

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ – ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

A2. Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και

ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Μονάδες 7

A4. Να συμπληρώσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) Για $x > 0$, $(\sqrt{x})' =$ β) Για $\nu \in \mathbb{N}$, $(x^{-\nu})' =$ γ) Για $a > 0$, $(a^x)' =$

δ) $(f(g(x)))' =$ ε) Για $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $(x^a)' =$ στ) Για $f(x) > 0$, $(\sqrt{f(x)})' =$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2$.

B1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

Μονάδες 8

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -x + 2019$.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων της f και g .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^{x\eta\mu x}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την παράγωγο της f , όπου ορίζεται στο διάστημα $[-1, \pi]$.

Μονάδες 10

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης που είναι παράλληλη στον άξονα x' .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{2x}}{x - 2} = -\frac{5}{2}$ και $f(x) = f(x+4)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = -2$

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_1 = 6$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Δ2, είναι $\varepsilon: y = -2x + 14$,

και η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 2x + 2\lambda$ να αποδείξετε ότι $\lambda = 9$.

Μονάδες 6

Δ4. Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = g(x)$ με $x \geq 0$, όπου g η συνάρτηση του ερωτήματος Δ3. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης, αν $x'(t) > 0$

Μονάδες 6