ΘΕΜΑΤΑ Α

Α.1 Δύο ελεύθερα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ συγκρούονται και μετά την κρούση οι μεταβολές των ορμών και των κινητικών τους ενεργειών είναι $Δ\vec{p_1}$ και $ΔK_1$ για το $Σ_1$ και $Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_2$ για το $Σ_2$. Για τις μεταβολές ισχύει η σχέση :

α. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ β. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_1=ΔK_2$

γ. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_1=-ΔK_2$ δ. $Δ\vec{p_1} = Δ\vec{p_2}$

Α.2 Δύο ελεύθερα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ συγκρούονται ελαστικά και μετά την κρούση οι μεταβολές των ορμών και των κινητικών τους ενεργειών είναι $Δ\vec{p_1}$ και $ΔK_1$ για το $Σ_1$ και $Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_2$ για το $Σ_2$. Για τις μεταβολές ισχύει η σχέση :

α. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ β. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_1=ΔK_2$

γ. $Δ\vec{p_1} = -Δ\vec{p_2}$ και $ΔK_1=-ΔK_2$ δ. $Δ\vec{p_1} = Δ\vec{p_2}$

Α.3 Στην ελαστική κρούση δύο σωμάτων διατηρούνται
α. η ορμή αλλά όχι και η κινητική ενέργεια του συστήματος
β. η ορμή και η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος
γ. η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος
δ. η κινητική ενέργεια του συστήματος και η ταχύτητα του κάθε σώματος.

Α.4 Δύο σώματα με ίδιες μάζες m και ταχύτητες υ και –υ αντιστοίχως συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει:

α. ταχύτητα υ/2. β. κινητική ενέργεια μηδέν.
γ. ορμή ίση με 2mυ. δ. κινητική ενέργεια ίση με $mυ^2$.

Α.5 Κατά την έκκεντρη κρούση δύο σφαιρών:
α. δεν διατηρείται η ορμή του συστήματος.
β. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν και μετά την κρούση βρίσκονται σε τυχαίες ευθείες.
γ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν την κρούση βρίσκονται σε παράλληλες αλλά διαφορετικές ευθείες.
δ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Α.6 Μια σφαίρα μάζας, m συγκρούεται κάθετα με λείο, κατακόρυφο και ακλόνητο τοίχο με ταχύτητα υ. Η κρούση θεωρείται ελαστική και το βάρος της σφαίρας αμελητέο. Τότε
α. η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή.
β. η σφαίρα επιστρέφει με ταχύτητα μικρότερη της υ.
γ. η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.
δ. το μέτρο της μεταβολής ορμής τη σφαίρας είναι ίσο με 2mυ.

Α.7 Δύο όμοιες σφαίρες ίσης μάζας συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά με ταχύτητες $υ_1$=2m/s και $υ_2$=–3m/s. Μετά την κρούση οι ταχύτητες θα είναι:

α. V_1=3m/s και V_2=2m/s γ. V_1=3m/s και V_2=–2m/s
β. V_1=–3m/s και V_2=–2m/s δ. V_1=–3m/s και V_2=2m/s

Α.8 Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων, η διαφορά των ταχυτήτων τους πριν την κρούση είναι:
α. ίση με τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
β. αντίθετη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
γ. μεγαλύτερη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.
δ. μικρότερη από τη διαφορά των ταχυτήτων τους μετά την κρούση.

Α.9 Αν ένα κινούμενο σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα ίσης μάζας, τότε η ταχύτητά του θα:

α. διπλασιαστεί. β. αντιστραφεί. γ. μηδενιστεί δ. διατηρηθεί σταθερή.

Α.10 Μια κρούση δύο σωμάτων λέγεται πλάγια όταν
α. δεν ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ορμής.
β. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν τυχαία διεύθυνση.
γ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν την κρούση είναι παράλληλες.
δ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν την κρούση βρίσκονται στην ίδια ευθεία

Α.11 Σε μια ελαστική μετωπική κρούση **δεν** διατηρείται
α. η κινητική ενέργεια του συστήματος. β. η ορμή του συστήματος.
γ. η διεύθυνση της κίνησης των σωμάτων. δ. η ορμή του κάθε σώματος.

Α.12 Μια σφαίρα μάζας m πέφτει κατακόρυφα στο πάτωμα, και συγκρούεται με αυτό μετωπικά με ταχύτητα υ και ανακλάται κατακόρυφα με ταχύτητα υ/3. Το μέτρο της μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι:

α. 4mυ/3 β. mυ/3 γ. 2mυ/3 δ. mυ

Α.13 Καρότσι μάζας m κινείται σε οριζόντιο λείο επίπεδο με ταχύτητα υ. Μέσα στο καρότσι πέφτει σε ελεύθερη πτώση σώμα ίσης μάζας m και ενσωματώνεται. Η ταχύτητα του συσσωματώματος γίνεται:

α. υ β. 2υ γ. υ/2 δ. υ/4

Α.14 Ανταλλαγή ταχυτήτων σε μια κρούση ελεύθερων σωμάτων συμβαίνει όταν

α. οι μάζες είναι ίσες. β. η κρούση είναι ελαστική και μετωπική.
γ. η κρούση είναι ελαστική και οι μάζες ίσες. δ. η κρούση είναι ελαστική, μετωπική και οι μάζες ίσες.

Α.15 Σε κάθε κρούση δύο σωμάτων
α. τα κέντρα μάζας των σωμάτων κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση.
β. τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.
γ. ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.
δ. η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Α.16 Αν ένα κινούμενο σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο μεγαλύτερης μάζας τότε
α. το μέτρο της ταχύτητας θα ελαττωθεί και η φορά της ταχύτητας θα διατηρηθεί.
β. το μέτρο της ταχύτητας θα ελαττωθεί και η φορά της ταχύτητας θα αντιστραφεί.
γ. το μέτρο της ταχύτητας θα αυξηθεί και η φορά της ταχύτητας θα αντιστραφεί.
δ. το μέτρο της ταχύτητας θα αυξηθεί και η φορά της ταχύτητας θα διατηρηθεί.

Α.17 Αν ένα κινούμενο σώμα μάζας m_1 συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο μάζας, m_2 και η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα στο άλλο είναι η μέγιστη δυνατή τότε ισχύει:

α. $m_1>m_2$ β. $m_1<m_2$ γ. $m_1<<m_2$ δ. $m_1=m_2$

Α.18 Αν ένα κινούμενο σώμα μάζας m_1, ταχύτητας $υ_1$ συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας, m_2, τότε για τις ταχύτητες V_1, V_2 μετά την κρούση ισχύει:

α. $V_1=-υ_1$, $V_2=υ_1$ β. $V_1=0$, $V_2=0$ γ. $V_1=υ_1$, $V_2=0$ δ. $V_1=-υ_1$, $V_2=0$

Α.19 Αν ένα κινούμενο σώμα μάζας m_1, ταχύτητας $υ_1$ συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα πολύ μικρότερης μάζας, m_2, τότε για τις ταχύτητες V_1, V_2 μετά την κρούση ισχύει:

α. $V_1=υ_1$, $V_2=2υ_1$ β. $V_1=0$, $V_2=2υ_1$ γ. $V_1=υ_1$, $V_2=0$ δ. $V_1=-υ_1$, $V_2=2υ_1$

Α.20 Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει:
α. Σε πλαστικές κρούσεις γ. Μόνο στις ελαστικές κρούσεις
β. Σε όλες τις κρούσεις δ. Μόνο στις κεντρικές κρούσεις.

Α.21 Κατά την ανελαστική κρούση δύο σωμάτων
α. διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος.
β. οι μεταβολές της ορμής των σωμάτων είναι μεταξύ τους ίσες.
γ. οι μεταβολές της ορμής των σωμάτων είναι μεταξύ τους αντίθετες.
δ. οι μεταβολές της κινητικής ενέργειας των σωμάτων είναι μεταξύ τους αντίθετες.

Α.22 Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων
α. αυξάνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος.
β. μειώνεται η ορμή του κάθε σώματος.
γ. οι μεταβολές της ορμής των σωμάτων είναι μεταξύ τους ίσες.
δ. οι μεταβολές της κινητικής ενέργειας των σωμάτων είναι μεταξύ τους αντίθετες.

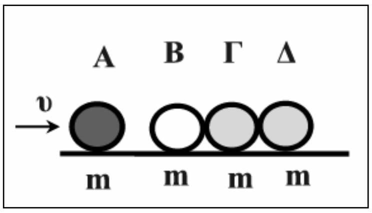
Α.23 Δύο σφαίρες με μάζες m_1, m_2 συγκρούονται κεντρικά. Οι ταχύτητες πριν την κρούση έχουν αλγεβρικές τιμές $υ_1=5m/s$ και $υ_2=3m/s$ ενώ μετά την κρούση $V_1=2m/s$ και $V_2=4m/s$.
α. οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες.
β. η κρούση είναι ελαστική.
γ. η κρούση είναι ανελαστική.
δ. οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και η κρούση ελαστική

Α.24 Σφαίρα Α μάζας m κινείται με ταχύτητα $υ_1=2m/s$ στη θετική φορά ημιάξονα Οx. Άλλη σφαίρα Β, ίσης μάζας m κινείται στον ίδιο άξονα με ταχύτητα $υ_2=-5m/s$ και συγκρούεται με την πρώτη σφαίρα μετωπικά. Μετά τη κρούση η σφαίρα Β έχει ταχύτητα $V_2=2m/s$ και η σφαίρα Α ταχύτητα $V_1=-5m/s$. Η κρούση είναι:

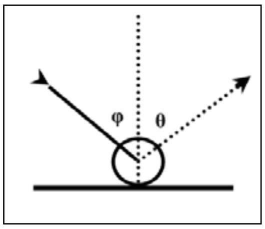
α. ελαστική β. ανελαστική γ. δεν μπορούμε να ξέρουμε

Α.25 Δύο σφαίρες ίσων μαζών κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και με την ίδια φορά με ταχύτητες $υ_1=12m/s$ και $υ_2=20m/s$. Μετά την μετωπική κρούση η σφαίρα (2) έχει ταχύτητα $V_2=18m/s$ και η σφαίρα (1) ταχύτητα $V_1\neq V_2$. Η κρούση είναι
α. ελαστική β. ανελαστική γ. πλαστική δ. είναι άγνωστο

Α.26 Οι 4 σφαίρες είναι τελείως όμοιες, ελαστικές και αρχικά ηρεμούν πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν βάλουμε την Α με ταχύτητα, υ, και όλες οι κρούσεις είναι μετωπικές και ελαστικές τότε μετά την κρούση
α. η Α θα κινηθεί αντίθετα με ταχύτητα μικρότερη της υ ενώ οι άλλες θα μείνουν ακίνητες.
β. οι Α και Δ θα κινηθούν με ταχύτητες μέτρου υ/2 αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις.
γ. η Α θα σταματήσει οι Β και Γ θα μείνουν ακίνητες ενώ η Δ θα κινηθεί με ταχύτητα, υ.
δ. η Α θα σταματήσει ενώ οι άλλες τρεις θα κινηθούν προς τα δεξιά με ταχύτητα, υ.



Α.27 Μια μπάλα μάζας m συγκρούεται ελαστικά με λείο οριζόντιο πάτωμα με την ταχύτητά της $υ_1$ να σχηματίζει γωνία φ με την κάθετο στο πάτωμα και ανακλάται με ταχύτητα $υ_2$ υπό γωνία θ με την κάθετο. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι οι σωστές και ποιες λανθασμένες;



α. Η ορμή της σφαίρας στον κατακόρυφο άξονα διατηρείται σταθερή.
β. Η ορμή της σφαίρας στον οριζόντιο άξονα διατηρείται σταθερή.
γ. Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει $υ_1=υ_2$.
δ. Για τις γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης ισχύει φ=θ.
ε. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή μόλις πριν και αμέσως μετά την κρούση.
στ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κρούσης
ζ. Αν η κρούση διαρκεί χρόνο Δt, η μέση δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το πάτωμα έχει μέτρο

$$F= mg + \frac{2mυσυνφ}{Δt}$$

Α.28 Ποιες προτάσεις είναι σωστές; Σε μια ελαστική κρούση δύο σφαιρών,
α. η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.
β. η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.
γ. η παραμόρφωση των σφαιρών δεν είναι μόνιμη.
δ. οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σφαιρών είναι συντηρητικές.
ε. τα έργα των εσωτερικών δυνάμεων που δέχονται οι σφαίρες είναι αντίθετα.

Α.29 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.
α. Ένα σύστημα μπορεί να έχει κινητική ενέργεια αλλά όχι ορμή.
β. Ένα σύστημα μπορεί να έχει ορμή αλλά όχι κινητική ενέργεια.
γ. Στην ανελαστική, μετωπική κρούση δύο σφαιρών που έχουν ίσες μάζες, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.
δ. Σε μια πλάγια και ανελαστική κρούση μεταξύ δύο ελεύθερων σωμάτων διατηρείται σταθερή η ορμή του συστήματος.
ε. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Α.30 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.

α. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας του συστήματος.
β. Κατά την κεντρική και ελαστική κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ενός σώματος είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του άλλου σώματος.
γ. Κατά την πλαστική κρούση δύο σφαιρών η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών μειώνεται.
δ. Σκέδαση στο μικρόκοσμο ονομάζεται το φαινόμενο στο οποίο τα συγκρουόμενα σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.
ε. Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων που συγκρούονται είναι αντίθετες.

Α.31 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.

α. Στην ελαστική κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται, διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.
β. Όταν μια σφαίρα συγκρούεται κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου, επιστρέφει με ταχύτητα ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς.
γ. Η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων γίνεται θερμότητα ονομάζεται ανελαστική.

δ. Όταν μια σφαίρα, Α μάζας m συγκρούεται ελαστικά και έκκεντρα με σφαίρα, Β, ίσης μάζας που είναι αρχικά ακίνητη τότε η σφαίρα, Α, σταματάει αμέσως μετά την κρούση.
ε. Όταν μια μπάλα συγκρουστεί με ακλόνητο τοίχο και ανακλαστεί στην ίδια διεύθυνση χωρίς μεταβολή στην κινητική της ενέργεια, τότε και η μεταβολή της ορμή της μπάλας κατά την κρούση είναι μηδέν.

Α.32 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.

α. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων κατά τη διάρκεια μιας κρούσης είναι πολύ μικρές.
β. Σε ένα μονωμένο σύστημα δύο σφαιρών που συγκρούονται ελαστικά, η ορμή της κάθε σφαίρας διατηρείται σταθερή.
γ. Στις κεντρικές κρούσεις τα κέντρα μάζας των ταχυτήτων των σωμάτων είναι στην ίδια ευθεία.
δ. Κατά την κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής ορμής του άλλου.
ε. Σε κάθε πλαστική κρούση όλη η κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.

Α.33 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.

α. Κατά την κρούση δύο σφαιρών η μεταβολή της ορμής της μιας σφαίρας είναι αντίθετη από τη μεταβολή ορμής της άλλης.
β. Στην ανελαστική κρούση η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος που συγκρούεται, μειώνεται.
γ. Στην πλαστική κρούση δύο σωμάτων ίσης μάζας με ίσα μέτρα ταχυτήτων το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μένει μετά την κρούση ακίνητο.
δ. Στην πλαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων ίσης μάζας με αντίθετες ταχύτητες όλη η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.
ε. Σκέδαση είναι φαινόμενο του μικρόκοσμου κατά το οποίο δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με μεγάλες σχετικά δυνάμεις για μικρό χρονικό διάστημα.

Α.34 Να χαρακτηρίσετε με (Σ) όσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και με (Λ) όσες είναι λανθασμένες.
α. Σε μια πλάγια ελαστική κρούση μιας σφαίρας με ένα ακλόνητο και λείο επίπεδο, η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.
β. Σε μετωπική, ελαστική, κρούση μιας μπάλας με ακλόνητη λεία επιφάνεια, το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μπάλας είναι 2p, αν p είναι το μέτρο της ορμής της μπάλας πριν την κρούση.
γ. Στο μικρόκοσμο δεν μπορούν να υπάρχουν απολύτως ελαστικές κρούσεις.
δ. Σε μια πλάγια ελαστική κρούση μιας σφαίρας με ένα ακλόνητο και λείο επίπεδο, το μέτρο της ταχύτητας πρόσπτωσης είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας ανάκλασης.
ε. Σε κάθε πλαστική κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.
στ. Στο μακρόκοσμο δεν μπορούν να υπάρχουν απολύτως ελαστικές κρούσεις.

Απαντήσεις

1(α), 2(γ), 3(γ), 4(β). 5(γ), 6(δ), 7(δ), 8(β), 9(γ), 10(β), 11(δ), 12(α), 13(γ), 14(δ), 15(γ), 16(β), 17(δ), 18(δ), 19(α), 20(γ), 21(γ), 22(δ), 23(β), 24(α), 25(β), 26(γ), 27(Λ,Σ,Σ,Σ,Σ,Λ,Σ), 28(αγδε), 29(ΣΛΛΣΣ), 30(ΛΛΣΣΛ) 31(ΛΛΣΛΛ), 32(ΛΛΣΣΛ), 33(ΣΛΛΣΣ) 34(ΣΣΛΣΣΣ)

ΘΕΜΑΤΑ Β

B.1 Ένα ελαφρύ και ένα βαρύτερο βλήμα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

I. Ποιο από τα δύο έχει μεγαλύτερη ορμή;
II. Ποιο από τα δύο μπορεί να διεισδύσει οριζόντια περισσότερο σε ένα ακλόνητο στόχο;

α. το βαρύτερο β. το ελαφρύτερο γ. κανένα από τα δύο

Απάντηση

I. Υπάρχει μια σχέση που συνδέει K, m και p.

$K=\frac{m\upsilon^2}{2}$ (1) και $p=m\upsilon \rightarrow \upsilon=\frac{p}{m}$ (2) Άρα από (1) και (2)$\rightarrow$ $\mathbf{K=\frac{p^2}{2m}}\rightarrow p=\sqrt{2Km}$

Αν $K_1=K_2$ και $m_1>m_2$ τότε $\mathbf{p_1>p_2}$ άρα μεγαλύτερη ορμή έχει το βαρύτερο οπότε σωστό είναι το **(α)**.

II. Το βάθος διείσδυσης, δηλαδή η μετατόπιση σχετίζεται με την κινητική ενέργεια. Αν γράψουμε το ΘΜΚΕ θεωρώντας σταθερή τη δύναμη αντίστασης του υλικού του στόχου θα δούμε ότι:

$W=\Delta K \rightarrow -F\Delta x=K_{τελ}-K_{αρχ}\rightarrow \Delta x=\frac{K}{F}$

Συνεπώς η διείσδυση θα είναι ίδια και σωστό είναι το **(γ)**

B.2 Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ταχύτητες υ_1, υ_2 πριν την κρούση και, V_1, V_2 μετά την κρούση, ισχύει μεταξύ των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων, η σχέση:

α. $\upsilon_1-\upsilon_2=V_1-V_2$ β. $\upsilon_1-\upsilon_2=V_2-V_1$ γ. $\upsilon_1+\upsilon_2=V_1+V_2$

Απάντηση

ΑΔΟ: $m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1V_1+m_2V_2 \rightarrow$ $m_1(\upsilon_1-V_1) = m_2(V_2-\upsilon_2)$ (1)

ΑΔΚΕ: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow$ $m_1(\upsilon_1-V_1)(\upsilon_1+V_1)= m_2(V_2-\upsilon_2)(V_2+\upsilon_2)$ (2)

$\frac{(1)}{(2)}\rightarrow \upsilon_1+V_1=V_2+\upsilon_2\rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1-\upsilon_2=V_2-V_1}$ (3) Σωστό είναι το **(β).**

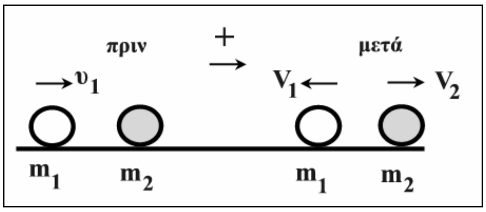
Η σχέση (3) αναφέρεται σε αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων που μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές ανάλογα με τη θετική φορά που έχουμε ορίσει. Η ίδια σχέση ισχύει και ως διανυσματική σχέση, $\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ για κάθε ελαστική κρούση κεντρική ή πλάγια.

Β.3 Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ταχύτητα υ_1 με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Μετά την κρούση η σφαίρα m_1 κινείται αντίθετα ως προς την αρχική της κατεύθυνση με το 1/5 της αρχικής τιμής της ταχύτητάς της. Για το λόγο των μαζών των δύο σφαιρών ισχύει:

α. $m_2/m_1=3/2$ β. $m_2/m_1=2/3$ γ. $m_2/m_1=3$ δ. $m_2/m_1=2$

Απάντηση

Από τη ΑΔΟ και την ΑΔΚΕ για την ελαστική κρούση, προκύπτουν οι σχέσεις:



$p_{\pi\rho o}=p_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow m_1\upsilon_1=m_1V_1+m_2V_2$

$K_{\pi\rho o}=K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2$

Από τη λύση του συστήματος έχουμε:

$$V_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (1) \quad \text{και } V_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

Αλλά αφού η m_1 ανακλάται, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι $V_1=-\upsilon_1/5$ (3)

Από (1) και (3)$\rightarrow -\frac{\upsilon_1}{5}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1\rightarrow 5m_1-5m_2=-m_1-m_2\rightarrow 6m_1=4m_2\rightarrow \mathbf{\frac{m_2}{m_1}=\frac{3}{2}}$ Σωστό είναι το **(α)**

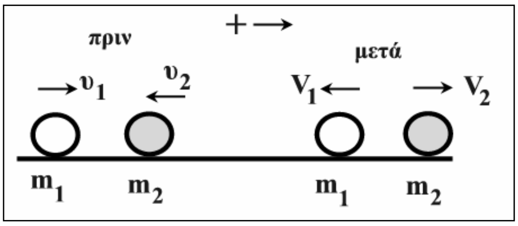
Β.4 Σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 ταχύτητας μέτρου $|\upsilon_1|=\upsilon$ συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με δεύτερη σφαίρα Σ_2 μάζας m_2 η οποία κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ίσου μέτρου, $|\upsilon_2|=\upsilon$. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες τα μέτρα των οποίων έχουν τη σχέση $|V_1|=5|V_2|$. Για τις μάζες των σφαιρών ισχύει η σχέση :

α. $m_2=2m_1$ β. $m_1=m_2$ γ. $m_1=5m_2$, δ. $m_2=5m_1$

Απάντηση

Θεωρούμε ως θετική τη φορά κίνησης της σφαίρας Σ_1. Άρα οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων πριν την κρούση είναι, $\upsilon_1=\upsilon$ και $\upsilon_2=-\upsilon$ και η σχέση των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι $V_1=-5V_2$.

Από τις (ΑΔΟ) (1) και (ΑΔΚΕ) (2) και την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι (3) και (4):



ΑΔΟ: $m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1V_1+m_2V_2$ (1) και ΑΔΚΕ: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2$ (2)

$$V_1=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_1+2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2} \quad (3) \quad \text{και} \quad V_2=\frac{(m_2-m_1)\upsilon_2+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \quad (4)$$

$V_1=-5V_2\rightarrow \frac{(m_1-m_2)\upsilon+2m_2(-\upsilon)}{m_1+m_2}=-5\cdot\frac{(m_2-m_1)(-\upsilon)+2m_1\upsilon}{m_1+m_2}\rightarrow \ldots.. \rightarrow \mathbf{m_2=2m_1}$. Άρα σωστό το **(α)**

Β.5 Σφαίρα Α μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2. Το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μεταφέρεται από την Α στο Β κατά την κρούση γίνεται μέγιστο όταν:

α. $m_1=m_2$ β. $m_1=2m_2$ γ. $m_1=4m_2$ δ. $m_2=4m_1$

Απάντηση

Σε κάθε ελαστική κρούση ισχύουν ταυτόχρονα η αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) και η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας (ΑΔΚΕ) για το σύστημα των δύο σωμάτων που συγκρούονται. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν οι ταχύτητες μετά την κρούση που είναι:

$$V_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \qquad \text{και} \qquad V_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

Στην ελαστική κρούση το μέρος της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α που μεταβιβάζεται στη σφαίρα, Β είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α. Το ποσοστό θα είναι:

$$\frac{|\Delta K_1|}{K_{1\pi\rho o}}=\frac{|K_{1\mu\varepsilon\tau\alpha}-K_{1\pi\rho o}|}{K_{1\pi\rho o}}=\frac{|½m_1V_1^2-½m_1\upsilon_1^2|}{½m_1\upsilon_1^2}=|\frac{V_1^2}{\upsilon_1^2}-1|=|(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2})^2-1|=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|\Delta K_1|}{K_{1\pi\rho o}}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\ .$$

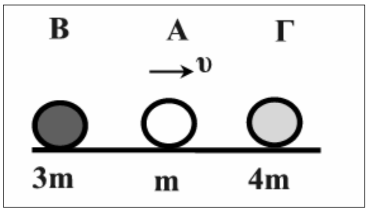
Αν $m_1=m_2$ τότε: $\frac{|\Delta K_1|}{K_{1\pi\rho o}}=1$ ή αλλιώς 100%, δηλαδή μέγιστο. Άρα σωστό είναι το **(α).**

Η σφαίρα m_1 ακινητοποιείται, αφού χάνει όλη της την κινητική ενέργεια.

Β.6 Τρεις σφαίρες, Α, Β, Γ με μάζες m, 3m, 4m ηρεμούν αρχικά σε λείο οριζόντιο επίπεδο με τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία. Η σφαίρα Α εκτοξεύεται με ταχύτητα υ προς τη σφαίρα Γ. Όλες οι κρούσεις που συμβαίνουν είναι μετωπικές και ελαστικές. Ο συνολικός αριθμός των κρούσεων είναι:

α. μία β. δύο γ. τρεις

Απάντηση



$1^η$ κρούση. Η σφαίρα Α πέφτει με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πάνω στην αρχικά ακίνητη σφαίρα Β. Μετά την ελαστική κρούση η Α έχει ταχύτητα $\vec{V_1}$ και η Γ , $\vec{V_2}$. Από την ΑΔΟ και ΑΔΚΕ μετά τη λύση του συστήματος οι ταχύτητες αυτές είναι:

$V_1=\frac{m-4m}{m+4m}\upsilon\rightarrow V_1=-\frac{3\upsilon}{5}$ (η σφαίρα Α ανακλάται) και $V_2=\frac{2m}{m+4m}\upsilon\rightarrow V_2=\frac{2\upsilon}{5}$ (πάει δεξιά)

$2^η$ κρούση. Η σφαίρα Α που ανακλάται συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με την αρχικά ακίνητη σφαίρα Β. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση είναι: $V_1{'}=\frac{m-3m}{m+3m}V_1=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3\upsilon}{5})\rightarrow V_1{'}=\frac{3\upsilon}{10}$ άρα η Α τώρα κινείται προς τα δεξιά αλλά με ταχύτητα μικρότερη από την V_2 της σφαίρας Β. Οπότε είναι αδύνατον να την προλάβει και να γίνει και τρίτη κρούση. Άρα το σωστό είναι το **(β).**

B.7 Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2=3m_1$. Μετά την κρούση η σφαίρα m_1 κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική και έχει το ¼ της αρχικής της κινητικής ενέργειας. Η κρούση των δύο σφαιρών είναι:

α. ελαστική β. ανελαστική

Απάντηση

Γράφουμε τη ΑΔΟ: $m_1\upsilon_1= - m_1V_1+m_2V_2 \to m_1\upsilon_1=-m_1V_1+3m_1V_2 \to \upsilon_1=3V_2-V_1$ (1)

Από τα δεδομένα έχουμε: $\frac{1}{2} m_1V_1^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2) \to V_1=\frac{\upsilon_1}{2}$ (2)

Από (1) και (2)$\to \upsilon_1=3V_2-\frac{\upsilon_1}{2} \to V_2=\frac{\upsilon_1}{2}$ (3)

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $K_{αρχ}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $K_{τελ}=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}3m_1V_2^2=\frac{1}{2}m_1(\frac{\upsilon_1^2}{4}+\frac{3\upsilon_1^2}{4})=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$

Άρα, $\mathbf{K_{αρχ}=K_{τελ}}$, η κρούση είναι ελαστική. Σωστό είναι το **(α).**

B.8 Σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ορμή $\vec{p}_1$ και συγκρούεται μετωπικά με σφαίρα μάζας m_2 που κινείται σε αντίθετη ορμή $\vec{p}_2$. Τα σώματα λόγω της κρούσης ανταλλάσσουν κινητικές ενέργειες. Η σχέση των μαζών είναι:

α. $m_1=4m_2$ β. $m_1=2m_2$ γ. $m_1=3m_2$ δ. $m_1=m_2$

Απάντηση

Αφού τα σώματα ανταλλάσσουν κινητικές ενέργειες ισχύει $K_{1μ}=K_{2π}$ και $K_{1π} = K_{2μ}$

Αν προσθέσουμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε ότι $K_{1π}+K_{2π}= K_{1μ}+ K_{2μ}$, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή πριν και μετά την κρούση οπότε η κρούση είναι ελαστική.

Από την ΑΔΟ έχουμε:

$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{P}_1+\vec{P}_2$. (1) Από τα δεδομένα ισχύει επίσης: $\vec{p}_1=-\vec{p}_2 \to p_1=-p_2$ (2)

Από (1) και (2) $\to \vec{P}_1=-\vec{P}_2 \to$ $P_1=-P_2$ (3) για τις αλγεβρικές τιμές των ορμών μετά την κρούση.

Από τη ΑΔΚΕ για το σύστημα : $K_{1π}+K_{2π}= K_{1μ}+ K_{2μ} \to \frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2} \overset{(2)(3)}{\clubsuit}$

$p_1^2(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})=P_1^2(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}) \to p_1^2=P_1^2 \to p_1=\pm P_1$

$p_1=P_1$, άτοπο γιατί τότε θα ήταν σαν να μην έγινε κρούση.

$p_1=-P_1$ (4)

Από (3) και (4) $\to p_1=P_2$ (5)

Αλλά από τα δεδομένα ισχύει: $K_{1π} = K_{2μ} \to \frac{p_1^2}{2m_1}=\frac{P_2^2}{2m_2} \overset{(5)}{\clubsuit}$ $\mathbf{m_1=m_2}$. Άρα σωστό είναι το **(δ).**

B.9 Δύο σώματα Σ_1, Σ_2, με μάζες m_1 και m_2 με $m_1 << m_2$ κινούνται στην ίδια ευθεία με αντίθετες ταχύτητες ίσου μέτρου υ. Μετά την ελαστική τους κρούση το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, Σ_1, θα είναι :

α. υ β. 2υ γ. 3υ δ. 4υ

Απάντηση

Από την (ΑΔΟ) και (ΑΔΚΕ) προκύπτει:

ΑΔΟ: $m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1V_1+m_2V_2 \rightarrow \quad m_1(\upsilon_1-V_1) = m_2(V_2-\upsilon_2)$ (1)

ΑΔΚΕ: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow \quad m_1(\upsilon_1-V_1)(\upsilon_1+V_1)= m_2(V_2-\upsilon_2)(V_2+\upsilon_2)$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \upsilon_1+V_1=V_2+\upsilon_2 \rightarrow V_2= \upsilon_1- \upsilon_2+V_1$ (3)

Από (1) και (3) και μετά από τις πράξεις προκύπτουν:

$V_1=\frac{2m_2\upsilon_2+(m_1-m_2)\upsilon_1}{m_1+m_2}$ (4) και $V_2=\frac{2m_1\upsilon_1+(m_2-m_1)\upsilon_2}{m_1+m_2}$ (5)

Θέτω στη (4) $m_1<<m_2$, $\upsilon_1=\upsilon$ και $\upsilon_2=-\upsilon$ οπότε: $V_1=\frac{2m_2(-\upsilon)-m_2\upsilon}{m_2} \rightarrow \mathbf{V_1=-3\upsilon}$.

Άρα το μέτρο είναι 3υ και σωστό είναι το **(γ).**

B.10 Σφαίρας μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 ($m_1>m_2$).
Ι. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 36% τότε για τις μάζες ισχύει η σχέση:

α. $m_2=m_1$ β. $m_1=9m_2$ γ. $m_1=4m_2$

ΙΙ. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των μαζών ώστε το ποσοστό μεταφοράς ενέργειας να είναι 100%;

α. $m_2=m_1$ β. $m_1=2m_2$ γ. $m_2=2m_1$

Απάντηση

Ι. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 36% τότε στη σφαίρα m_1 απέμεινε το 64% της αρχικής της κινητικής ενέργειας, δηλαδή
$K_{1(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=0{,}64K_{1(\pi\rho o)} \rightarrow \frac{1}{2}m_1V_1^2=0{,}64\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow V_1=\pm 0{,}8\upsilon_1$
Επειδή το $m_1>m_2$ η σφαίρα m_1 διατηρεί την αρχική φορά κίνησης συνεπώς $V_1=+0{,}8\upsilon_1$
$V_1=0{,}8\upsilon_1 \rightarrow \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=0{,}8\upsilon_1 \rightarrow \mathbf{m_1=9m_2}$. Άρα σωστό είναι το **(β)**

ΙΙ. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 100% τότε στη σφαίρα m_1 απέμεινε το 0% της αρχικής της κινητικής ενέργειας, δηλαδή σταμάτησε, οπότε $V_1=0 \rightarrow \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=0 \rightarrow \mathbf{m_1=m_2}$. Άρα σωστό είναι το **(α)**.

Β.11 Σφαίρας μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 ($m_1<m_2$). Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 75% τότε για τις μάζες ισχύει η σχέση:

α. $m_2=2m_1$ β. $m_2=3m_1$ γ. $m_2=4m_1$

Απάντηση

Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 75% τότε στη σφαίρα m_1 απέμεινε το 25% της αρχικής της κινητικής ενέργειας, δηλαδή

$K_{1(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=0{,}25K_{1(\pi\rho o)}\rightarrow \frac{1}{2}m_1V_1^2=0{,}25\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\rightarrow V_1=\pm 0{,}5\upsilon_1$

Επειδή το $m_2>m_1$ η σφαίρα m_1 αντιστρέφει τη φορά κίνησης συνεπώς $V_1=-0{,}5\upsilon_1$

$V_1=-0{,}5\upsilon_1 \rightarrow \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=-0{,}5\upsilon_1\rightarrow \mathbf{m_2=3m_1}$. Άρα σωστό είναι το **(β)**

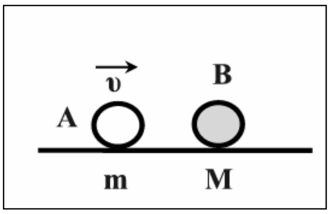
Β.12 Σφαίρα Α μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με ταχύτητα υ με άλλη αρχικά ακίνητη σφαίρα, Β, μάζας Μ.
Να δείξετε ότι για να αποκτήσει η σφαίρα Β μετά την κρούση

Ι. μέγιστη ταχύτητα πρέπει να ισχύει: $m/M\rightarrow\infty$

ΙΙ. μέγιστη κινητική ενέργεια πρέπει να ισχύει: $m/M=1$

ΙΙΙ. μέγιστη ορμή, πρέπει να ισχύει $m/M\rightarrow 0$

Απάντηση



Ι. Η ταχύτητα της Μ μετά την κρούση είναι: $V_2=\frac{2m}{m+M}\upsilon \rightarrow V_2=\frac{2\upsilon}{1+\frac{M}{m}}$

Για να είναι η V_2 =max θα πρέπει: $1+\frac{M}{m}=\min\rightarrow\frac{M}{m}\rightarrow 0 \rightarrow\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{M}}\rightarrow\infty$

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το σώμα Β είναι πολύ – πολύ ελαφρύτερο του σώματος Α.

ΙΙ. Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας στην ελαστική κρούση έχουμε:

$K_{\pi\rho o}=K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow K_{A(\pi\rho o)}=K_{A(\mu\varepsilon\tau\alpha)}+K_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}\rightarrow K_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=K_{A(\pi\rho o)}-K_{A(\mu\varepsilon\tau\alpha)}\rightarrow$

$\rightarrow K_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1V_1^2$

Για να είναι η $K_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}$=max πρέπει να είναι $V_1=0\rightarrow\frac{m-M}{m+M}\upsilon=0\rightarrow m-M=0\rightarrow$ **$m/M=1$**

Δηλαδή οι μάζες να είναι ίσες οπότε να γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων και όλη η κινητική ενέργεια της Α να μεταβιβάζεται στη Β μετά την κρούση

ΙΙΙ. Από την ΑΔΟ στην κρούση έχουμε:

$p_{\pi\rho o}=p_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow p_{A(\pi\rho o)}=p_{A(\mu\varepsilon\tau\alpha)}+p_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}\rightarrow p_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=p_{A(\pi\rho o)}-p_{A(\mu\varepsilon\tau\alpha)}\rightarrow p_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}=m\upsilon-mV_1$.

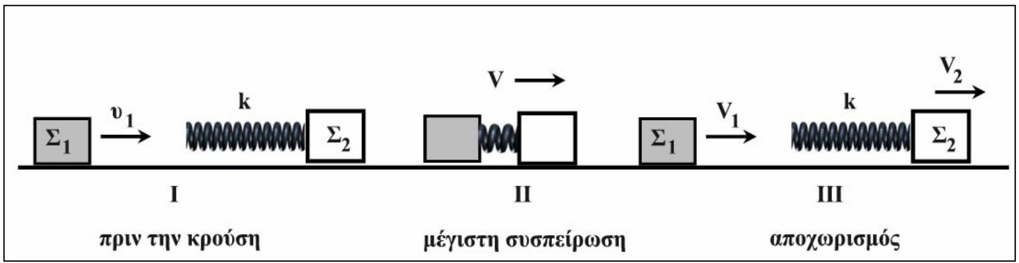
Για να έχει η σφαίρα Β μέγιστη ορμή πρέπει $p_{B(\mu\varepsilon\tau\alpha)}$=max$\rightarrow V_1=-\upsilon$ δηλαδή η σφαίρα Α να γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου, υ. Τότε:

$V_1=-\upsilon\rightarrow\frac{m-M}{m+M}\upsilon=-\upsilon\rightarrow m-M=-m-M\rightarrow 2m=0\rightarrow m=0$, άρα **$m/M\rightarrow 0$.**

Πρακτικά αυτό σημαίνει η σφαίρα m να είναι πολύ ελαφρύτερη της Μ ή για παράδειγμα μια μπάλα του τένις να συγκρούεται ελαστικά με ένα ακίνητο παγόβουνο.

Β. 13 Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=m ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με κινητική ενέργεια, K=100J. Μπροστά απ' αυτό, ηρεμεί άλλο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=m. Το σώμα $Σ_2$ φέρει πίσω του στερεωμένο οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k=10^4$N/m, αμελητέας μάζας. Κατά τη σύγκρουση που ακολουθεί το ελατήριο παραμορφώνεται τα σώματα πλησιάζουν και στην συνέχεια απομακρύνονται, μέχρι να αποκτήσει και πάλι το ελατήριο το φυσικό του μήκος.
Ι. Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι:
α. x=0,01m β. x=0,001m γ. x=0,005m δ. x=0,1m

ΙΙ. Οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων όταν το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος είναι:
α. $K_1=0$, $K_2=K$ β. $K_1=K/4$, $K_2=3K/4$ γ. $K_1=K_2=K$ δ. $K_1=K_2=K/2$



Απάντηση

Ι. Το m_1 με ταχύτητα $υ_1$ συγκρούεται με το ελατήριο. Το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Η δύναμη του ελατηρίου, F=kx, επιβραδύνει το m_1 και επιταχύνει το m_2. Για όσο διάστημα το m_1 έχει μεγαλύτερη ακόμα ταχύτητα από το m_2 τα σώματα πλησιάζουν και το ελατήριο συσπειρώνεται. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V. Τότε το ελατήριο θα έχει τη μέγιστη συσπείρωση, x_m. Αμέσως μετά η ταχύτητα του m_1 θα είναι μικρότερη αυτής του m_2, το m_1 θα μένει πίσω, το m_2 θα φεύγει μπροστά και τα σώματα θα απομακρύνονται. Τότε όμως η συσπείρωση του ελατηρίου θα μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί και τα σώματα να αποχωριστούν με ταχύτητες V_1, V_2.
Γράφω ΑΔΟ από την κατάσταση (Ι) στη (ΙΙ): $m_1υ_1=m_1V+m_2V \rightarrow \mathbf{V=}\ υ_1/2$

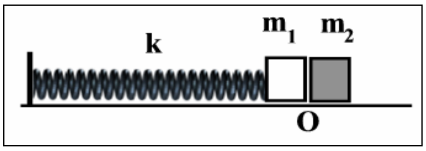
Γράφω ΑΔΜΕ από (Ι) → (ΙΙ): $½m_1υ_1^2 =½(m_1+m_2)V^2+½kx_m^2 \rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2=\frac{1}{2}(2m_1)\frac{υ_1^2}{4}+½kx_m^2 \rightarrow$

$K=\frac{K}{2}+\frac{kx_m^2}{2} \rightarrow x_m=\sqrt{\frac{K}{k}} \rightarrow \mathbf{x_m=0,1m}$ Σωστό το **(δ)**

ΙΙ. Γράφω ΑΔΟ και ΑΔΜΕ για το σύστημα μεταξύ των καταστάσεων (Ι) και (ΙΙΙ). Αφού η συσπείρωση έχει μηδενιστεί οι μηχανικές ενέργειες είναι μόνο κινητικές, δηλαδή ισχύουν οι αρχές διατήρησης της ελαστικής κρούσης. Από τη λύση του συστήματος (1) και (2) προκύπτουν:

(1) $m_1υ_1 =m_1V_1+m_2V_2$ και $½m_1υ_1^2+ =½m_1V_1^2+½m_2V_2^2$ (2). Από τη λύση του συστήματος:
$V_1=\frac{(m_1-m_2)υ_1}{m_1+m_2} \rightarrow V_1=0 \rightarrow \mathbf{K_1=0}$ και $V_2=\frac{2m_1υ_1}{m_1+m_2}=υ_1 \rightarrow \mathbf{K_2=K.}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β. 14 Στο διπλανό σχήμα συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά x_1 από τη θέση ισορροπίας Ο και αφήνουμε το σώμα m_1 ελεύθερο να κινηθεί χωρίς τριβές. Όταν επανέρχεται στο Ο έχει ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $m_2=3m_1$. Μετά την κρούση, η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι x_2 και ισχύει η σχέση:



α. $x_2=2x_1$ β. $x_2=x_1$ γ. $x_1=2x_2$ δ. $x_1=3x_2$

Απάντηση

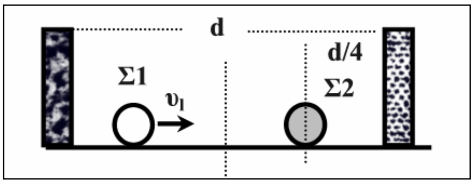
Το σώμα m_1 φτάνει στο Ο με ταχύτητα $υ_1$. Από την ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}kx_1^2= \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ (1)

Μετά την ελαστική κρούση το m_1 αποκτά ταχύτητα V_1: $V_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 \rightarrow V_1=-υ_1/2$ (2)

Το ελατήριο συσπειρώνεται κατά x_2: Από την ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2$ (3)

Από (1)÷(3)$\rightarrow \frac{x_1^2}{x_2^2}=\frac{υ_1^2}{V_1^2}\rightarrow\frac{x_1^2}{x_2^2}=4\rightarrow$ $\mathbf{x_1=2x_2}$ Σωστό είναι το **(γ)**

Β.15 Οι δύο τοίχοι του σχήματος απέχουν απόσταση d. Η σφαίρα $Σ_1$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με την ακίνητη σφαίρα $Σ_2$, που απέχει απόσταση d/4 από τον δεξιό τοίχο. Μετά την κρούση οι σφαίρες αφού συγκρουστούν ελαστικά από μια φορά με τους δύο τοίχους αριστερά και δεξιά, συναντιούνται και πάλι στο μέσον της απόστασης, d. Οι κινήσεις των σφαιρών θεωρούνται μεταφορικές και χωρίς τριβές. Η σχέση των αλγεβρικών τιμών της ταχύτητας V_1 της σφαίρας $Σ_1$ μετά την πρώτη κρούση με την αρχική ταχύτητα $υ_1$ είναι:



α. $V_1=-5υ_1/4$ β. $V_1=-5υ_1/8$ γ. $V_1=-3υ_1/2$

Απάντηση

Για να συναντηθούν και πάλι στο μέσο της απόστασης πρέπει μετά την κρούση η $Σ_1$ να διανύσει απόσταση x_1=d+(d/4)=5d/4 σε χρόνο t με ταχύτητα V_1 και η $Σ_2$ απόσταση x_2= (d/4) +(d/2)=3d/4 στον ίδιο χρόνο, t, με ταχύτητα V_2. Άρα

$x_1=|V_1|t$ και $x_2=|V_2|t$ Άρα: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{|V_1|}{|V_2|}\rightarrow\frac{|V_1|}{|V_2|}=\frac{5}{3}$.

Επειδή κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις η σχέση αλγεβρικών τιμών είναι $\frac{V_1}{V_2}=-\frac{5}{3}$ (1)

Από την ελαστική κρούση ισχύουν: $V_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$ (2) και $V_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}$ (3)

Από (1)(2)(3)$\rightarrow$ $m_2=\frac{13m_1}{3}$ (4)

Από (2)και (4)$\rightarrow$ $\mathbf{V_1=-5υ_1/8}$ Άρα σωστή είναι η **(β)**

Β.16 Σώμα μάζας m που έχει κινητική ενέργεια K_0 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα ίσης μάζας m. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα συσπειρώνει ένα σύστημα δύο παράλληλων όμοιων ελατηρίων. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που απορροφά το κάθε ελατήριο είναι:

α. K_0 β. $K_0/2$ γ. $K_0/4$ δ. $K_0/8$

Απάντηση

$p_{προ}=p_{μετα} \rightarrow mυ=2mV \rightarrow V=υ/2$ $K_{προ}=K_0=mυ^2/2$ $K_{μετα}=\frac{1}{2}(m+m)V^2=\frac{1}{4}mυ^2=\frac{1}{2}K_0$

Από την ΑΔΜΕ: $K_{μετα}=U_{ελ1}+U_{ελ2} \rightarrow \frac{K_0}{2}=2U_{ελ} \rightarrow \mathbf{U_{ελ}=K_0/4}$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**

Β.17 Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Η τιμή του ποσοστού, της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών, που έγινε θερμότητα είναι:

α. $π\%=\frac{m_1}{m_1+m_2}100\%$ β. $π\%=\frac{m_2}{m_1+m_2}100\%$ γ. $π\%=\frac{m_2}{m_1}100\%$

Απάντηση

$p_{προ}=p_{μετα} \rightarrow m_1υ_1=(m_1+m_2)V \rightarrow V=\frac{m_1υ_1}{m_1+m_2}$ (1)

$$π\%=\frac{ΔK}{K_{προ}}100\%=\frac{½(m_1+m_2)V^2-½m_1υ_1^2}{½m_1υ_1^2}100\%=[\frac{(m_1+m_2)V^2}{m_1υ_1^2}-1]100\%=[\frac{m_1}{m_1+m_2}-1]100\%=-\frac{m_2}{m_1+m_2}100\%$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σφαιρών είναι $-\frac{m_2}{m_1+m_2}100\%$.

Η απόλυτη τιμή της μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με τη θερμότητα που παράγεται λόγω της πλαστικής κρούσης, άρα και το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα είναι $\frac{m_2}{m_1+m_2}100\%$. Σωστό είναι το **(β).**

Β.18 Σώμα Α μάζας Μ είναι ακίνητο και σώμα Β μάζας m συγκρούεται με το Α μετωπικά και πλαστικά. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το 1/3 της κινητικής ενέργειας που είχε μόλις πριν την κρούση. Τότε θα ισχύει:

α. $\frac{m}{M}=\frac{1}{6}$ β. $\frac{m}{M}=2$ γ. $\frac{m}{M}=\frac{1}{3}$ δ. $\frac{m}{M}=\frac{1}{2}$

Απάντηση

$p_{προ}=p_{μετα} \rightarrow mυ=(M+m)V \rightarrow V=\frac{mυ}{M+m}$

$K_{μετα}=\frac{K_{προ}}{3} \rightarrow ½(M+m)V^2=\frac{½mυ^2}{3} \rightarrow (M+m)\frac{m^2υ^2}{(M+m)^2}=\frac{mυ^2}{3} \rightarrow \frac{m}{M+m}=\frac{1}{3} \rightarrow \mathbf{\frac{m}{M}=\frac{1}{2}}$ Σωστό είναι το **(δ).**

Β.19 Σώμα μάζας m , το οποίο έχει κινητική ενέργεια Κ συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας 4m. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση είναι:

α. $-5K/4$ β. $-K$ γ. $5K/4$ δ. $-2K$

Απάντηση

Από την ΑΔΟ έχουμε: $m\upsilon_1 - 4m\upsilon_2 = 0 \rightarrow \upsilon_1 = 4\upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1/4$ (1)

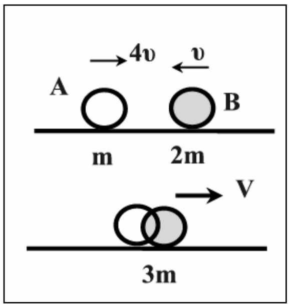
$K_{\pi\rho o} = ½ m\upsilon_1^2 + ½ 4m\upsilon_2^2 = ½ m\upsilon_1^2 + 2m(\upsilon_1/4)^2 \rightarrow K_{\pi\rho o} = \frac{5}{8} m\upsilon_1^2 = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = \frac{5}{4}K$

$K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = 0$. Άρα $\Delta K = K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} - K_{\pi\rho o} = -\mathbf{\frac{5}{4}K}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.20 Δύο σώματα Α και Β με μάζες m και 2m αντίστοιχα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες μέτρου 4υ και υ αντίστοιχα. Η τιμή του ποσοστού της αρχικής μηχανικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα κατά την κρούση είναι:

α. $\frac{25}{27}K_{\alpha\rho\chi}$ β. $\frac{2}{7}K_{\alpha\rho\chi}$ γ. $\frac{2}{5}K_{\alpha\rho\chi}$

Απάντηση



$p_{\pi\rho o} = p_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m(4\upsilon) - 2m\upsilon = 3mV \rightarrow V = 2\upsilon/3$ (1)

$K_{\pi\rho o} = ½\, m(4\upsilon)^2 + ½\, 2m\upsilon^2 = 9m\upsilon^2$

$K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = ½\, 3mV^2 = ½\, 3m\frac{4\upsilon^2}{9} = \frac{2m\upsilon^2}{3}$

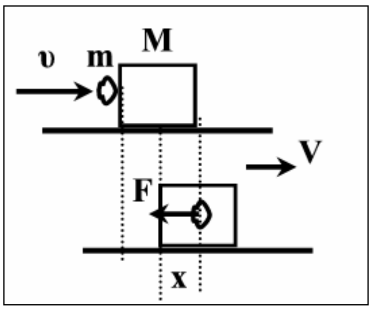
$\Delta K = K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} - K_{\pi\rho o} = \frac{2m\upsilon^2}{3} - 9m\upsilon^2 = -\frac{25m\upsilon^2}{3}$

Το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα:

$\frac{\Delta K}{K_{\pi\rho o}} = \frac{-\frac{25m\upsilon^2}{3}}{9m\upsilon^2} = -\frac{25}{27} \rightarrow \left|\frac{\Delta K}{K_{\pi\rho o}}\right| = \frac{25}{27} \rightarrow |\Delta K| = \frac{25}{27}K_{\pi\rho o}$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.21 Βλήμα μάζας m με οριζόντια ταχύτητα, υ, σφηνώνεται κατά x_1 σε ακλόνητο ξύλινο κύβο, μάζας, Μ, με Μ=4m. Αν ο ίδιος κύβος ήταν ελεύθερος να κινηθεί χωρίς τριβές, το ίδιο βλήμα με τον ίδιο τρόπο σφηνώνεται κατά x_2. Αν υποθέσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η μέση αντίσταση του ξύλου, F, είναι η ίδια, τότε η σχέση των x_1, x_2 είναι:

α. $x_2 = x_1$ β. $x_2 = 1{,}2x_1$ γ. $x_2 = 0{,}8x_1$ δ. $x_2 = 0{,}2x_1$



Αν ο κύβος είναι ακλόνητος από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$-Fx_1 = 0 - ½ m\upsilon^2 \rightarrow Fx_1 = ½ m\upsilon^2$ (1)

Αν ο κύβος είναι ελεύθερος ισχύει η ΑΔΟ κατά την κρούση:

$m\upsilon = (M+m)V \rightarrow V = \upsilon/5$

Αν το βλήμα εισχωρεί κατά x_2 τότε το έργο της F είναι $-Fx_2$ και από το ΘΜΚΕ έχουμε και πάλι

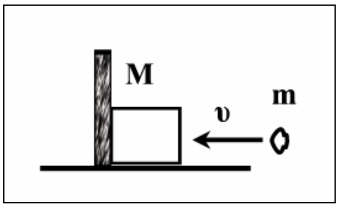
$-F\cdot x_2 = ½(m+M)V^2 - ½ m\upsilon^2 \rightarrow F\cdot x_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{5}{2}m\frac{\upsilon^2}{25} \rightarrow F\cdot x_2 = \frac{2}{5}m\upsilon^2$ (2)

Από (1) (2)$\rightarrow$ $\mathbf{x_2 = 0{,}8x_1}$ Το σωστό είναι το **(γ)**

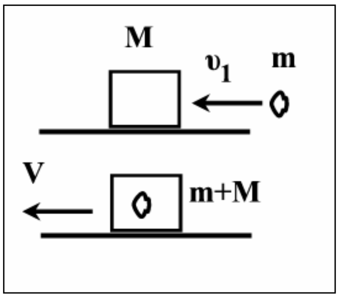
Β.22 Στο διπλανό σχήμα βλήμα μάζας m που κινείται οριζόντια σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας M=3m που ακουμπά σε τοίχο. Η ελάχιστη κινητική ενέργεια που απαιτείται για να σφηνωθεί όλο το βλήμα στο ξύλο είναι K. Αν δεν υπάρχει τοίχος και το σώμα μάζας M είναι ελεύθερο να κινηθεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, η ελάχιστη απαιτούμενη κινητική ενέργεια ώστε το βλήμα να σφηνωθεί όλο στο σώμα είναι:

α. K/3 β. 5K/4 γ. 4K/3

Απάντηση



Αν το σώμα M είναι ακλόνητο: Τότε η ελάχιστη απαιτούμενη κινητική ενέργεια του βλήματος για να εισχωρήσει ολόκληρο μέσα στο σώμα M ισούται με την θερμότητα που παράγεται λόγω πλαστικής κρούσης. Άρα $Q=K=½mυ^2$, όπου υ η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση.



Αν το σώμα M είναι ελεύθερο να κινηθεί μετά την κρούση. Τότε το βλήμα πρέπει να έχει ελάχιστη κινητική ενέργεια $K_1=½mυ_1^2$ για να καταφέρει να εισχωρήσει όλο μέσα στο σώμα M. Η K_1 πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη K αφού τώρα μέρος της κινητικής ενέργειας της K_1 θα γίνει και κινητική του συσσωματώματος M+m, δηλαδή, $K_1=Q+K_{συσ}$.

Τότε όμως ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$p_{προ}=p_{μετ}\rightarrow mυ_1=(m+M)V\rightarrow V=υ_1/4$$

Οπότε η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση θα είναι:

$$K_{συσ}=\frac{1}{2}(M+m)V^2=\frac{1}{2}4m\frac{υ_1^2}{16}\rightarrow K_{συσ}=\frac{K_1}{4}$$

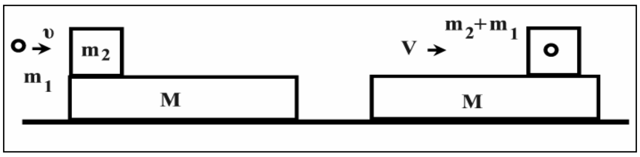
$$K_1=Q+K_{συσ}\rightarrow K_1=K+K_{συσ}\rightarrow K_1=K+\frac{K_1}{4}\rightarrow \mathbf{K_1=\frac{4K}{3}}$$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**

Β.23 Σώμα, Σ, μάζας m_2=m ισορροπεί πάνω σε πλατφόρμα μάζας M=8m όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα $Σ_2$ παρουσιάζει με την πλατφόρμα τριβές ολίσθησης. Βλήμα μάζας m_1=m που κινείται οριζόντια σφηνώνεται με ταχύτητα υ στο σώμα Σ. Η συνολική θερμότητα Q, που εκλύθηκε λόγω τριβής από τη στιγμή που άρχισε η κρούση συσσωμάτωμα και πλατφόρμα να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα είναι:

α. $Q=\frac{9mυ^2}{20}$ β. $Q=\frac{5mυ^2}{20}$ γ. $Q=\frac{3mυ^2}{20}$

Απάντηση

Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα μάζας m_1+m_2 ολισθαίνει με τριβές πάνω στην πλατφόρμα την οποία παρασέρνει σε κίνηση αφού το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Κάποια στιγμή το m_1+m_2 και η πλατφόρμα αποκτούν κοινή ταχύτητα V. Γράφω της ΑΔΟ από τη στιγμή λίγο πριν την κρούση μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα:



$m_1υ=(m_1+m_2+M)V\rightarrow mυ=10mV\rightarrow V=υ/10$ (1)

Η συνολική θερμότητα, Q, που οφείλεται στην πλαστική κρούση και στην ολίσθηση ισούται με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος από τη στιγμή λίγο πριν την κρούση μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα:

$$Q=|ΔK_{ολ}|=|K_{τελ}-K_{αρχ}|=|½(m_1+m_2+M)V^2-½m_1υ^2|\rightarrow \mathbf{Q=\frac{9mυ^2}{20}}$$ Σωστό είναι το **(α)**

Β.24 Μια μπάλα μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ συγκρούεται μετωπικά με κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ/4.

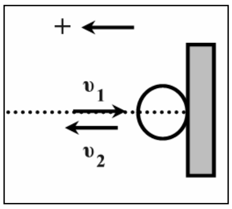
Ι. Το μέτρο της μεταβολής ορμής της μπάλας λόγω της κρούσης είναι:

α. μηδέν β. 3mυ/4 γ. 5mυ/4

ΙΙ. Η κρούση είναι: α. ελαστική β. ανελαστική

ΙΙΙ. Σε ποια περίπτωση η δύναμη που δέχεται ο τοίχος από τη μπάλα είναι μεγαλύτερη; Στην περίπτωση που ανακλάται με υ/4 ή στην περίπτωση που η κρούση είναι ελαστική. Υποθέτουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ο χρόνος επαφής μπάλας τοίχου είναι ο ίδιος, Δt.

Απάντηση



Ι. Θεωρούμε ως θετική τη φορά της επιστροφής. Έτσι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων της σφαίρας πριν και μετά την κρούση είναι $υ_1=-υ$ και $υ_2=υ/4$.

Η διανυσματική μεταβολή της ορμής δίνεται από τη σχέση: $\vec{Δp}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$

Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι:

$Δp=mυ_2-mυ_1=m\frac{υ}{4}-m(-υ)\rightarrow \mathbf{Δp=\frac{5mυ}{4}}$ Σωστό είναι το **(γ)**

ΙΙ. Αφού μειώθηκε το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας, υπάρχει απώλεια στην κινητική της ενέργειας. Ο τοίχος είναι ακλόνητος πριν και μετά την κρούση, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος «σφαίρα – τοίχος» μειώνεται. Συνεπώς η κρούση είναι ανελαστική. Σωστό είναι το **(β).**

ΙΙΙ. Η δύναμη που δέχεται ο τοίχος είναι αντίθετη από αυτή που δέχεται η μπάλα από αυτόν κατά τη διάρκεια της κρούσης. Αν θεωρηθεί σταθερή είναι: $F=\frac{Δp}{Δt}$

Στην περίπτωση της ανελαστική κρούσης η δύναμη είναι: $\mathbf{F_1=\frac{5mυ}{4\cdot Δt}}$

Στην περίπτωση της ελαστικής κρούσης θεωρούμε ότι συγκρούεται η σφαίρα μάζας m με τη Γη μάζας M>>>m. Τότε $υ_2=\frac{m-M}{m+M}υ_1\rightarrow υ_2=-(-υ)\rightarrow υ_2=υ$. Συνεπώς $υ_1=-υ$ και $υ_2=υ$. Η μεταβολή της ορμής είναι: $Δp=mυ_2-mυ_1=mυ-(-mυ)=2mυ$. Άρα $\mathbf{F_2=\frac{2mυ}{Δt}}$

Συνεπώς $\mathbf{F_2>F_1}$.

Β.25 Μια σφαίρα μάζας m, με ορμή $p_1=p=mυ_1$ συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με χαλύβδινη λεία οριζόντια επιφάνεια υπό γωνία $φ=45^0$ και ανακλάται.

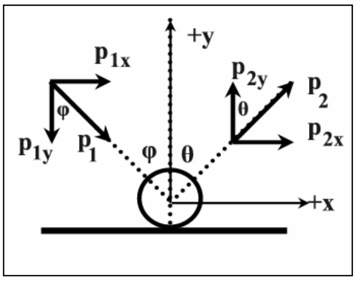
Ι. Το μέτρο μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι: α. $p\sqrt{2}$ β. 2p γ. $p\sqrt{3}$

ΙΙ. Αν η κρούση με το πάτωμα διαρκεί χρόνο Δt, το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το πάτωμα είναι: α. $F=mg-\frac{p\sqrt{2}}{Δt}$ β. F=mg γ. $F=mg+\frac{p\sqrt{2}}{Δt}$

Απάντηση

I. Η σφαίρα προσκρούει στο πάτωμα με ταχύτητα υ_1 υπό γωνία φ και ανακλάται με ταχύτητα υ_2 υπό γωνία, θ.

Στον άξονα x, η $\Sigma F_{\varepsilon\xi,x}=0 \rightarrow p_{1x}=p_{2x} \rightarrow m\upsilon_{1x}=m\upsilon_{2x} \rightarrow \upsilon_{1x}=\upsilon_{2x}$ (1)



Στον άξονα y θεωρούμε ότι συγκρούονται ελαστικά η σφαίρα μάζας, m με την ακίνητη Γη μάζας, M>>>m. Η σφαίρα ανακλάται στον άξονα y με ταχύτητα:

$\upsilon_{2y}=\dfrac{m-M}{m+M}\upsilon_{1y} \rightarrow \upsilon_{2y}=-\upsilon_{1y}$ (2)

$\upsilon_1=\sqrt{\upsilon_{1x}^2+\upsilon_{1y}^2}$ και $\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_{2x}^2+\upsilon_{2y}^2}$ Από (1)(2)$\rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon}$ (3)

από την $p_{1x}=p_{2x} \rightarrow m\upsilon_1\eta\mu\varphi=m\upsilon_2\eta\mu\theta \overset{(3)}{\clubsuit} \eta\mu\varphi=\eta\mu\theta \rightarrow \boldsymbol{\varphi=\theta=45^0}$

Η μεταβολή ορμής ισούται με τη μεταβολή ορμής μόνο στον άξονα των y άρα:

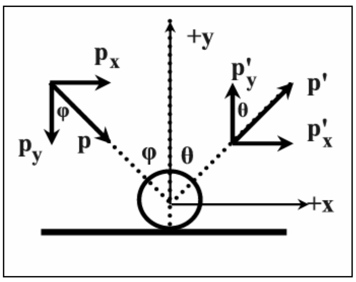
$\Delta p=\Delta p_y=p_{2y}-p_{1y}=m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta-(-m\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi)=2p\sigma\upsilon\nu\theta=2p\dfrac{\sqrt{2}}{2}=p\sqrt{2} \rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta p=p\sqrt{2}}$ Σωστό είναι το **(α)**

II. Στον άξονα y ισχύει: $\Sigma F_y=\dfrac{\Delta p_y}{\Delta t} \rightarrow F-mg=\dfrac{p\sqrt{2}}{\Delta t} \rightarrow \boldsymbol{F=mg+\dfrac{p\sqrt{2}}{\Delta t}}$ Σωστό είναι το **(γ)**

B.26 Μια σφαίρα πέφτει πάνω σε οριζόντιο δάπεδο υπό γωνία φ ως προς την κάθετο σε αυτό και ανακλάται με αντίστοιχη γωνία θ. Να συγκριθούν οι γωνίες φ και θ στις εξής περιπτώσεις.
I. Η κρούση είναι ελαστική.
II. Κατά την κρούση η σφαίρα παραμορφώνεται μόνιμα, αλλά δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σφαίρας και δαπέδου.
III. Κατά την κρούση η σφαίρα παραμορφώνεται παροδικά και αναπτύσσεται τριβή μεταξύ αυτής και του δαπέδου.
Σε όλες τις περιπτώσεις να μη ληφθεί υπόψη η δύναμη του βάρους.

Απάντηση

I. Κρούση ελαστική: Αποδείξαμε στην προηγούμενη ερώτηση $\upsilon=\upsilon'$. (1)



Στον άξονα x, η $\Sigma F_x=0 \rightarrow p_x=p'_x \rightarrow m\upsilon\eta\mu\varphi=m\upsilon'\eta\mu\theta \overset{(1)}{\clubsuit} \eta\mu\varphi=\eta\mu\theta \rightarrow \boldsymbol{\varphi=\theta}$

II. Λόγω παραμόρφωσης η κινητική ενέργεια της σφαίρας μειώνεται. Όμως στον άξονα x δεν αναπτύσσεται τριβή, άρα η ορμή στον άξονα αυτόν διατηρείται.

$K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}<K_{\pi\rho o} \rightarrow ½m\upsilon'^2<½m\upsilon^2 \rightarrow \upsilon'<\upsilon$ (2)

Στον άξονα x, η $\Sigma F_x=0 \rightarrow p_x=p'_x \rightarrow p\eta\mu\varphi=p'\eta\mu\theta \rightarrow m\upsilon\eta\mu\varphi=m\upsilon'\eta\mu\theta \rightarrow \eta\mu\theta=\dfrac{\upsilon\eta\mu\varphi}{\upsilon'} \overset{(2)}{\clubsuit} \boldsymbol{\theta>\varphi}$

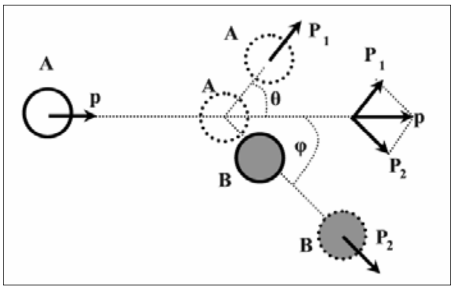
III. Η σφαίρα παραμορφώνεται παροδικά άρα διατηρείται η κινητική της ενέργεια και τα μέτρα των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι ίσα., δηλαδή $\upsilon=\upsilon'$.

Στον άξονα x, η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής προς την αρνητική κατεύθυνση και το μέτρο της ορμής της μειώνεται, άρα: $p_x>p'_x \rightarrow m\upsilon\eta\mu\varphi>m\upsilon'\eta\mu\theta \rightarrow \eta\mu\theta<\eta\mu\varphi \rightarrow \boldsymbol{\theta<\varphi}$

B.27 Σφαίρα $Σ_1$, μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα $Σ_2$, μάζας m_2, που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες V_1,V_2. Ο λόγος των μαζών τους m_1/m_2 είναι:

α. 1 β. 2 γ. ½

Απάντηση



Η ορμή του συστήματος διατηρείται: $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \rightarrow p^2= p_1^2+p_2^2$ (1)

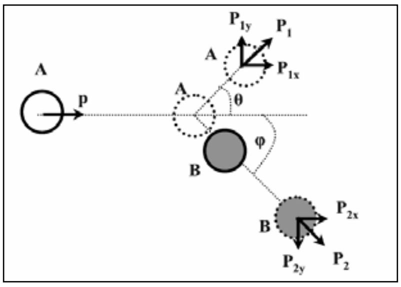
Η κρούση είναι ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$K_{προ}=K_{μετα} \rightarrow K=K_1+K_2 \rightarrow \frac{p^2}{2m_1}=\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2} \rightarrow \frac{p^2}{2m_1}-\frac{p_1^2}{2m_1}=\frac{p_2^2}{2m_2} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{p^2-p_1^2}{m_1}=\frac{p_2^2}{m_2}$ (2)

Από (1)(2) $\rightarrow m_1=m_2 \rightarrow$ $\mathbf{m_1/m_2=1}$ Σωστό είναι το **(α)**

B.28 Σώμα, Α, μάζας $m_1=m$ συγκρούεται με ταχύτητα $\vec{υ}$, έκκεντρα, με σώμα Β μάζας $m_2=m/2$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα Α φεύγει με ταχύτητα V_1 που σχηματίζει γωνία $θ=30^0$ με τον φορέα της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση. Το σώμα Β μετά την κρούση έχει ταχύτητα V_2 που σχηματίζει γωνία $φ=45^0$ με τον με τον φορέα της ταχύτητας που είχε το Α πριν την κρούση. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων υ και V_1 είναι:



α. $V_1= (\sqrt{3}-1)υ$ β. $V_1=(\sqrt{2}-1)υ$ γ. $V_1=2υ$ δ. $V_1=υ/2$

Απάντηση

Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται στους άξονες x και y.

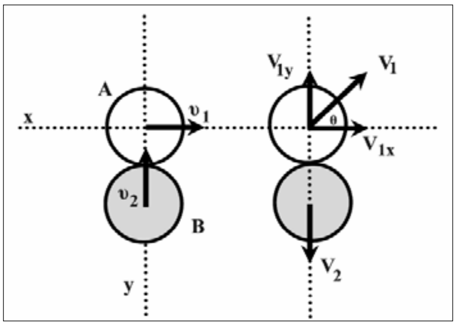
Ονομάζω $\vec{p}=m_1\vec{υ}$ την ορμή της σφαίρας Α πριν την κρούση, και $\vec{P}_1=m_1\vec{V}_1$ και $\vec{P}_2=m_2\vec{V}_2$ τις ορμές των σφαιρών Α και Β μετά την κρούση. Αναλύω τις ορμές στους άξονες x και y, όπως φαίνεται στο σχήμα, και γράφω τις αρχές διατήρησης ορμής σε κάθε άξονα χωριστά.

$Δp_y=0 \rightarrow 0=P_{1y}-P_{2y} \rightarrow 0=m_1V_1ημθ-\frac{m}{2}V_2ημφ \rightarrow 2V_1ημ30^0=V_2ημ45^0 \rightarrow V_2=V_1\sqrt{2}$ (1)

$Δp_x=0 \rightarrow p= P_{1x}+P_{2x} \rightarrow mυ=mV_1συνθ+\frac{m}{2}V_2συνφ \rightarrow 2υ=2V_1συν30^0+V_2συν45^0 \xrightarrow{(1)} 2υ=V_1(\sqrt{3}+1) \rightarrow \mathbf{V_1=\frac{2υ}{\sqrt{3}+1}}$

$\rightarrow \mathbf{V_1=(\sqrt{3}-1)υ}$. Άρα σωστό είναι το **(α).**

B.29 Οι όμοιες σφαίρες Α και Β έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=m$ και κινούνται μεταφορικά σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρων $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$. Τα κέντρα μάζας των σφαιρών Α και Β κινούνται αντίστοιχα στους ορθογώνιους άξονες x και y. Τη στιγμή της σύγκρουσης των δύο σφαιρών η δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής τους. Η κρούση θεωρείται ελαστική. Μετά την κρούση τα κέντρα μάζας των σφαιρών Α και Β έχουν ταχύτητες με μέτρα V_1, V_2 για τις οποίες ισχύει



α. $V_1=\upsilon$, με γωνία $\theta=45^0$ ως προς τον άξονα x και $V_2=0$.
β. $V_1=\upsilon$ και $V_2=\upsilon$ με αντίθετες κατευθύνσεις πάνω στον άξονα y.
γ. $V_1=\upsilon\sqrt{2}$ με γωνία $\theta=45^0$ ως προς τον άξονα x και $V_2=0$.

Απάντηση

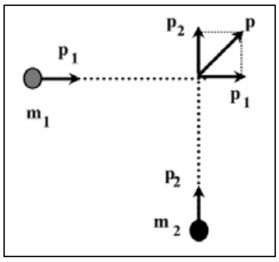
Κατά την κρούση η σφαίρα Β δέχεται δύναμη στον άξονα y με φορά αντίθετη της ταχύτητάς της και συνεπώς μπορεί να κινηθεί μετά την κρούση μόνο στον άξονα y, έστω με ταχύτητα V_2. Η σφαίρα Α δέχεται δύναμη κάθετη στην αρχική της τροχιά συνεπώς μπορεί να κινηθεί όπως φαίνεται στο σχήμα, έστω με ταχύτητα, V_1, την οποία και αναλύω σε συνιστώσες V_{1x} και V_{1y}. Γράφω ΑΔΟ στους άξονες x και y και ΑΔΚΕ για την κρούση.

$p_{\pi\rho o,x}=p_{\mu\varepsilon\tau\alpha,x}\rightarrow m_1\upsilon_1=m_1V_{1x}\rightarrow V_{1x}=\upsilon$ (1)
$p_{\pi\rho o,y}=p_{\mu\varepsilon\tau\alpha,y}\rightarrow m_2\upsilon_2=m_1V_{1y}+m_2V_2\rightarrow V_{1y}+V_2=\upsilon$ (2)
$K_{\pi\rho o}=K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2\rightarrow 2\upsilon^2=V_1^2+V_2^2$ (3)
Από (1)$\rightarrow V_{1x}^2=\upsilon^2$ και από (2)$\rightarrow (V_{1y}+V_2)^2=\upsilon^2$
Αντικαθιστώντας στην (3)$\rightarrow V_{1x}^2+(V_{1y}+V_2)^2=V_1^2+V_2^2\rightarrow$
$V_{1x}^2+V_{1y}^2+V_2^2+2V_{1x}V_2=V_1^2+V_2^2\rightarrow 2V_{1x}V_2=0\rightarrow \mathbf{V_2=0}$
Άρα $V_{1x}=\upsilon$ και $V_{1y}=\upsilon$ οπότε $V_1=\sqrt{V_{1x}^2+V_{1y}^2}\rightarrow \mathbf{V_1=\upsilon\sqrt{2}}$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{V_{1y}}{V_{1x}}=1\rightarrow \mathbf{\theta=45^0}$
Σωστό είναι το **(γ)**.

B. 30 Δύο σώματα με ίσες μάζες $m_1=m_2=m$ και ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$ συγκρούονται πλαστικά ενώ κινούνται σε κάθετες τροχιές. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει ταχύτητα με μέτρο:

α. $V=2\upsilon$ β. $V=\upsilon\sqrt{2}$ γ. $V=\upsilon\sqrt{2}/2$ δ. $V=\upsilon$

Απάντηση



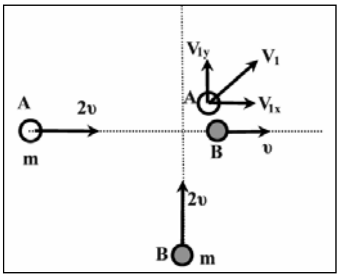
Τα δύο σώματα έχουν ορμές ίσες κατά μέτρο $p_1=p_2=m\upsilon$. Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα έχει ορμή με μέτρο, $p=(m+m)V=2mV$, όπου V η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.
Αν $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ είναι τα διανύσματα των ορμών των σωμάτων πριν την κρούση και $\vec{p}$ το διάνυσμα της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση, και εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:
$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}$. Τα διανύσματα $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους και το $\vec{p}$ είναι η συνισταμένη τους.
άρα: $p_1^2+p_2^2=p^2\rightarrow(m\upsilon)^2+(m\upsilon)^2=(2mV)^2\rightarrow \mathbf{V=\frac{\upsilon\sqrt{2}}{2}}$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**

B.31 Δύο σώματα Α και Β κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με μάζες m_1=m, m_2=m και ταχύτητες μέτρων $υ_1=υ_2$ = 2υ. Μετά την κρούση το σώμα Β κινείται στον άξονα των xx′ με ταχύτητα μέτρου, V_2=υ.

I. Το μέτρο της ταχύτητας του Α μετά την κρούση είναι:

α. $υ\sqrt{2}$ β. $υ\sqrt{5}$ γ. $υ\sqrt{3}$

II. Η κρούση είναι: α. ελαστική, β. ανελαστική



Απάντηση

I. Από την ΑΔΟ στον άξονα xx′→ $p_{προ,x}=p_{μετα,x}$→ $p_{προ,x,A} + p_{προ,x,B} = p_{μετα,x,A} + p_{μετα,x,B}$→
$m\cdot 2υ + 0 = mυ + mV_{1x} \rightarrow V_{1x}=υ$

Από την ΑΔΟ στον άξονα yy′: $p_{προ,y}=p_{μετα,y}$→ $p_{προ,y,A} + p_{προ,y,B} = p_{μετα,y,A} + p_{μετα,y,B}$→

$0 + m\cdot 2υ = mV_{1y} + 0 \rightarrow V_{1y}=2υ$

$V_1=\sqrt{V_{1x}^2+V_{1y}^2}=\sqrt{υ^2+4υ^2}\rightarrow$ $\mathbf{V_1=υ\sqrt{5}}$. Σωστό είναι το **(β)**

II. Για τον έλεγχο της ελαστικότητας ή μη της κρούσης συγκρίνω τις κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση

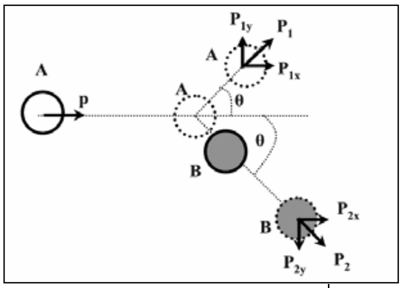
$K_{προ} = K_{1,προ} + K_{2,προ} = ½m(2υ)^2 + ½m(2υ)^2 = 4mυ^2$

$K_{μετα} = K_{1,προ} + K_{2,προ} = ½m(\sqrt{5}υ)^2 + ½m(υ)^2 = 3mυ^2$

Άρα $\mathbf{K_{μετα} < K_{προ}}$. Συνεπώς η κρούση είναι ανελαστική και σωστό είναι το **(β)**

B.32 Η σφαίρα, Α με μάζα m_1=2kg και ταχύτητα $υ_1=5\sqrt{3}$m/s συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα με τη γωνία $θ=30^0$. Η ταχύτητα και η μάζ της σφαίρας, Β είναι:

α. V_2=5m/s, m_2=2kg
β. V_2=10m/s, m_2=2kg
γ. V_2=10m/s, m_2=1kg



Απάντηση

ΑΔΟxx′: $p_{προ,x}=p_{μετα,x}\rightarrow m_1υ_1=m_1V_1συνθ + m_2V_2συνθ$ (1)

ΑΔΟyy′: $p_{προ,y}=p_{μετα,y}\rightarrow 0+0 = m_1V_1ημθ = m_2V_2ημθ \rightarrow m_1V_1 = m_2V_2$ (2)

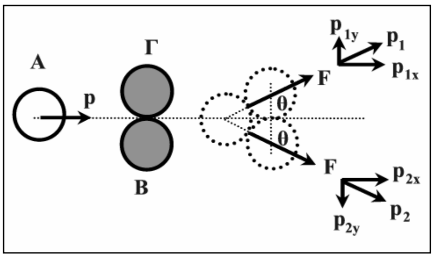
ΑΔΚΕ: $K_{προ}=K_{μετα}\rightarrow ½mυ_1^2 + 0 = ½m_1V_1^2 + ½m_2V_2^2$ (3)

Από (1)(2)→ $υ_1=\sqrt{3}V_1\rightarrow V_1$=5m/s

Από (3)(2)→$V_2=\dfrac{υ_1^2-V_1^2}{V_1}$ →$\mathbf{V_2}$**=10m/s**

Από (2) →$\mathbf{m_2}$**=1kg.** Άρα σωστό είναι το **(γ)**

B.33 Τρεις όμοιες λείες σφαίρες Α, Β, Γ τοποθετούνται σε οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε οι Β και Γ να εφάπτονται. Βάλουμε την Α με ταχύτητα υ έτσι ώστε ο φορέας της να διέρχεται από την κοινή εφαπτομένη των άλλων δύο. Η κρούση είναι ελαστική. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση είναι :



α. $\upsilon_B=\upsilon_\Gamma=0{,}4\sqrt{3}\upsilon_0$ και $\upsilon_A=-0{,}2\upsilon_0$

β. $\upsilon_B=\upsilon_\Gamma=\sqrt{3}\upsilon_0$ και $\upsilon_A=-\upsilon_0$

γ. $\upsilon_B=\upsilon_\Gamma=\sqrt{3}\upsilon_0/3$ και $\upsilon_A=0{,}2\upsilon_0$

Απάντηση

Οι δυνάμεις, F που ασκούνται μεταξύ των σφαιρών (Α,Γ) και (Β,Γ) είναι κεντρικές επειδή οι σφαίρες είναι λείες και ίσες. Επειδή είναι και όμοιες τα κέντρα τους τη στιγμή της κρούσης σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Οι σφαίρες Β και Γ μετά την κρούση θα κινηθούν έτσι ώστε οι ταχύτητες V_1, V_2 να σχηματίζουν γωνίες $\theta=30^0$ με την κοινή εφαπτομένη. Λόγω συμμετρίας η σφαίρα Α θα δεχτεί μια συνισταμένη δύναμη πάνω στην κοινή εφαπτομένη και αναγκαστικά θα κινηθεί και μετά την κρούση στην ίδια διεύθυνση. Εστω $p=m\upsilon$, και $p'=mV$ οι ορμές της σφαίρας Α πριν και μετά την κρούση και $p_1=mV_1$ και $p_2=mV_2$ οι ορμές των Β και Γ μετά την κρούση.

ΑΔΟ xx′: $p=p'+p_{1x}+p_{2x}\rightarrow m\upsilon=mV+mV_1\sigma\upsilon\nu\,30^0+mV_2\sigma\upsilon\nu 30^0$ (1) $\rightarrow \upsilon=V+V_1\sqrt{3}$ (4)

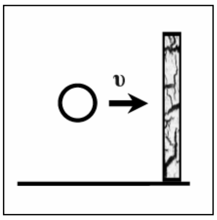
ΑΔΟ yy′: $0=p_{1y}-p_{2y}\rightarrow\ 0=mV_1\eta\mu\,30^0-mV_2\eta\mu 30^0$ (2) $\rightarrow V_1=V_2$ (5)

ΑΔΚΕ: $K_{\pi\rho o}=K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}mV_1^2+\frac{1}{2}mV_2^2$ (3) $\rightarrow \upsilon^2=V^2+2V_1^2$ (6)

$(4)^2\rightarrow \upsilon^2=V^2+3V_1^2+2\sqrt{3}VV_1 \xrightarrow{(6)} 2V_1^2=3V_1^2+2\sqrt{3}VV_1 \xrightarrow{V_1\neq 0} V_1=-2\sqrt{3}V$ (7)

$(6)(7)\rightarrow \upsilon^2=V^2+24V^2\rightarrow\upsilon^2=25V^2\rightarrow V=-\upsilon/5\rightarrow$ $\mathbf{V=-0{,}2\upsilon}$ και $\mathbf{V_1=V_2=0{,}4\sqrt{3}\upsilon}$

B.34 Τρεις σφαίρες Α, Β, Γ, πέφτουν κάθετα στον ίδιο τοίχο με την ίδια ταχύτητα υ. Η Α κάνει κρούση ελαστική, η Β ανελαστική και η Γ πλαστική. Η χρονική διάρκεια της κρούση είναι η ίδια και στις τρεις περιπτώσεις. Να κατατάξετε τις μέσες τιμές της δύναμης που δέχεται ο τοίχος σε όλες τις περιπτώσεις



α. $F_A<F_B<F_\Gamma$ β. $F_A<F_\Gamma<F_B$ γ. $F_A>F_B>F_\Gamma$

Απάντηση

Στην ελαστική το μέτρο της δύναμης είναι: $F_A=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=\dfrac{2m\upsilon}{\Delta t}$

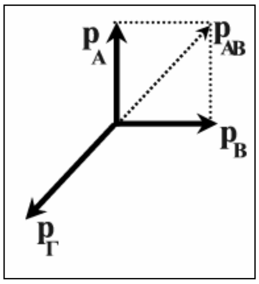
Στην ανελαστική είναι: $F_B=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=\dfrac{m(\upsilon'+\upsilon)}{\Delta t}$ με $\upsilon'<\upsilon$

Στην πλαστική είναι: $F_\Gamma=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=\dfrac{m\upsilon}{\Delta t}$

Άρα: $\mathbf{F_A>F_B>F_\Gamma}$ Σωστό είναι το **(γ)**

Β.35 Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη. Τα μέρη Α και Β έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με: $p_1=p_2=p$. Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

α. $p/2$ β. p γ. $p\sqrt{2}$ δ. $2p$



Απάντηση

Η ορμή του βλήματος πριν την έκρηξη είναι μηδενική. Από την ΑΔΟ είναι φανερό ότι θα είναι μηδέν και η ορμή των τριών τμημάτων μετά την έκρηξη. Από την ΑΔΟ έχουμε:

$\vec{p}_{προ} = \vec{p}_{μετα} \rightarrow 0 = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_Γ \rightarrow \vec{p}_{AB} = \vec{p}_Γ$ (1)

Τα τμήματα Α και Β έχουν το καθένα ορμή p συνεπώς η ορμή του συστήματός των Α και Β είναι

$p_{AB} = \sqrt{p_A{}^2 + p_B{}^2} = \sqrt{2p^2} \rightarrow p_{AB} = p\sqrt{2}$ (2)

Από (1) και (2)→ $\mathbf{p_Γ = p_{AB} = p\sqrt{2}}$ Άρα σωστό είναι το **(γ)**

Β.36 Σφαίρα Α μάζας $m_1=2kg$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_1=20m/s$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2=3kg$. Οι σφαίρες έρχονται σε επαφή τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Κάποια στιγμή t_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης η σφαίρα Α έχει ταχύτητα $V_1=0m/s$.

Ι. Τη στιγμή t_1 η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών είναι:
α. 150J, β. 75J, γ. 225J δ. 0

ΙΙ. Τα έργα των δυνάμεων επαφής των δύο σφαιρών από τη στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι:
α. ίσα β. –225J και 150J γ. 0 δ. –75J, 75J

Απάντηση

Ι. Οι τελικές ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση είναι $V_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1=-15m/s$ και $V_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 \rightarrow V_2=12m/s$.

Η σφαίρα m_1 κάποια στιγμή t_1 σταματάει για να γυρίσει πίσω, ενώ βρίσκεται σε επαφή με τη m_2. Γράφω τη διατήρηση της ορμής από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως εκείνη τη χρονική στιγμή t_1:

$m_1υ_1=0+m_2υ_2' \rightarrow υ_2'=10m/s$. Επειδή σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει να ισχύει και από τη χρονική στιγμή $t_0=0$ έως την t_1.

$K_0= ½\, m_1υ_1{}^2+0 =225J$

$K_1=0+ ½\, m_2υ_2'^2=150J$

Τα 75J που λείπουν αντιστοιχούν στην δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών εκείνη τη χρονική στιγμή t_1.

$E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow K_0= K_1+U_{ελ} \rightarrow \mathbf{U_{ελ}= 75J}$ Σωστό είναι το **(β)**

II. Οι δυνάμεις αυτές έχουν τη σχέση δράσης αντίδρασης αλλά όπως θα δούμε δεν έχουν τα ίδια έργα στη χρονική διάρκεια που μας ενδιαφέρει.

Από το ΘΜΚΕ για κάθε σφαίρα έχουμε:

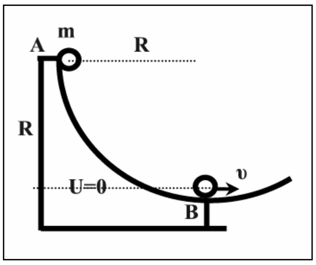
$W_1=K_{\mu 1}-K_{\pi 1}= 0-½\ m_1 υ_1^2= -225J$ $\qquad$ $W_2=K_{\mu 1}-K_{\pi 1}= ½\ m_2 υ_2'^2-0 = 150J$

Σωστό είναι το **(β)**

* Με την ολοκλήρωση της ελαστικής κρούσης το σχήμα των σφαιρών αποκαθίσταται και η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης μηδενίζεται. Η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή. ‘Αρα $ΔK_1=-ΔK_2$. Επειδή όμως τα έργα των δυνάμεων επαφής είναι ίσα με τις μεταβολές κινητικής ενέργειας της κάθε σφαίρας είναι φανερό ότι όταν ολοκληρωθεί η κρούση τα έργα αυτά θα είναι αντίθετα.

Β.37 Μια σφαίρα μάζας m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από το σημείο Α της κυκλικής τροχιάς που φαίνεται στο σχήμα. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της όταν φτάνει στο σημείο Β είναι:

α. Δp/Δt=mg $\qquad$ β. Δp/Δt=3mg $\qquad$ γ. Δp/Δt=2mg



Απάντηση

Η σφαίρα φτάνει στο Β με ταχύτητα υ. Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Α και Β έχουμε:

$$E_A=E_B \rightarrow mgR=\frac{mυ^2}{2} \rightarrow υ=\sqrt{2gR}$$

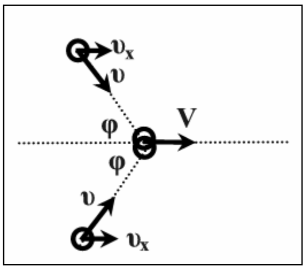
Σύμφωνα με το 2ο νόμο, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σφαίρα και αυτή δεν είναι άλλη από την κεντρομόλο δύναμη στη θέση αυτή. Συνεπώς

$$\frac{Δp}{Δt} = ΣF=F_{κεν}=\frac{mυ^2}{R}= 2mg \rightarrow \mathbf{\frac{Δp}{Δt}=2mg}$$

Σωστό είναι το **(γ)**

Β.38 Δύο σώματα της ίδιας μάζας m κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου υ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και συγκρούονται πλαστικά. Μετά κρούση το συσσωμάτωμα κινείται με ταχύτητα μέτρου υ/2 . Η γωνία φ που σχηματίζει η διεύθυνση κίνησης καθενός από τα δύο σώματα πριν την κρούση με την διεύθυνση κίνησης του συσσωματώματος είναι :

α. 30^0 $\qquad$ β. 45^0 $\qquad$ γ. 60^0



Απάντηση

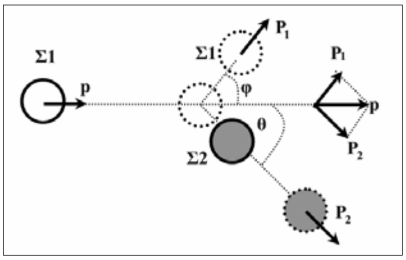
Από την ΑΔΟ στον άξονα x έχουμε: $mυ_x+mυ_x=2mV \rightarrow 2mυσυνφ=2m\frac{υ}{2} \rightarrow συνφ=1/2 \rightarrow$ $\mathbf{φ=60^0}$.

Άρα σωστό είναι το **(γ)**

* Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

$ΔK=K_μ-K_π= ½2mV^2-2\cdot ½mυ^2=-3mυ^2/4$

B39. Σφαίρα $Σ_1$, μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα υ και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα $Σ_2$, ίσης μάζας $m_2=m_1=m$, που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες $υ_1,υ_2$. Η ταχύτητα της σφαίρας $Σ_1$ σχηματίζει μετά την κρούση με την αρχική της διεύθυνση γωνία φ: ημφ=0,6 και συνφ=0,8.

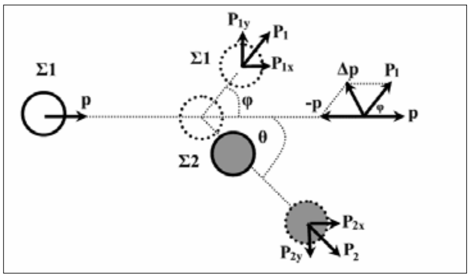


I. Τα μέτρα των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι:

α. $υ_1=υ_2=υ$ β. $υ_1=0,6υ$, $υ_2=0,8υ$ γ. $υ_1=0,8υ$ $υ_2=0,6υ$

II. Το μέτρο μεταβολής της ορμής της σφαίρας $Σ_1$ είναι:

α. $Δp_1=0,6mυ$ β. $Δp_1=0,8mυ$ γ. $Δp_1=mυ$ δ. $Δp_1=0,5mυ$



Απάντηση

I. Από την ΑΔΚΕ→ $\frac{1}{2}m_1υ^2=\frac{1}{2}m_1υ_1^2+\frac{1}{2}m_2υ_2^2 \rightarrow υ^2=υ_1^2+υ_2^2$ (1)
Από την ΑΔΟ:

$p^2=p_1^2+p_2^2+2p_1p_2συν(φ+θ) \rightarrow υ^2=υ_1^2+υ_2^2+2υ_1υ_2συν(φ+θ) \rightarrow συν(φ+θ)=0 \rightarrow φ+θ=90^0$
Άρα ημθ=συνφ=0,8 και συνθ=ημφ=0,6

Αναλύω τώρα τα p_1 και p_2 σε άξονες x και y και γράφω την ΑΔΟ στους άξονες y και x

$p_{πy}=p_{μy} \rightarrow mυ_1ημφ=mυ_2ημθ \rightarrow υ_2=3υ_1/4$ (2)
$p_{πx}=p_{μx} \rightarrow mυ=mυ_1συνφ+mυ_2συνθ \rightarrow υ=0,8υ_1+0,6υ_2 \xrightarrow{(2)}$ $\mathbf{υ_1=0,8υ}$ **και** $\mathbf{υ_2=0,6υ}$ Σωστό το **(γ)**

II. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας $Σ_1$: $Δ\vec{p_1}=\vec{p_1}-\vec{p} \rightarrow Δ\vec{p_1}=\vec{p_1}+(-\vec{p})$

Για τα μέτρα ισχύει:
$Δp_1=\sqrt{p_1^2+p^2+2p_1pσυν(π-φ)}=\sqrt{p_1^2+p^2-2p_1pσυν(φ)}=m\sqrt{υ_1^2+υ^2-2υ_1υ0,8} \rightarrow Δp_1=m\sqrt{0,36υ^2} \rightarrow$

$\mathbf{Δp_1=0,6mυ}$ Άρα σωστό είναι το **(α)**.