

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

41^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε δύο από αυτούς να έχουν διαφορά μεγαλύτερη του $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός x , ώστε

$$x^2 - 4(a + b + c)x + 12(ab + bc + ca) < 0.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 με κέντρο το σημείο O . Θεωρούμε το κύκλο Γ_2 που έχει κέντρο σημείο D , το οποίο ανήκει στον κύκλο Γ_1 , και εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F . Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία K και G (το σημείο K βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BFE). Αν η ευθεία KG τέμνει τις ευθείες FE και CD στα σημεία M και N , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCNM$ είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Θεωρούμε δύο πεπερασμένα υποσύνολα A, B των ακεραίων αριθμών, ώστε το σύνολο A να έχει το πολύ n στοιχεία και έστω Γ ένα υποσύνολο του συνόλου $\{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$. Ο Αχιλλέας γράφει σε ένα πίνακα όλες τις δυνατές διαφορές $\alpha - \beta$, με $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Έστω d το πλήθος όλων αυτών των διαφορών. Στη συνέχεια ο Αχιλλέας καταγράφει σε ένα άλλο πίνακα όλες τις τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Έστω p το πλήθος όλων αυτών των τριάδων. Να αποδείξετε ότι: $n \cdot p \geq d^2$.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$, τέτοιος ώστε το πλήθος όλων των ζευγών (a, b) θετικών ακεραίων αριθμών με

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

να είναι μεγαλύτερο του 2024.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία