



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
7 Νοεμβρίου 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} \quad \text{και} \quad B = ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} = \left(\frac{25 - 9}{16} \right)^{2025} + \frac{43}{21} = 1^{2025} - \frac{43}{21} \\ &= 1 - \frac{43}{21} = -\frac{22}{21}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (5^2 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} \\ &= (25 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (-1)^{2024} - \frac{63}{31} = 1 - \frac{63}{31} = -\frac{32}{31}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} A - B &= -\frac{22}{21} - \left(-\frac{32}{31} \right) = -\frac{22}{21} + \frac{32}{31} = -\frac{22 \cdot 31}{21 \cdot 31} + \frac{32 \cdot 21}{21 \cdot 31} \\ &= \frac{-682 + 672}{651} = \frac{-10}{651} < 0 \Rightarrow A < B. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α, β , με $\alpha \leq \beta$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη 15 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 60. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές των α, β .

Λύση

Οι δυνατές τιμές του α είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\alpha \in \{15, 30, 45, 60\}$. Ομοίως, οι δυνατές τιμές του β είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\beta \in \{15, 30, 45, 60\}$.

Έστω $\alpha = 15$. Τότε η μόνη δυνατή τιμή για το β είναι το 60. Αν ήταν $\beta = 15$ ή 30 ή 45, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = 15$ ή 30 ή 45, αντίστοιχα, που είναι διαφορετικά από το 60.

Έστω $\alpha = 30$. Τότε δεν υπάρχει δυνατή τιμή για το $\beta \geq 30$.

Πράγματι, αν ήταν $\beta = 30$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 30\} = 30 \neq 15$, αν ήταν $\beta = 45$, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = EKP\{30, 45\} = 90 \neq 60$, ενώ αν ήταν $\beta = 60$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 60\} = 30 \neq 15$.

Έστω $\alpha = 60$. Επειδή πρέπει $\beta \geq \alpha$, έπεται ότι $\beta = 60$ οπότε

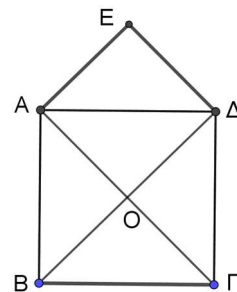
$$MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{60, 60\} = 60 \neq 15.$$

Άρα οι μόνες δυνατές τιμές είναι: $\alpha = 15, \beta = 60$.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΑΕ είναι παράλληλα. Επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΔΕ είναι παράλληλα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι τετράγωνο.



Λύση

Το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = ED \text{ και } AE = OD. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, οι διαγώνιες του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} = OD. \quad (2)$$

$$\angle AOD = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι: $AO = OD = DE = EA$. Άρα το τετράπλευρο ΑΟΔΕ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και μία γωνία του ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 + \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3},$$

$$B = \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 - \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} \\ &= \left((-6)^2 - \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \left(36 - \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{320}{9} \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \frac{160}{9} \cdot \frac{1}{39} - \frac{2}{3} = \frac{160}{351} - \frac{2}{3} = \frac{160}{351} - \frac{234}{351} = -\frac{74}{351}. \\ B &= \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117} = \left(\frac{-18}{3} \right)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117} \\ &= (-6)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117} = -\frac{25}{117} = -\frac{75}{351}. \end{aligned}$$

Επειδή είναι:

$$-\frac{75}{351} < -\frac{74}{351} \quad \text{έπεται ότι} \quad \frac{75}{351} > \frac{74}{351} \Rightarrow A > B.$$

Διαφορετικά θεωρούμε τη διαφορά A - B:

$$A - B = -\frac{74}{351} - \left(-\frac{25}{117} \right) = \frac{25}{117} - \frac{74}{351} = \frac{75 - 74}{351} = \frac{1}{351} > 0 \Rightarrow A > B.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma, B = \overline{\beta\gamma} = 10\beta + \gamma, \Gamma = \overline{\alpha\beta} = 10\alpha + \beta, \quad \text{με } \alpha \neq 0.$$

Αν ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 3, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του A για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$A = B + 8\Gamma.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 100\alpha + 10\beta + \gamma &= 10\beta + \gamma + 8(10\alpha + \beta) \Leftrightarrow 100\alpha = 80\alpha + 8\beta \\ \Leftrightarrow 20\alpha &= 8\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{20\alpha}{8} \Leftrightarrow \beta = \frac{5\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου $\alpha \neq 0$ είναι τα πολλαπλάσια του 2, δηλαδή τα ψηφία 2, 4, 6, 8. Τότε η τιμή του β που προκύπτει είναι 5, 10, 15, 20, αντίστοιχα, από τις οποίες δεκτή είναι μόνον η τιμή $\beta = 5$.

Επομένως, έχουμε:

$$A = \overline{25\gamma}, \text{ όπου } \gamma \text{ ψηφίο με } 0 \leq \gamma \leq 9.$$

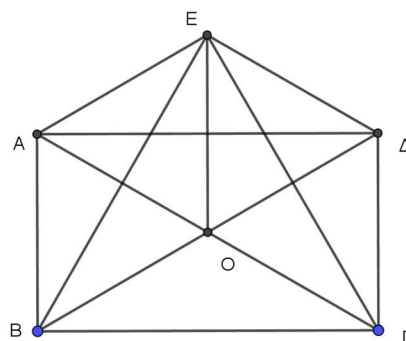
Το ψηφίο γ πρέπει να επιλεγεί έτσι, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3. Επομένως, αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του A να διαιρείται με το 3, οπότε οι δυνατές τιμές του γ είναι 2, 5 και 8, οπότε τελικά έχουμε:

$$A = 252 \text{ ή } A = 255 \text{ ή } A = 258.$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ευθεία AE είναι παράλληλη προς την ευθεία $B\Delta$ και η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ είναι ρόμβος.
2. $EB = E\Gamma$.



Λύση

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = E\Delta \text{ και } AE = O\Delta. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $AO = O\Delta = \Delta E = EA$. Άρα το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

2. Επειδή $EA = E\Delta$ και $OA = O\Delta$, έπεται ότι η ευθεία EO είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\Gamma\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε θα είναι και άξονας συμμετρίας του. Τα σημεία B και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO , οπότε και τα τμήματα EB και $E\Gamma$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO . Άρα είναι ίσα.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους A οι οποίοι είναι 2025 φορές μεγαλύτεροι από το τελευταίο ψηφίο τους.

Λύση

Έστω x το τελευταίο ψηφίο του A . Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$A = M + x, \text{ όπου } M = 10B = \text{πολλαπλάσιο του } 10.$$

Αφού ο A είναι 2025 φορές το τελευταίο του ψηφίο, θα ισχύει:

$$10B + x = 2025x \Leftrightarrow 2024x = 10B.$$

Για να είναι πολλαπλάσιο του 10 το αριστερό μέλος, πρέπει το ψηφίο x να είναι το 0 ή το 5. Όμως ο x δεν μπορεί να είναι 0, γιατί τότε θα είχαμε $A = 0$.

Άρα πρέπει να ισούται με 5 και ο μοναδικός θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα είναι ο **2024 · 5 = 10125**.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα:

$$4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 + 18xy - 4x - 6y + 10 = 0, ,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 8x^3 + 27y^3.$$

Λύση

Η παράσταση A μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y) \Rightarrow$$

$$A = (2x + 3y)^3 - 18xy(2x + 3y) \quad (1)$$

Επομένως, θα προσπαθήσουμε από τη δεδομένη ισότητα να εμφανίσουμε τις παραστάσεις $2x + 3y$ και xy .

Η δεδομένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$(2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + 6xy + x^2y^2 - 2(2x + 3y) + 10 = 0$$

$$(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y) + 1 + x^2y^2 + 6xy + 9 = 0$$

$$(2x + 3y - 1)^2 + (xy + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 3y = 1 \quad (2) \quad \text{και} \quad xy = -3 \quad (3)$$

Άρα έχουμε:

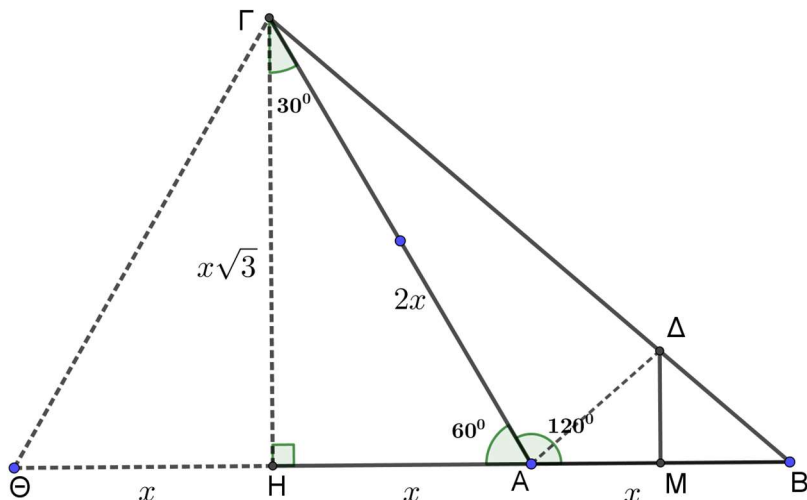
$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y)$$

$$\Rightarrow A = 1^3 - 18 \cdot (-3) \cdot 1 = 55.$$

Πρόβλημα 3

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\widehat{A} = 120^\circ$ και $ΑΓ = 2 \cdot ΑΒ$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.

Λύση



Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το μέρος του A και φέρουμε από την κορυφή Γ κάθετη προς την ευθεία AB που την τέμνει, έστω στο H .

Επειδή $\widehat{B\hat{A}G} = 120^\circ$, έπεται ότι: $\widehat{\Gamma\hat{A}H} = 60^\circ$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}H} = 30^\circ$. Αν Θ είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ΓH , τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Theta$ είναι ισόπλευρο. Αν $AB = x$, τότε $A\Gamma = 2x$ και $AH = H\Theta = x$.

Επειδή η ευθεία $ΜΔ$, όπου $Μ$ μέσο της πλευράς $ΑΒ$, είναι μεσοκάθετη της πλευράς $ΑΒ$ έπεται ότι:

$$A\Delta = \Delta B \text{ και } AM = BM = \frac{x}{2}.$$

Επειδή $\Delta M \perp AB$ και $\Gamma H \perp AB$, έπεται ότι $\Delta M \parallel \Gamma H$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BM}{MH} = \frac{BM}{MA + AH} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} + x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

(2^{ος} τρόπος)

Έστω Κ σημείο στην προέκταση της ΒΑ προς το Α τέτοιο ώστε $ΓΚ \perp ΒΑ$, και έστω Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Τότε η ΚΜ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΓΜΑ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε είναι $ΚΜ = ΜΑ$. Αφού $\widehat{ΚΑΜ} = 60^\circ$, το ισοσκελές τρίγωνο ΚΜΑ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$KA = MA = \frac{A\Gamma}{2} = AB,$$

δηλαδή το Α είναι το μέσο του ΚΒ. Αν Ν είναι το μέσο της υποτεινουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΒΚΓ, τότε θα είναι $NK = NB$.

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα KNB , $\text{A}\Delta\text{B}$ είναι όμοια, αφού έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, και άρα:

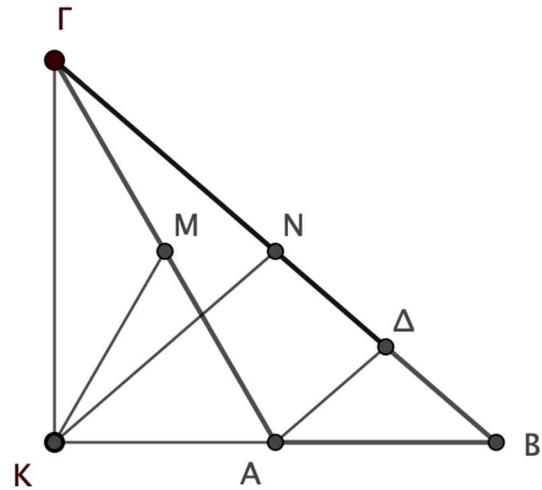
$$\frac{\text{N}\Delta}{\Delta\text{B}} = \frac{\text{KA}}{\text{AB}} = 1,$$

δηλαδή $\text{N}\Delta = \Delta\text{B} = \text{A}\Delta$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma\Delta &= \Gamma\text{N} + \text{N}\Delta = \text{NB} + \text{N}\Delta \\ &= 2 \cdot \text{A}\Delta + \text{A}\Delta = 3 \cdot \text{A}\Delta.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με $1/3$.



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Αν οι a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση

$$3x^2 - 2(2a + b)x + 2a^2 + 2ab + b^2 - 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει πραγματικές λύσεις, να αποδείξετε ότι:

$$(1). \quad a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad (2). \quad a + b \leq \sqrt{2}.$$

Λύση.

(1) Αφού η δεδομένη εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, η διακρίνουσά της θα είναι μη αρνητική, δηλαδή

$$\Delta = 4[(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2}$$

(2) Ισχύει ότι:

$$a^2 + b^2 + ab \geq 2ab + ab = 3ab,$$

οπότε θα έχουμε:

$$3ab \leq \frac{3}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες ανισότητες και το ότι $a, b > 0$, έχουμε:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2} \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB < BG$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ να έχουν ίσα εμβαδά. Αν επιπλέον ισχύει ότι $AB^2 = AE \cdot AD$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα BAE και BΓZ έχουν ίσα εμβαδά, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \Gamma Z,$$

δηλ. $BA \cdot AE = B\Gamma \cdot \Gamma Z$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot \Gamma Z$$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $B\Gamma = \Delta A$.

Τότε έχουμε:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma Z}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}.$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και ΔEZ έχουν την ορθή γωνία κοινή και ίσους τους λόγους των καθέτων πλευρών τους, οπότε θα είναι $EZ \parallel A\Gamma$ και άρα $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta}$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών $A\Gamma$ και ZE με τέμνουσα την ΓZ .

Επιπλέον, τα τρίγωνα BAE και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια, αφού έχουν

$$\frac{BA}{AE} = \frac{\Delta A}{AB} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \text{ και } \widehat{BAE} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 90^\circ.$$

Επομένως θα έχουν

$$\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta},$$

οπότε θα είναι:

$$\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{E\hat{Z}\Delta} = \widehat{Z\hat{\Delta}E} - \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{E}\Delta}.$$

Άρα είναι $\widehat{A\hat{E}B} + \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$.

Διαφορετικά, μπορούμε από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και ΔEZ , με χρήση τριγωνομετρίας, να έχουμε

$$\varepsilon\varphi \widehat{\Delta A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} = \varepsilon\varphi \widehat{\Delta E\hat{Z}},$$

οπότε $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta E\hat{Z}}$ και άρα για τις συμπληρωματικές τους είναι $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta}$.

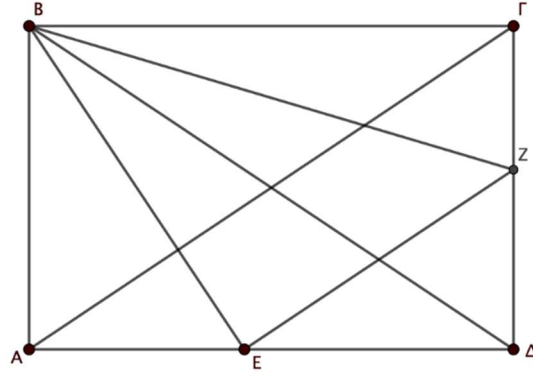
Αφού $AB^2 = AE \cdot A\Delta$, στα ορθογώνια τρίγωνα AEB και ΔEZ είναι

$$\varepsilon\varphi \widehat{A\hat{E}B} = \frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \varepsilon\varphi \widehat{E\hat{Z}\Delta},$$

οπότε

$$\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{E\hat{Z}\Delta} = \widehat{Z\hat{\Delta}E} - \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{E}\Delta}.$$

Άρα $\widehat{A\hat{E}B} + \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$ όπως θέλαμε.

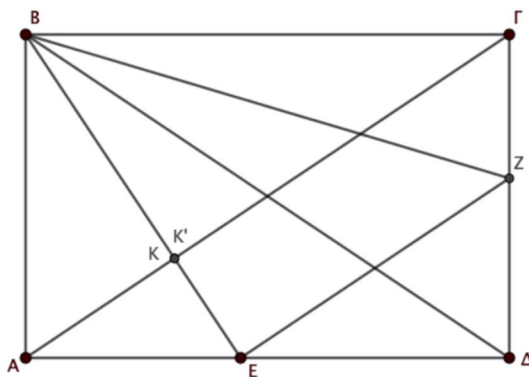


(2^{ος} τρόπος) Έστω σημείο K στην ΑΓ τέτοιο ώστε $EK \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ, ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν κοινή την οξεία γωνία $\widehat{Γ\hat{A}\Delta}$. Έτσι,

$$\frac{AK}{AE} = \frac{AD}{AG},$$

και άρα:

$$AK \cdot AG = AD \cdot AE = AB^2.$$



Έστω σημείο K' στην ΑΓ τέτοιο ώστε $BK' \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚ'Β και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε

$$AK' \cdot AG = AB^2 = AK \cdot AG.$$

Άρα τα σημεία K, K' ταυτίζονται, και η ευθεία BE είναι κάθετη στην ΑΓ στο K.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα BAE και ΒΓΖ έχουν το ίδιο εμβαδό, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot GZ,$$

δηλ. $BA \cdot AE = BG \cdot GZ$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot \Gamma Z$$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $BG = \Delta A$. Τότε

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma Z}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E},$$

που σημαίνει ότι $EZ \parallel AG$. Συνεπώς, $BE \perp EZ$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος μοίρασε διαδοχικά 150 μπίλιες σε 10 κουτιά $K_1, K_2, \dots, K_{10}$, με αυτή τη σειρά, στα οποία έβαλε $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ μπίλιες, αντίστοιχα, όπου $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ θετικοί ακέραιοι. Ξεκινώντας να βάζει μπίλιες από το κουτί K_1 , σε κάθε επόμενο κουτί έβαζε περισσότερες μπίλιες από το προηγούμενο. Αν ο αριθμός από μπίλιες που έβαλε στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μισό του αριθμού από μπίλιες που έβαλε στο δέκατο κουτί, να βρεθεί πόσες μπίλιες έβαλε στο έκτο κουτί.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, έχουμε:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}, \quad a_1 + \dots + a_{10} = 150 \quad \text{και} \quad a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10}.$$

Θέτουμε $a_1 = x$. Επειδή οι ποσότητες αυξάνονται αυστηρά έχουμε:

$$a_2 \geq x + 1, \quad a_3 \geq x + 2, \dots, \quad a_{10} \geq x + 9.$$

Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_1 + \dots + a_{10} \geq 10x + 45,$$

οπότε

$$10x + 45 \leq 150 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Επιπλέον, από τον περιορισμό $a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10}$ έχουμε:

$$a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{x+9}{2} \Leftrightarrow 2x \geq x+9 \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Άρα είναι: $x = 9$ ή $x = 10$.

Αν $x = 9$, τότε $a_{10} = 18$ και η μοναδική αυστηρά αύξουσα δεκάδα είναι

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$$

που αθροίζει σε $135 \neq 150$, άτοπο.

Αν $x = 10$, Η ελάχιστη δεκάδα είναι 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, με άθροισμα 145.

Προσθέτοντας κατάλληλα παίρνουμε μία έγκυρη δεκάδα:

$$10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20 \text{ (άθροισμα 150)}.$$

Επομένως το έκτο κουτί έχει 16 μπίλιες.

(2^{ος} τρόπος). Αν $a_1 \geq 11$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \geq 11 + 12 + 13 + \dots + 20 = \frac{11 + 20}{2} \cdot 10 = 155 > 150,$$

άτοπο. Άρα $a_1 \leq 10$.

Αν $a_{10} \leq 19$, τότε

$$a_{10} + a_9 + a_8 + \dots + a_1 \leq 19 + 18 + 17 + \dots + 10 = \frac{19 + 10}{2} \cdot 10 = 145 < 150,$$

άτοπο. Άρα $a_{10} \geq 20$, και $a_1 \geq \frac{a_{10}}{2} \geq 10$. Συνεπώς, $a_1 = 10$ και $a_{10} = 20$.

Παρατηρούμε ότι $a_6 \geq a_1 + 5 = 15$, και $a_6 \leq a_{10} - 4 = 16$, οπότε: $a_6 = 15$ ή 16 .

Αν $a_6 = 15$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{10 + 15}{2} \cdot 6 = 75,$$

οπότε

$$a_7 + a_8 + a_9 = 75 - a_{10} = 55,$$

ενώ

$$a_9 + a_8 + a_7 \leq 19 + 18 + 17 = 54,$$

άτοπο. Άρα $a_6 = 16$, με

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ μία αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε $a_{m+n} = 103$ και $a_{m-n} = 49$, για κάποιους θετικούς ακέραιους $m > n$. Να βρεθεί η τιμή της διαφοράς $a_{na_m} - a_n$.

Λύση

Έστω ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου. Τότε ισχύουν:

$$a_{m+n} = a_m + n\omega \quad (1) \quad \text{και} \quad a_{m-n} = a_m - n\omega \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a_m = \frac{a_{m+n} + a_{m-n}}{2} = \frac{103 + 49}{2} = 76 \quad \text{και} \quad n\omega = \frac{a_{m+n} - a_{m-n}}{2} = \frac{103 - 49}{2} = 27.$$

Επομένως, έχουμε:

$$a_{na_m} - a_n = a_{76n} - a_n = 75n\omega = 75 \cdot 27 = 2025.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει:

$$11x^2y^2 - y^4 - 25x^4 + 7 = 0$$

Λύση:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 25x^4 - 11x^2y^2 + y^4 &= 7 \Leftrightarrow 25x^4 - 10x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 7 \Leftrightarrow \\ (5x^2 - y^2)^2 - x^2y^2 &= 7 \Leftrightarrow (5x^2 - y^2 + xy)(5x^2 - y^2 - xy) = 7. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $5x^2 - y^2 + xy > 5x^2 - y^2 - xy$ και $7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7)$, έπεται ότι:

$$5x^2 - y^2 + xy = 7 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = 1 \quad (I)$$

ή

$$5x^2 - y^2 + xy = -1 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = -7 \quad (II)$$

Από την (I) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = 4 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει:

$$5x^2 - \frac{9}{x^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 - 9 = 0.$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = -1$, αδύνατο αφού $x^2 \geq 0$,

ή $x^2 = \frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού x θετικός ακέραιος.

Από την (II) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = -4 \quad (3)$$

Από τις (1), (3) λαμβάνουμε:

$$5x^2 - \frac{9}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + 4x^2 - 9 = 0.$$

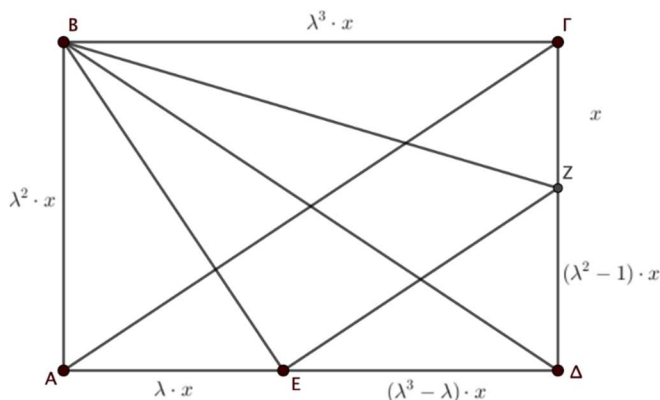
Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = -\frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού $x^2 \geq 0$. Επομένως, αφού x θετικός ακέραιος, έχουμε τελικά τη λύση:

$$x = 1, \quad y = 3.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B\Gamma = \lambda \cdot AB$, για κάποιο $\lambda > 1$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $EZ \parallel A\Gamma$, και $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών $\frac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)}$ συναρτήσει του λ .

Λύση



Έστω $GZ = x$. Αφού $EZ \parallel A\Gamma$, είναι

$$\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{AE}{GZ} = \frac{A\Delta}{G\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB} = \lambda,$$

οπότε $AE = \lambda x$. Αφού $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$, οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}B}$ και $\widehat{\Delta\hat{E}Z}$ είναι συμπληρωματικές, και άρα τα τρίγωνα $\triangle BAE$ και $\triangle EDZ$ είναι όμοια, και άρα

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \lambda.$$

Έτσι, είναι $AB = \lambda \cdot AE = \lambda^2 x$, και $A\Delta = B\Gamma = \lambda \cdot AB = \lambda^3 x$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$E\Delta = A\Delta - AE = \lambda^3 x - \lambda x = \lambda(\lambda^2 - 1)x$$

και

$$\Delta Z = \frac{\Delta E}{\lambda} = (\lambda^2 - 1)x.$$

(1^{ος} τρόπος) Για τα εμβαδά έχουμε

$$(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2,$$

$$(BAE) = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 x \cdot \lambda x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = \frac{1}{2\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

$$(Z\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot E\Delta \cdot \Delta Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda(\lambda^2 - 1)x \cdot (\lambda^2 - 1)x = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{2} = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

και

$$(B\Gamma Z) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \Gamma Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 x \cdot x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = (BAE).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}(BEZ) &= (AB\Gamma\Delta) - (Z\Delta E) - 2(BAE) = (AB\Gamma\Delta) - \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta) - \frac{1}{\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \cdot (AB\Gamma\Delta).\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με

$$\frac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4} \right).$$

(2^{ος} τρόπος) Έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAE έχουμε

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = \lambda^4 x^2 + \lambda^2 x^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2.$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $Z\Delta E$ έχουμε

$$EZ^2 = E\Delta^2 + \Delta Z^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)^2 x^2 + (\lambda^2 - 1)^2 x^2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2,$$

οπότε

$$(BEZ)^2 = \frac{BE^2 \cdot EZ^2}{4} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2 \cdot (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{4} = \left(\frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 \right)^2.$$

Αφού $\lambda > 1$, $\lambda(\lambda^4 - 1) > 0$, έπεται ότι:

$$(BEZ) = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.

(3^{ος} τρόπος) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = 1$. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με $A(0,0)$, $B(0,\lambda^2)$, $\Gamma(\lambda^3,\lambda^2)$, $E(\lambda,0)$, και $Z(\lambda^3,\lambda^2 - 1)$, αφού $\Gamma Z = 1$. Τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{BE} = (\lambda, -\lambda^2), \overrightarrow{EZ} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 1) \text{ και}$$

$$\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda^2(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda = \lambda(\lambda^4 - 1) > 0,$$

οπότε

$$(BEZ) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ})| = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.