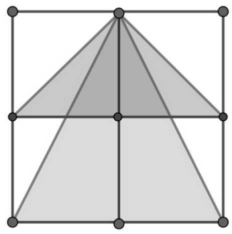
Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχειααποτελεί συνδυασμό των δύο προηγουμένων και έχει ως ζητούμενο τη μέτρηση του πλήθους των **ισοσκελών τριγώνων** που μπορούν να σχηματιστούν εντός ενός τετράγωνου πλέγματος σημείων, τα οποία θα έχουν ως κορυφές σημεία του πλέγματος και ως βάση ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τις πλευρές του μεγάλου τετραγώνου ή παράλληλο με τις διαγώνιες του μεγάλου τετραγώνου.

Η διαδικασία επίλυσης ξεκινάει από το πιο μικρό πλέγμα, αποτελούμενο από 2×2 σημεία, στο οποίο παρατηρούμε ότι κάθε σημείο του πλέγματος αποτελεί κορυφή ισοσκελούς τριγώνου. Συνεπώς, μετράμε 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία είναι και ορθογώνια.



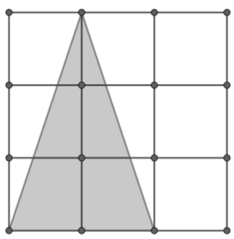
Συνεχίζουμε τη μελέτη με το τετράγωνο πλέγμα 3×3 σημείων. Στο πλέγμα αυτό σχηματίζονται 2^2 τετράγωνα 2×2 σημείων και 1 τετράγωνο 3×3 σημείων. Παρατηρούμε ότι, καθένα από τα4 σημεία τομής των πλευρών του τετραγώνου αποτελεί κορυφή 1 ισοσκελούς τριγώνου. Καθένα από τα 4 σημεία που βρίσκονται στη μεσοκάθετο κάθε πλευράς του τετραγώνου αποτελούν κορυφή 2 ισοσκελών τριγώνων. Το 1 σημείο τομής των μεσοκαθέτων αποτελεί κορυφή 4 ισοσκελών τριγώνων.

Έτσι συνολικά σχηματίζονται : (πλήθος τετραγώνων 2×2 σημείων)$\cdot$ (πλήθος ισοσκελών τριγώνων) + (πλήθος τετραγώνων 3×3 σημείων)$\cdot$ (πλήθος ισοσκελών τριγώνων) $=2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot (4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4) = 32$ ισοσκελή τρίγωνα.



Συνεχίζουμε τη μελέτη με το τετράγωνο πλέγμα 4×4 σημείων. Στο πλέγμα αυτό σχηματίζονται 3^2 τετράγωνα 2×2 σημείων, 2^2 τετράγωνα 3×3 σημείων, και 1 τετράγωνο 4×4 σημείων. Παρατηρούμε ότι, καθένα από τα 12σημεία των πλευρών του τετραγώνου αποτελεί κορυφή1 ισοσκελούς τριγώνου. Επίσης οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τετραγώνου δεν διέρχονται από σημεία του πλέγματος.
Έτσι συνολικά σχηματίζονται : (πλήθος τετραγώνων 2×2 σημείων)$\cdot$ (πλήθος ισοσκελών τριγώνων) + (πλήθος τετραγώνων 3×3 σημείων)$\cdot$ (πλήθος ισοσκελών τριγώνων) + (πλήθος τετραγώνων 4×4 σημείων)$\cdot$ (πλήθος ισοσκελών τριγώνων) $=3^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 32 + 1^2 \cdot 12 \cdot 1 = 112$ ισοσκελή τρίγωνα.

Μελετώντας τα πλέγματα των $5 \times 5,\ 6 \times 6,\ 7 \times 7,\ 8 \times 8,\ 9 \times 9$ σημείων παρατηρούμε την ύπαρξη ενός μοτίβου, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται σε πλέγμα $n \times n$ σημείων. Ωστόσο, το μοτίβο εξαρτάται από το εάν το n είναι άρτιος ή περιττός αριθμός.Έτσι, θα μελετήσουμε τις δύο περιπτώσεις χωριστά.



Αν ο αριθμός ***n* είναι άρτιος**, οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τετραγώνου δεν διέρχονται από σημεία του πλέγματος. Έτσι,καθένα από τα 4 σημεία τομής των πλευρών του τετραγώνου αποτελεί κορυφή1 ισοσκελούς τριγώνου. Επίσης,κάθε σημείο του πλέγματος που είναι και σημείο των πλευρών του τετραγώνου αποτελεί κορυφή τόσων ισοσκελών τριγώνων όσων δηλώνει το πλήθος των σημείων που μεσολαβούν μέχρι την κοντινότερη κορυφή του μεγάλου τετραγώνου. Για παράδειγμα, στο πλέγμα 6×6 σημείων, στην πρώτη γραμμή, για τα $n = 6$ σημεία του πλέγματος έχουμε $1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$ ισοσκελή τρίγωνα με κορυφή τα σημεία αυτά. Στο πλέγμα 8×8 σημείων, τα $n = 8$ σημεία της πρώτης γραμμής του πλέγματος αποτελούν κορυφές$1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 14$ ισοσκελών τριγώνων.Στο πλέγμα$n \times n$ σημείων, στην πρώτη γραμμή σημείων, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται το άθροισμα

$$1 + \left(1 + 2 + \cdots + (\tfrac{n}{2} - 1)\right) + \left(\left(\tfrac{n}{2} - 1\right) + \cdots + 2 + 1\right) + 1 =$$

$$1 + \frac{n(n-2)}{8} + \frac{n(n-2)}{8} + 1 = \frac{n(n-2)+8}{4}$$

Έτσι, τα σημεία του πλέγματος που είναι και σημεία των 4 πλευρών του τετραγώνου αποτελούν κορυφές για$4 \cdot \frac{8+n(n-2)}{4} - 4 = n(n-2) + 4$ισοσκελή τρίγωνα. Πρέπει βέβαια να αναφερθεί ότι αφαιρούμε 4 διότι τα σημεία τομής των πλευρών του τετραγώνου έχουν μετρηθεί δύο φορές, μια φορά σε κάθε πλευρά του τετραγώνου.Τελικά καταλήγουμε στο γενικό τύπο :

$$\boldsymbol{n(n-2)+4}$$

ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές τα σημεία ενός πλέγματος $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$σημείων,τα οποία ανήκουν και στις πλευρές του τετραγώνου.

Αν ο αριθμός $\boldsymbol{n}$ **είναι περιττός**, οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τετραγώνου διέρχονται από σημεία του πλέγματος.Για παράδειγμα, στην περίπτωση του πλέγματος 9×9 σημείων, τα $n = 9$ σημεία της πρώτης γραμμής του πλέγματος αποτελούν κορυφές $1 + 1 + 2 + 3 + 11 + 3 + 2 + 1 + 1 = 25$ ισοσκελών τριγώνων. Στο πλέγμα $n \times n$ σημείων, στην πρώτη γραμμή σημείων, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται το άθροισμα$1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n-3}{2}$,

$$1 + \left(1 + 2 + \cdots + \tfrac{n-3}{2})\right) + A + \left(\tfrac{n-3}{2} + \cdots + 2 + 1\right) + 1 =$$

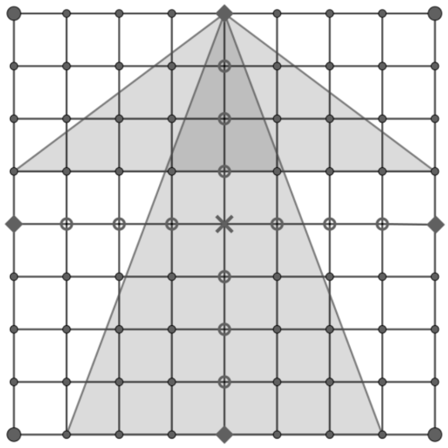
$$1 + \frac{(n-3)(n-1)}{8} + A + \frac{(n-3)(n-1)}{8} + 1 = 2 + \frac{(n-3)(n-1)}{4} + A$$

Επίσης, στο πλέγμα των 9×9 σημείων, μέσα στο αρχικό άθροισμα εμφανίζεται ο αριθμός 11, ο οποίος δηλώνει το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που έχουν ως κορυφή το κέντρο της πλευράς του τετραγώνου και προκύπτει ως το άθροισμα των 8 υπόλοιπων γραμμών του πλέγματος συν το πλήθος των 3 σημείων που μεσολαβούν μέχρι το σημείο τομής των πλευρών του τετραγώνου. Για το $n \times n$ πλέγμα σημείων, το σημείο που βρίσκεται στο κέντρο της κάθε πλευράς του τετραγώνου αποτελεί κορυφή για $A = n - 1 + \frac{n-3}{2} = \frac{3n-5}{2}$ ισοσκελή τρίγωνα, όπου $n \geq 3$.

Έτσι, **σε μια πλευρά του τετραγώνου**, αθροίζοντας το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία του πλέγματος τα οποία ανήκουν και στην πλευρά του τετραγώνου προκύπτει το άθροισμα :

$$2 + \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{3n-5}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

το οποίο είναι τέλειο τετράγωνο !



Για το $n \times n$ πλέγμα σημείων, τα σημεία που ανήκουν στο πλέγμα και στις μεσοκαθέτους των πλευρών του τετραγώνου και δεν ανήκουν στις πλευρές του τετραγώνου, αποτελούν κορυφές $2(n-3)(n-1) + 2(n-1) = 2(n-1)(n-2)$ ισοσκελών τριγώνων. Τελικά, αθροίζοντας το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται με κορυφές τα (σημεία των πλευρών τετραγώνου) + (σημεία που ανήκουν στιςμεσοκαθέτους των πλευρών του τετραγώνου και δεν ανήκουν στις πλευρές του τετραγώνου) προκύπτει το άθροισμα :

$$4 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 2(n-1)(n-2) - 4 = \mathbf{3n^2 - 4n + 1}$$

Πρέπει βέβαια να αναφερθεί ότι αφαιρούμε 4 ισοσκελή τρίγωνα διότι τα σημεία τομής των πλευρών του τετραγώνου έχουν μετρηθεί δύο φορές, μια φορά σε κάθε πλευρά του τετραγώνου.

Σε ένα τετράγωνο πλέγμα $n \times n$ σημείων γνωρίζουμε ότι σχηματίζονται $(n-1)^2$τετράγωνα 2×2 σημείων, συνεπώς $(n-1)^2 \cdot (k(k-2)+4)$ ισοσκελή τρίγωνα,όπου $k=2$
$(n-2)^2$τετράγωνα 3×3 σημείων, συνεπώς $(n-2)^2 \cdot (3k^2-4k+1)$ ισοσκελή τρίγωνα,όπου $k=3$
…
1 τετράγωνο $n \times n$ σημείων, συνεπώς :
$k(k-2)+4$, ισοσκελή τρίγωνα όπου $k=n$ και nάρτιος ή
$3k^2-4k+1$ισοσκελή τρίγωνα όπου $k=n$ και nπεριττός.

Τελικά, με το άθροισμα των παραπάνω, υπολογίζουμε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων τα οποία σχηματίζονται εντός ενός τετραγωνικού πλέγματος $n \times n$ σημείων.

Συμπέρασμα

Η μελέτη προβλημάτων συνδυαστικής γεωμετρίας είναι ενδιαφέρουσα και μας οδηγεί στη διατύπωση νέων προβλημάτων βασιζόμενοι σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Περαιτέρω, θα ήταν ενδιαφέρον η μέτρηση του πλήθους των ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν σε ένα ορθογώνιο πλέγμα $n \times m$ σημείων.

Βιβλιογραφία

1. Ευκλείδης Α΄. (2013), Περιοδικό ΕΜΕ, τ.88, σελ. 43.
2. Ψύχας, Ε. (2018) Η εξέλιξη ενός μοτίβου της Συνδυαστικής Γεωμετρίας, Πρακτικά 35ου (σελ. 1095-1104) Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Εκδόσεις ΕΜΕ, Αθήνα.
3. Ψύχας, Ε. (2012) Συνδυαστική για ολυμπιάδες (σελ. 2-4), ανακτήθηκε στις 6 Σεπτεμβρίου, 2019, από http://www.hms.gr/sites/default/files/subsites/competitions/2012/SYNDYASTIKH_01.pdf