



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2025

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$A = ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2),$$

$$B = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2$$

και να γράψετε τον αριθμό A: B ως δύναμη με βάση το 5.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2) \\ &= (-27 + 27 - (-125) - 100) \cdot (9 - 4) \\ &= 25 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2 = (-125 + 100)^4 : (8 - 3)^2 = \\ &= (-25)^4 : (5)^2 = (-5^2)^4 : 5^2 = 5^8 : 5^2 = 5^6 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A: B = \frac{A}{B} = \frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου α για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$MK\Delta\{\alpha, 50\} + EK\P{\alpha, 90\} = 100.$$

Σημείωση

Με $MK\Delta\{\alpha, \beta\}$ συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων α, β .

Με $EK\P{\alpha, \beta\}$ συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ακέραιων α, β .

Λύση

Οι δυνατές τιμές του $MK\Delta\{\alpha, 50\}$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1 και μικρότερες ή ίσες του 50. Οι δυνατές τιμές του $EK\P{\alpha, 90\}$ είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 90. Επομένως τα πολλαπλάσια που είναι μεγαλύτερα του 90 αποκλείονται και μοναδική δυνατή τιμή είναι η $EK\P{\alpha, 90\} = 90$, οπότε $MK\Delta\{\alpha, 50\} = 10$.

Από την ισότητα $EK\P{\alpha, 90\} = 90$ προκύπτει ότι ο α πρέπει να είναι διαιρέτης του 90, δηλαδή $\alpha \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

Πρόβλημα 4. Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\beta\beta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta \quad \text{και} \quad B = \overline{\alpha\beta\beta} = 100\alpha + 10\beta + \beta,$$

με $\alpha \neq 0, \beta$ ψηφία. Αν ισχύει $A - B = 4900$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta\beta\beta} - \overline{\alpha\beta\beta} &= 4900 \Leftrightarrow 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta - (100\alpha + 10\beta + \beta) = 4900 \\ &\Leftrightarrow 900\alpha + 100\beta = 4900 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 49 \Leftrightarrow \beta = 49 - 9\alpha.\end{aligned}$$

Επειδή το β είναι ψηφίο, από την ισότητα $\beta = 49 - 9\alpha$ έπεται ότι το α δεν μπορεί, να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 5, αλλά ούτε και τιμή μικρότερη του 5. Άρα πρέπει να είναι $\alpha = 5$, οπότε $\beta = 49 - 9\alpha = 4$.

Θα μπορούσαμε επίσης να εργαστούμε ως εξής: Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έπεται ότι

$$0 \leq 49 - 9\alpha \leq 9 \Leftrightarrow -49 \leq -9\alpha \leq -40 \Leftrightarrow 40 \leq 9\alpha \leq 49 \Leftrightarrow \frac{40}{9} \leq \alpha \leq \frac{49}{9} \Leftrightarrow \alpha = 5,$$

οπότε θα είναι $\beta = 4$ και $\overline{\alpha\beta\beta\beta} = 5444$.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned}A = \overline{\alpha\beta\gamma} &= 100\alpha + 10\beta + \gamma = 20(\alpha + \beta + \gamma) + 6 \Leftrightarrow \\ 80\alpha - 10\beta - 19\gamma &= 6 \Leftrightarrow 80\alpha - 10\beta = 19\gamma + 6 \\ &\Leftrightarrow 10(8\alpha - \beta) = 19\gamma + 6.\end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $19\gamma + 6$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma = 6$.

Η τιμή $\gamma = 6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $A = 20(\alpha + \beta + \gamma) + 6$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός A έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(8\alpha - \beta) = 120 \Leftrightarrow 8\alpha - \beta = 12 \Leftrightarrow 8\alpha - 12 = \beta.$$

Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έχουμε ότι η μοναδική επιτρεπτή τιμή του α είναι $\alpha = 2$, οπότε προκύπτει ότι $\beta = 4$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 246$.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \frac{n^2 + 9n + 20}{n^2 + 3n - 4}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

Έχουμε ότι

$$v^2 + 9v + 20 = v^2 + 5v + 4v + 20 = v(v + 5) + 4(v + 5) = (v + 5)(v + 4).$$

$$v^2 + 3v - 4 = v^2 + 4v - v - 4 = v(v + 4) - (v + 4) = (v + 4)(v - 1).$$

Για να ορίζεται ο αριθμός A πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, οπότε πρέπει $(v + 4)(v - 1) \neq 0 \Leftrightarrow v + 4 \neq 0$ και $v - 1 \neq 0 \Leftrightarrow v \neq -4$ και $v \neq 1$.

$$A = \frac{v^2 + 9v + 20}{v^2 + 3v - 4} = \frac{(v + 5)(v + 4)}{(v - 1)(v + 4)} = \frac{v + 5}{v - 1} = \frac{v - 1 + 6}{v - 1} = 1 + \frac{6}{v - 1},$$

οπότε

$$A = 1 + \frac{6}{v - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{v - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow v - 1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\} \\ \Leftrightarrow v \in \{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}.$$

Σημείωση. Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$A = \frac{v^2 + 9v + 20}{v^2 + 3v - 4} = \frac{v^2 + 3v - 4 + 6v + 24}{v^2 + 3v - 4} = 1 + \frac{6(v + 4)}{(v - 1)(v + 4)} = 1 + \frac{6}{v - 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι εξισώσεις

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right), \quad (E_1)$$

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right). \quad (E_2)$$

με άγνωστο το x και το y , αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί a, b , με $b > 0$ είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακεράιου b για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

Λύση

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right) \Leftrightarrow 35x - 10a = 30x + b \\ \Leftrightarrow 5x = 10a + b \Leftrightarrow x = 2a + \frac{b}{5}.$$

Επειδή οι a, b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a , αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 5.

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right) \Leftrightarrow 24y - 18a = 21y + b \\ \Leftrightarrow 3y = 18a + b \Leftrightarrow y = 6a + \frac{b}{3}.$$

Επειδή οι a, b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a , αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3.

Επομένως η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου b για την οποία έχουν ακέραια λύση και οι δύο δεδομένες εξισώσεις, για κάθε ακέραιο a , είναι το $EKP\{5, 3\} = 15$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Z στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma\hat{A}Z}$ και η ευθεία AZ να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $AB = BZ$.

(β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

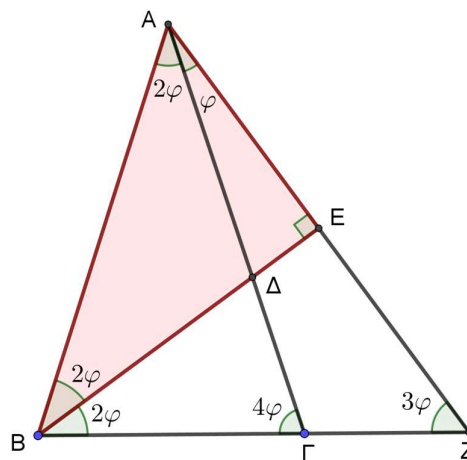
(α) Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ τέμνει την AZ στο E . Τότε τα τρίγωνα AEB και ZEB είναι ίσα, αφού έχουν

$$\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{Z\hat{E}B} = 90^\circ, \widehat{A\hat{B}E} = \widehat{Z\hat{B}E}$$

και η πλευρά BE είναι κοινή (Γ -Π- Γ). Συνεπώς, το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με $AB = BZ$ και $\widehat{B\hat{Z}A} = \widehat{B\hat{A}Z}$.

(β) Αν $\widehat{\Gamma\hat{A}Z} = \varphi$, τότε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 2\varphi$ και

$$\begin{aligned} \widehat{B\hat{Z}A} &= \widehat{B\hat{A}Z} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}Z} \\ &= 2\varphi + \varphi = 3\varphi. \end{aligned}$$



Επιπλέον, έχουμε

$$\widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}Z} + \widehat{Z\hat{A}\Gamma} = 3\varphi + \varphi = 4\varphi,$$

αφού η γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Gamma Z$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε

$$4\varphi + 4\varphi + 2\varphi = 180^\circ,$$

και άρα $\varphi = 18^\circ$. Επομένως είναι

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ \text{ και } \widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}Z} = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 30 και υπόλοιπο 16.

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned} A = \overline{\alpha\beta\gamma} &= 100\alpha + 10\beta + \gamma = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16 \Leftrightarrow \\ 70\alpha - 20\beta - 29\gamma &= 16 \Leftrightarrow 70\alpha - 20\beta = 29\gamma + 16 \\ \Leftrightarrow 10(7\alpha - 2\beta) &= 29\gamma + 16. \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $29\gamma + 16$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma = 6$.

Η τιμή $\gamma = 6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $A = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός A έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(7\alpha - 2\beta) = 190 \Leftrightarrow 7\alpha - 2\beta = 19 \Leftrightarrow 7\alpha = 2\beta + 19.$$

Επειδή το β είναι ψηφίο οι δυνατές τιμές του $7\alpha = 2\beta + 19$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 19 και μικρότερες ή ίσες του 37. Επομένως οι δυνατές τιμές του ψηφίου α είναι μεγαλύτερες του 2 και μικρότερες του 6. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να προκύψει και ως εξής:

Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έχουμε

$$0 \leq 2\beta \leq 18 \Leftrightarrow 19 \leq 2\beta + 19 \leq 37 \Leftrightarrow 19 \leq 7\alpha \leq 37$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{7} \leq \alpha \leq \frac{37}{7} \Leftrightarrow \alpha \in \{3, 4, 5\}.$$

- Αν $\alpha = 3$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 2 \Rightarrow \beta = 1$ και $A = 316$, ο οποίος απορρίπτεται, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του είναι 10 και είναι μικρότερο από το υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Αν $\alpha = 4$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 9$, απορρίπτεται.
- Αν $\alpha = 5$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 16 \Rightarrow \beta = 8$ και $A = 586$.

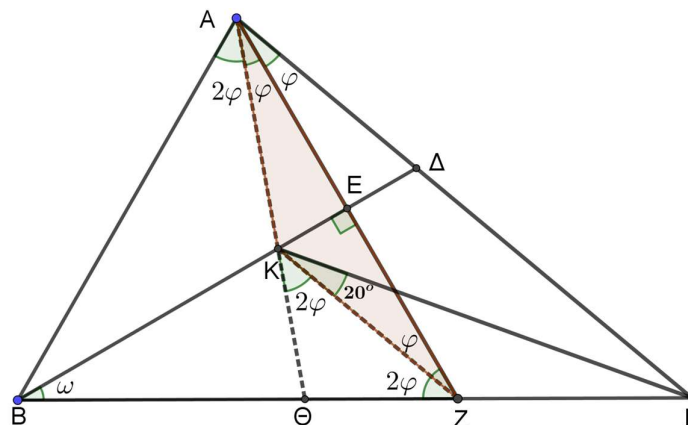
Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}Z} = 3 \cdot \widehat{Z\hat{A}\Gamma}$ και $BZ = BA$. Έστω Θ σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\widehat{\Theta\hat{A}Z} = \widehat{Z\hat{A}\Gamma}$ και έστω K το σημείο τομής της $A\Theta$ με την διχοτόμο της γωνίας B .

(α) Να εκφράσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της γωνίας $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \varphi$.

(β) Να αποδείξετε ότι $AZ = K\Gamma$.

(γ) Αν ισχύει $\widehat{Z\hat{K}\Gamma} = 20^\circ$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση



(α) Έστω ότι $\widehat{Z\hat{B}\Delta} = \omega$. Από την υπόθεση έχουμε $\widehat{B\hat{A}Z} = 3\varphi$, αφού $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \varphi$. Επειδή στο τρίγωνο ABZ η διχοτόμος BE είναι και ύψος, έπεται ότι αυτό είναι ισοσκελές με

$$\widehat{A\hat{Z}B} = \widehat{B\hat{A}Z} = 3\varphi.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο BEZ έχουμε την ισότητα:

$$\omega + 3\varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \omega = 90^\circ - 3\varphi \quad (1).$$

Άρα έχουμε:

$$\hat{A} = 4\varphi \text{ και } \hat{B} = 2\omega = 2(90^\circ - 3\varphi) = 180^\circ - 6\varphi.$$

Από το τρίγωνο AZΓ με εξωτερική γωνία την $\hat{A}ZB = 3\varphi$ έχουμε την ισότητα:

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}ZB - \hat{Z}A\Gamma = 3\varphi - \varphi = 2\varphi.$$

(β) Η ευθεία BK είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AZ, και άρα

$$KA = KZ \text{ και } \hat{K}ZA = \hat{K}AZ = \varphi.$$

Έτσι, έχουμε $\hat{\theta}KZ = 2\varphi$ και $\hat{\theta}ZK = \hat{\theta}ZA - \hat{K}ZA = 3\varphi - \varphi = 2\varphi$, οπότε το τρίγωνο ZΘK είναι ισοσκελές με $\theta Z = \theta K$.

Όμως έχουμε

$$\hat{\theta}A\Gamma = 2\varphi = \hat{\Gamma} = \hat{\theta}\Gamma A,$$

οπότε το τρίγωνο AΘΓ είναι ισοσκελές με $\theta\Gamma = \theta A$. Άρα έχουμε

$$Z\Gamma = \theta\Gamma - \theta Z = \theta A - \theta K = AK,$$

(ως διαφορές ίσων τμημάτων).

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα AKZ και KZΓ είναι ίσα αφού έχουν:

$$KZ \text{ κοινή πλευρά, } AK = KZ \text{ και } \hat{K}Z\Gamma = 180^\circ - 2\varphi = \hat{A}KZ, \text{ (Π-Γ-Π)}$$

και άρα $AZ = K\Gamma$.

(γ) Αν ισχύει $\hat{Z}K\Gamma = 20^\circ$, τότε $\varphi = 20^\circ$, οπότε από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\hat{A} = 4\varphi = 80^\circ, \quad \hat{B} = 180^\circ - 6\varphi = 60^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = 2\varphi = 40^\circ.$$

Πρόβλημα 3. Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες α, β τέτοιες ώστε $\alpha^2 = 45\beta + 2024\alpha\beta$ και $\beta^2 = 45\alpha + 2024\alpha\beta$.

Λύση. Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες α, β είναι η

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών α, β . Αφαιρώντας τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 - \beta^2 = 45(\beta - \alpha),$$

οπότε

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -45(\alpha - \beta),$$

και αφού $\alpha \neq \beta$, παίρνουμε

$$\alpha + \beta = -45.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 45(\alpha + \beta) + 4048\alpha\beta.$$

Είναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-45)^2 - 2\alpha\beta = 2025 - 2\alpha\beta,$$

οπότε παίρνουμε

$$2025 - 2\alpha\beta = 45 \cdot (-45) + 4048\alpha\beta,$$

η οποία δίνει

$$\alpha\beta = 1.$$

Συνεπώς, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η

$$x^2 + 45x + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της διαφοράς $\alpha - \beta$.

Λύση (1ος τρόπος) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \\ &(\alpha - \beta)^3 - 1^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)((\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) + 1) + 3\alpha\beta(\alpha - \beta - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - \beta - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha - 2\beta + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + 1)^2 + (\beta - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 &\Leftrightarrow \\ \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.&\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Έστω $x = \alpha - \beta$, οπότε θέτοντας $\alpha = x + \beta$ στην $\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta - 1 = 0$ παίρνουμε

$$(x + \beta)^3 - \beta^3 - 3(x + \beta)\beta - 1 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3 + 3\beta^2x + 3\beta x^2 - 3\beta x - 3\beta^2 - 1 = 0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x - 1$ παίρνουμε

$$(x - 1)(x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1) = 0,$$

οπότε

$$x = 1 \text{ ή } x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta + 1)^2 - 4(3\beta^2 + 1) = -3\beta^2 + 6\beta - 3 = -3(\beta - 1)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = 1 \text{ και } x = -\frac{3\beta + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της διαφοράς $x = \alpha - \beta$ είναι το 1 και το -2.

3ος τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 + (-\beta)^3 + (-1)^3 = 3\alpha(-\beta)(-1) \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$|2x + 2| - |2x - 8| = a \quad (E)$$

με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο.

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου a :

(α) Αν η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις.

(β) Αν η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης σε διάφορα διαστήματα που θα προκύψουν από την αλλαγή προσήμου των παραστάσεων $2x + 2$ και $2x - 8$ που βρίσκονται στην εξίσωση με την απόλυτη τιμή τους. Επειδή

$$2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1, \quad 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1, \\ 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 4, \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και } 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4,$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $x \leq -1$. Τότε

$$(E) \Leftrightarrow -2x - 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a + 10,$$

η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε $x \leq -1$, αν $a = -10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq -10$.

(β) $-1 < x < 4$. Τότε

$$(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 4 \cdot x = a + 6 \Leftrightarrow x = \frac{a + 6}{4},$$

δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε a τέτοιο ώστε

$$-1 < x = \frac{a + 6}{4} < 4 \Leftrightarrow -4 < a + 6 < 16 \Leftrightarrow -10 < a < 10.$$

(γ) $x \geq 4$. Τότε

$$(E) \Leftrightarrow 2x + 2 - (2x - 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a - 10,$$

η οποία έχει απειρία λύσεων, δηλαδή κάθε $x \geq 4$, αν $a = 10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq 10$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε:

Αν η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, τότε $a = -10$ ή $a = 10$.

Αν η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, τότε $-10 < a < 10$.

(2ος τρόπος) Γραφική επίλυση

Παρατηρούμε ότι $|2x + 2| = 2|x + 1|$ και $|2x - 8| = 2|x - 4|$, οπότε η (E) γράφεται ισοδύναμα

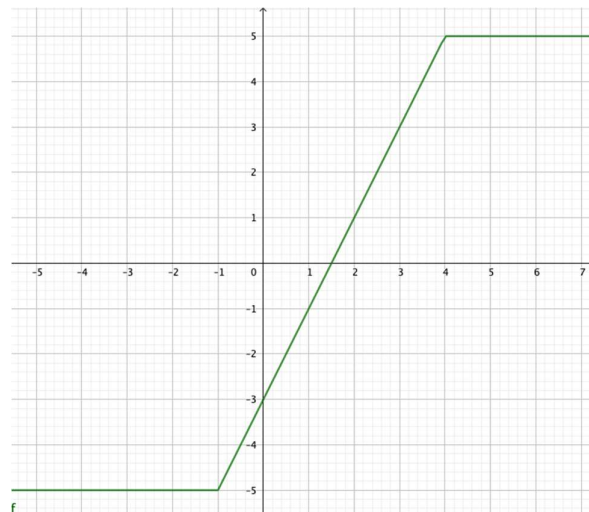
$$|x + 1| - |x - 4| = \frac{a}{2}.$$

Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις

- $x < -1$. Τότε $|x + 1| = -x - 1$, και $|x - 4| = -x + 4$, οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (-x - 1) - (-x + 4) = -x - 1 + x - 4 = -5$.
- $-1 \leq x < 4$. Τότε $|x + 1| = x + 1$, και $|x - 4| = -x + 4$, οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (-x + 4) = x + 1 + x - 4 = 2x - 3$.
- $4 \leq x$. Τότε $|x + 1| = x + 1$, και $|x - 4| = x - 4$, οπότε
- $|x + 1| - |x - 4| = (x + 1) - (x - 4) = 5$.

Η γραφική παράσταση της $y = |x + 1| - |x - 4|$ είναι η παρακάτω:

- (i) Η εξίσωση (E) έχει άπειρες λύσεις, αν, και μόνο αν, η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\alpha}{2}$ τέμνει την $y = |x + 1| - |x - 4|$ σε άπειρα το πλήθος σημεία. Από την παραπάνω γραφική παράσταση, αυτό συμβαίνει για την $y = 5$ η οποία προκύπτει όταν $\alpha = 10$, και την $y = -5$ για $\alpha = -10$, και μόνο για αυτές.



- (ii) Η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\alpha}{2}$ τέμνει την $y = |x + 1| - |x - 4|$ σε ακριβώς ένα σημείο. Αυτό συμβαίνει, αν, και μόνο αν, $-5 < \frac{\alpha}{2} < 5$, δηλαδή, αν, και μόνο αν, $-10 < \alpha < 10$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ότι οι αριθμοί

$$\frac{3\mu - 1}{\nu} \quad \text{και} \quad \frac{2\nu - 1}{\mu}$$

είναι θετικοί ακέραιοι. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν) .

Λύση

Έστω ότι $\frac{3\mu-1}{\nu} = \kappa$ και $\frac{2\nu-1}{\mu} = \lambda$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι

$$3\mu - 1 = \kappa\nu \text{ και } 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = 2\kappa\nu \text{ και } 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = \kappa(\lambda\mu + 1) \Rightarrow (6 - \kappa\lambda)\mu = \kappa + 2 \Rightarrow \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda}.$$

Επειδή ο μ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $6 - \kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < 6$.

Επομένως είναι κ, λ θετικοί ακέραιοι και

$$0 < \kappa\lambda < 6, \quad \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda} \text{ και } \nu = \frac{3\mu - 1}{\kappa}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = \lambda = 1 \Rightarrow \mu = \frac{3}{5}$, μη δεκτή τιμή
- $\kappa\lambda = 2 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 2 \Rightarrow (\mu, \nu) = (1, 1)$ ή $(\mu, \nu) = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$. μη δεκτή
- $\kappa\lambda = 3 \Rightarrow \kappa = 3, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 3 \Rightarrow (\mu, \nu) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, μη δεκτή ή $(\mu, \nu) = (1, 2)$.
- $\kappa\lambda = 4 \Rightarrow \kappa = 2, \lambda = 2$ ή $\kappa = 4, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 4$
 $\Rightarrow (\mu, \nu) =$, μη δεκτή, ή $(\mu, \nu) = (3, 2)$ ή $(\mu, \nu) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, μη δεκτή.
- $\kappa\lambda = 5 \Rightarrow \kappa = 5, \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 5 \Rightarrow (\mu, \nu) = (7, 4)$ ή $(\mu, \nu) = (3, 8)$

Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν) είναι:

$$(\mu, \nu) \in \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (7, 4), (3, 8)\}.$$

2ος τρόπος. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. $\nu \leq \mu$. Τότε $0 < \frac{2\nu-1}{\mu} < \frac{2\nu}{\mu} \leq 2$, οπότε αναγκαστικά $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$, και άρα $2\nu - 1 = \mu$.

Τότε ο αριθμός $\frac{3\mu-1}{\nu} = \frac{3(2\nu-1)-1}{\nu} = 6 - \frac{4}{\nu}$ είναι ακέραιος, αν, και μόνο αν, $\nu = 1, 2$ ή 4 .

Αφού $\mu = 2\nu - 1$, παίρνουμε $\mu = 1, 3$ ή 7 , αντίστοιχα, οπότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$, για τα ζεύγη $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2)$, και $(7, 4)$.

2. $\mu < \nu$. Τότε $0 < \frac{3\mu-1}{\nu} < \frac{3\mu}{\nu} < 3$, οπότε $\frac{3\mu-1}{\nu} = 1$ ή 2 , και άρα $3\mu - 1 = \nu$ ή $3\mu - 1 = 2\nu$. Εξετάζουμε τις υποπεριπτώσεις:

- $3\mu - 1 = \nu$. Τότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{6\mu-3}{\mu} = 6 - \frac{3}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ και $\nu = 2$ ή $\mu = 3$ και $\nu = 8$ που προφανώς γίνονται δεκτές.
- $3\mu - 1 = 2\nu$. Τότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{3\mu-2}{\mu} = 3 - \frac{2}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ που δεν δίνουν ακέραιες λύσεις για τον ν με $\nu > \mu$.

Συνεπώς, οι λύσεις είναι τα εξής πέντε ζεύγη $(\mu, \nu) = (1, 1), (3, 2), (7, 4), (1, 2)$ και $(3, 8)$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το Γ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ και $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\hat{A}\Delta$. Έστω σημείο E στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$ και έστω H το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος BE με το ύψος AZ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΗ είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ.

(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

Λύση

(α) Θέτουμε $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \varphi$, οπότε θα είναι $\widehat{A} = 2\varphi$. Θέτουμε επίσης $\widehat{\Gamma\Delta E} = \omega = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$ (αφού $\Gamma\Delta E$ ισοσκελές τρίγωνο από υπόθεση). Τότε θα είναι $\widehat{\Gamma} = 2\omega$ (ως εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$) και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 2\omega$.

Θέτουμε επίσης $\widehat{A\hat{L}E} = \theta$.

Επειδή η γωνία $\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\hat{E}\Delta$ έχουμε την ισότητα:

$$\omega = \varphi + \theta. \quad (1)$$

Επειδή $B\Delta = AB$ το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με

$$\widehat{B\hat{\Delta}\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}A} \Rightarrow 3\varphi = \omega + \theta. \quad (2)$$

Από το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \varphi + 2\omega = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\omega = \varphi + \theta = 3\varphi - \theta \Rightarrow \varphi = \theta \quad (4)$$

οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\omega = 2\varphi \text{ και } 5\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 18^\circ, \theta = 18^\circ, \omega = 36^\circ \text{ και } \widehat{A} = 36^\circ, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 72^\circ.$$

(β) Από την ισότητα $\varphi = \theta$ προκύπτει ότι $EA = ED$ και αφού $B\Delta = AB$, έπεται ότι η ευθεία BE είναι μεσοκάθετη της πλευράς AD του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$. Επομένως το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Delta$, οπότε $DH \perp AB$.

(γ) Επιπλέον η ευθεία BE διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{\Delta\hat{B}E} = \omega = 36^\circ = \widehat{E\hat{B}\Delta}$, οπότε $EB = ED$ και αφού $EA = ED$, έπεται ότι το σημείο E είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Delta$.

2ος τρόπος.

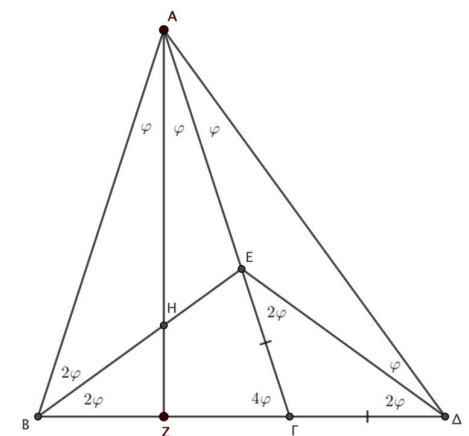
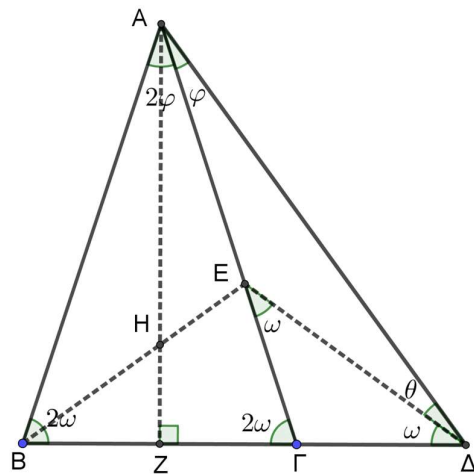
Έστω $\varphi = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$. Αφού το ύψος στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, και αφού $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$, έχουμε

$$\widehat{B\hat{A}Z} = \widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \varphi.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\widehat{B\hat{\Delta}A} = \widehat{B\hat{\Delta}\Delta} = 3\varphi$, οπότε η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}\hat{A}}$ ως εξωτερική στο τρίγωνο $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με

$$\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}\Lambda} + \widehat{\Gamma\hat{\Delta}A} = \varphi + 3\varphi = 4\varphi.$$

Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $BA\Gamma$, βρίσκουμε



$$\frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = \widehat{B\Gamma A} = 4\varphi$$

και άρα $\varphi = 18^\circ$. Εύκολα βρίσκουμε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$:

$$\hat{A} = 2\varphi = 36^\circ, \hat{B} = \hat{\Gamma} = 4\varphi = 72^\circ.$$

Επιπλέον, αφού η γωνία $\widehat{B\Gamma A}$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $E\Gamma\Delta$, παίρνουμε $\widehat{E\Delta\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma A}}{2} = 2\varphi$, και άρα

$$\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Gamma\Delta A} - \widehat{E\Delta\Gamma} = 3\varphi - 2\varphi = \varphi = \widehat{\Delta A E}.$$

Έτσι, το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές με $AE = ED$. Αφού $AB = BD$, η ευθεία BE είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AD , οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ABD , η BE διχοτομεί την γωνία $\widehat{ABD}$, δίνοντας

$$\widehat{ABE} = \widehat{EB\Gamma} = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{B\Gamma A}}{2} = 2\varphi.$$

Συνεπώς, από τα ισοσκελή τρίγωνα AEB , $BE\Delta$ και AED παίρνουμε $AE = BE = DE$, δηλ. το E είναι το περίκεντρο του ABD .

Τέλος, αφού $AZ \perp BD$ και $BE \perp AD$, το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του ABD , οπότε $\Delta H \perp AB$.

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αθροίσματος $\alpha + \beta$.

Λύση, (1ος τρόπος) Έχουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta = 8 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta = 8 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 2^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta - 2)((\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta) + 4) - 3\alpha\beta(\alpha + \beta - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta - 2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta - 2 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 2 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha + 4\beta + 8 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 2 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha = \beta = -2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 2 \text{ ή } \alpha + \beta = -4.$$

2ος τρόπος. Έστω $x = \alpha + \beta$, οπότε θέτοντας $a = x - \beta$ στην $\alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta - 8 = 0$ παίρνουμε

$$(x - \beta)^3 + \beta^3 + 6(x - \beta)\beta - 8 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3 - 3\beta x^2 + 3\beta^2 x + 6\beta x - 6\beta^2 - 8 = 0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x - 2$ παίρνουμε

$$(x - 2)(x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4) = 0,$$

οπότε

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$ είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta - 2)^2 - 4(3\beta^2 + 4) = -3\beta^2 - 12\beta - 12 = -3(\beta + 2)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2 - (3\beta - 2)x + 3\beta^2 + 4$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = -2 \quad \text{και} \quad x = \frac{3\beta - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $x = \alpha + \beta$ είναι το 2 και το -4 .

3ος τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta &= 8 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + (-2)^3 = 3\alpha\beta(-2) \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta - 2 &= 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha + \beta = -4. \end{aligned}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$||2x - 4| - a| = 8 \quad (E)$$

με άγνωστο το x και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο. Αν η εξίσωση (E) έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a και τις τρεις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} ||2x - 4| - a| = 8 &\Leftrightarrow |2x - 4| - a = 8 \quad \text{ή} \quad |2x - 4| - a = -8 \Leftrightarrow \\ |2x - 4| &= a + 8 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad |2x - 4| = a - 8 \quad (E_2) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (E_1) είναι αδύνατη για $a < -8$, έχει μοναδική λύση $x = 2$ για $a = -8$ και έχει δύο λύσεις για $a > -8$, οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} |2x - 4| &= a + 8 \Leftrightarrow 2x - 4 = a + 8 \quad \text{ή} \quad 2x - 4 = -a - 8 \\ \Leftrightarrow 2x &= a + 12 \quad \text{ή} \quad 2x = -a - 4 \Leftrightarrow x = \frac{a + 12}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a + 4}{2}. \end{aligned}$$

Η εξίσωση (E_2) είναι αδύνατη για $a < 8$, έχει μοναδική λύση $x = 2$ για $a = 8$ και έχει δύο λύσεις για $a > 8$.

Επομένως η εξίσωση (E) μπορεί να έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, μόνον όταν $a = 8$. Τότε η εξίσωση (E) έχει τη λύση $x = 2$ από την εξίσωση (E_2) και άλλες δύο λύσεις από την εξίσωση (E_1) , οι οποίες είναι:

$$x = \frac{a + 12}{2} = 10 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a + 4}{2} = -6.$$

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_1 = 1$ και

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2024} \alpha_{2025}.$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n} = 1 + \frac{1}{\alpha_n} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} = 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα η ακολουθία $\frac{1}{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 1, οπότε

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1} + (n - 1) = 1 + n - 1 = n \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Επιπλέον, από την ισότητα έχουμε

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1} \Rightarrow \alpha_n \alpha_{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*,$$

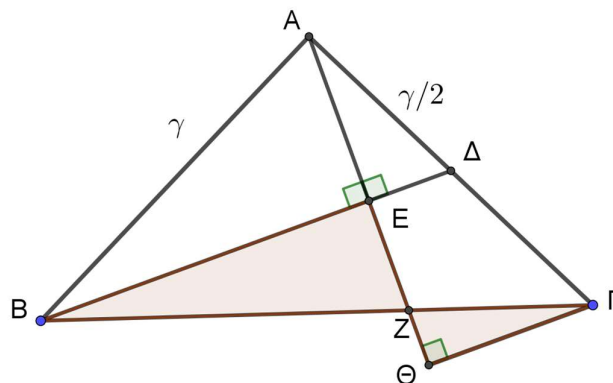
οπότε θα είναι

$$\begin{aligned} \Sigma &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2024} \alpha_{2025} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_{2024} - \alpha_{2025}) \\ &= \alpha_1 - \alpha_{2025} = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}. \end{aligned}$$

Σημείωση. Η υπόθεση ότι $\alpha_n > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, αν δεν δίνεται, μπορεί να προκύψει εύκολα με επαγωγή.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Αν το Z είναι σημείο στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε η ευθεία AZ να είναι κάθετη στην ευθεία BD και να ισχύει $BZ = 2 \cdot Z\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)



Έστω $AB = A\Gamma = \gamma$, οπότε $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$.

Φέρουμε από το σημείο Γ την κάθετη προς την ευθεία AZ που την τέμνει, έστω στο σημείο Θ . Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα BEZ και $\Gamma\Theta Z$ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{BE}{\Gamma\Theta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 2 \Rightarrow BE = 2 \cdot \Gamma\Theta \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΘΓ το τμήμα ΕΔ είναι μεσοπαράλληλο, οπότε

$$\Gamma\Theta = 2 \cdot \Delta E \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$BE = 4 \cdot \Delta E \quad (3)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ έχουμε:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = AD^2 - \Delta E^2 \Leftrightarrow \gamma^2 - 16 \cdot \Delta E^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \Delta E^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = \frac{\gamma^2}{20}.$$

Άρα είναι

$$\Delta E = \frac{\gamma\sqrt{5}}{10}, \quad BE = \frac{4\gamma\sqrt{5}}{10} \quad \text{και} \quad B\Delta = BE + E\Delta = \frac{\gamma\sqrt{5}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 + AD^2 = \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{5\gamma^2}{4} = B\Delta^2,$$

οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ότι $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$,
οπότε είναι και $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$.

Δεύτερη λύση

Έστω Ο το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με $O(0,0)$, $A(0,2\alpha)$, $B(-6\beta,0)$ και $\Gamma(6\beta,0)$. Τότε είναι $Z(2\beta,0)$ και $\Delta(3\beta,\alpha)$. Από εδώ μπορούμε να προχωρήσουμε με δύο τρόπους:

2ος τρόπος: Διανυσματική λύση

Αφού $\overrightarrow{AZ} \perp \overrightarrow{B\Delta}$, είναι $\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 0$. Είναι $\overrightarrow{AZ} = (2\beta, -2\alpha)$ και $\overrightarrow{B\Delta} = (9\beta, \alpha)$ οπότε

$$0 = \overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 2\beta \cdot 9\beta + (-2\alpha) \cdot \alpha = 2(9\beta^2 - \alpha^2),$$

και άρα $9\beta^2 - \alpha^2 = 0$. Επίσης, $\overrightarrow{AB} = (-6\beta, -2\alpha)$ και $\overrightarrow{AD} = (3\beta, -\alpha)$ με

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -6\beta \cdot 3\beta + (-2\alpha) \cdot (-\alpha) = -2(9\beta^2 - \alpha^2) = 0.$$

Συνεπώς $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, και άρα $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$.

3ος τρόπος: Λύση με Αναλυτική γεωμετρία.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι

$$\lambda_{AZ} = \frac{0 - 2\alpha}{2\beta - 0} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας ΒΔ είναι

$$\lambda_{B\Delta} = \frac{\alpha - 0}{3\beta - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{9\beta}.$$

Αφού $AZ \perp B\Delta$, είναι $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1$, οπότε παίρνουμε

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{9\beta} = -1,$$

δηλ. $\alpha^2 = 9\beta^2$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{2\alpha - 0}{0 - (-6\beta)} = \frac{\alpha}{3\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας AD είναι

$$\lambda_{AD} = \frac{\alpha - 2\alpha}{3\beta - 0} = -\frac{\alpha}{3\beta},$$

με το γινόμενο τους να είναι

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AD} = \frac{\alpha}{3\beta} \cdot \left(-\frac{\alpha}{3\beta}\right) = -\frac{\alpha^2}{9\beta^2} = -1.$$

Συνεπώς $AB \perp AD$, και άρα $\widehat{B\hat{A}D} = 90^\circ$.

Πρόβλημα 4. Έστω $P(x)$ πολώνυμο με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $P(1) = 9$ και $P(9) = 1481$. Να βρεθεί η τιμή του $P(10)$.

Λύση

Έστω

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

όπου $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $a_n > 0$. Αφού

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = P(1) = 9,$$

έπεται ότι $0 \leq a_i \leq 9$ για κάθε $0 \leq i \leq n$. Επίσης, είναι

$$1481 = P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $1481 - a_0 = 164 \cdot 9 + (5 - a_0)$ διαιρείται με το 9, με $-4 \leq 5 - a_0 \leq 5$, αφού το a_0 είναι ψηφίο. Άρα είναι $a_0 = 5$, οπότε

$$164 = a_n 9^{n-1} + a_{n-1} 9^{n-2} + \dots + a_1,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $164 - a_1 = 18 \cdot 9 + (2 - a_1)$ διαιρείται με το 9, με $-7 \leq 2 - a_1 \leq 2$, αφού το a_1 είναι ψηφίο. Άρα $a_1 = 2$, οπότε

$$18 = a_n 9^{n-2} + \dots + a_2.$$

Αφού $a_2 < 18$, έπεται ότι $n - 2 > 0$, δηλ. $n > 2$. Αν $n \geq 4$, τότε

$$18 \geq a_n 9^{n-2} \geq 9^{n-2} \geq 9^2 = 81 > 18,$$

άτοπο. Άρα $n = 3$, οπότε

$$18 = a_3 9 + a_2$$

με $0 \leq a_2 + a_3 \leq P(1) - a_0 - a_1 = 9 - 5 - 2 = 2$. Αφού το 9 διαιρεί το $a_2 = 18 - 9a_3$ έπεται ότι $a_2 = 0$ και άρα $a_3 = 2$.

Συνεπώς, $P(x) = 2x^3 + 2x + 5$, οπότε $P(10) = 2025$.

Σχόλιο. Με διαδοχικές Ευκλείδειες διαιρέσεις με το 9, έχουμε

$$1481 = 164 \cdot 9 + 5, \quad 164 = 18 \cdot 9 + 2, \quad \text{και} \quad 18 = 2 \cdot 9 + 0.$$

Έτσι, είναι $164 = (2 \cdot 9) \cdot 9 + 2 = 2 \cdot 9^2 + 2$, και παίρνουμε την ισότητα

$$1481 = (2 \cdot 9^2 + 2) \cdot 9 + 5 = 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 5,$$

η οποία μας δίνει την *μοναδική* παράσταση του 1481 στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 9. Ουσιαστικά στην παραπάνω λύση αποδεικνύουμε την μοναδικότητα αυτή.