ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση
Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$

$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$

$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$

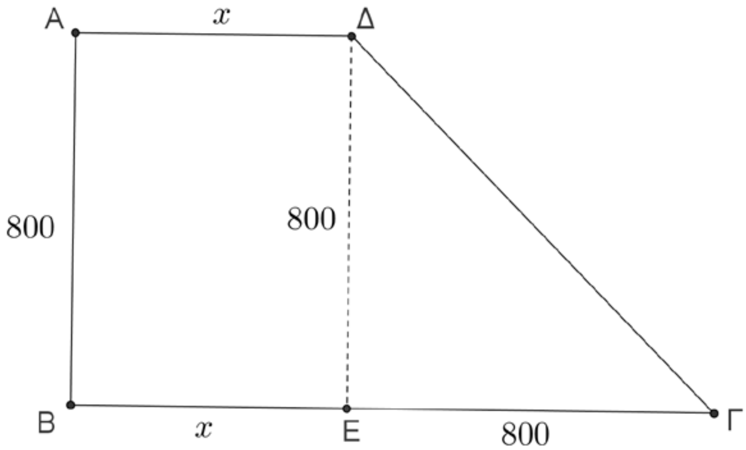
$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση $\mathrm{A\Delta}$, μεγάλη βάση $\mathrm{B\Gamma}$ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Λύση
Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\Delta\mathrm{E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\Gamma\Delta=800\sqrt{2}$ μέτρα.



Σχήμα 1

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{2x + 800}{2} \cdot 800 = (x + 400) \cdot 800 = 800x + 320000.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $\mathrm{A}\Delta = 600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800 \cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{A}\Gamma\Delta$ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha = \mathrm{A}\Delta$.

Λύση

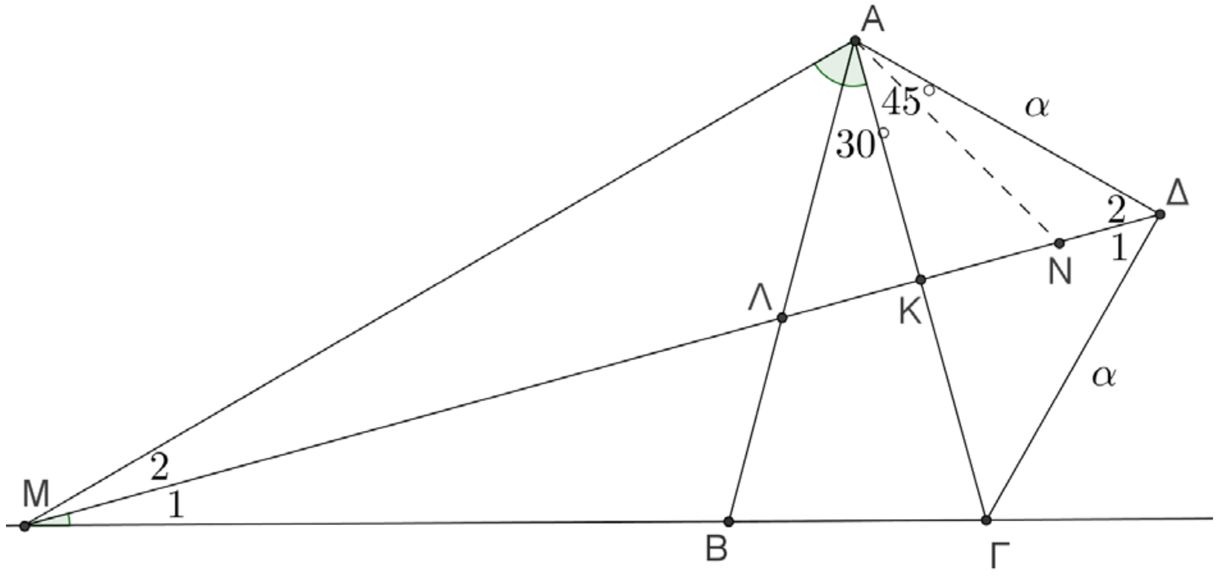
(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{M}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda + \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda = \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία Λ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{\Lambda K} = \mathrm{KN}$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΝ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, οπότε $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AN}$ και ομοίως $\mathrm{\Lambda\hat{A}K} = \mathrm{N\hat{A}K} = 30^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{\Lambda\hat{A}N} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΛΑΝ είναι ισόπλευρο και έχουμε $\mathrm{\Lambda N} = \mathrm{A\Lambda}$. Αν είναι $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{\Lambda N} = x$, τότε θα είναι $\mathrm{\Lambda K} = \frac{\mathrm{\Lambda N}}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A\Lambda}^2 - \mathrm{\Lambda K}^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow= x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

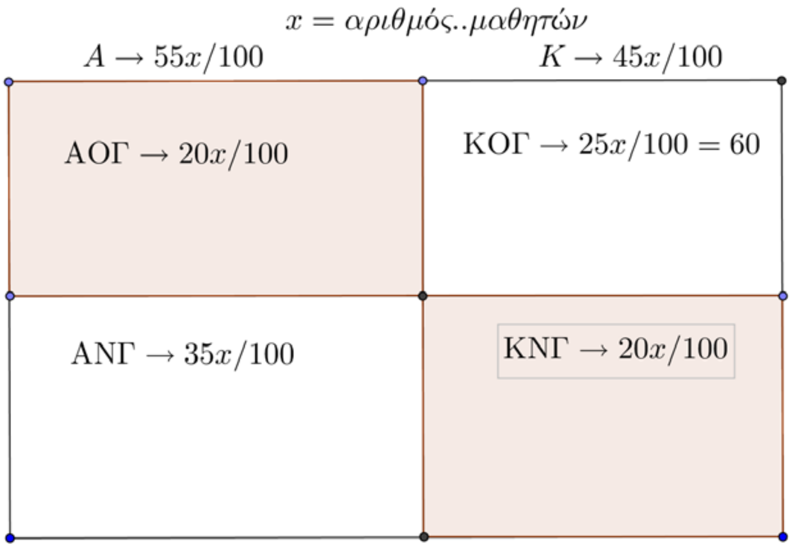
Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11}\cdot\frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55-35) = 20\%$ είναι το ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά είναι $(100-55-20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60\cdot\frac{100}{25}=240$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:



Σχήμα 3

Συμβολικά έχουμε:

$$\mathrm{A} = \text{σύνολο αγοριών σχολείου με } |\mathrm{A}|=\frac{55x}{100}.$$

$$\mathrm{K} = \text{σύνολο κοριτσιών σχολείου με } |\mathrm{K}|=\frac{45x}{100}.$$

ΑΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.
ΑΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.
ΚΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.
ΚΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

Από την υπόθεση έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων των συνόλων** ΑΟΓ **και** ΚΝΓ **είναι το ίδιο**, δηλαδή:

$$|\mathrm{ΑΟΓ}|=|\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

οπότε έχουμε τα λογικά βήματα:

$$(\text{αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά})|\mathrm{ΚΝΓ}|+|\mathrm{ΑΝΓ}|=|\mathrm{ΑΟΓ}|+|\mathrm{ΑΝΓ}|=\frac{55x}{100}(\text{αριθμός αγοριών}),$$

$$|\mathrm{ΑΝΓ}|=\frac{7}{11}\cdot\frac{55x}{100}=\frac{35x}{100},$$

$$|\mathrm{ΑΟΓ}|=(55-35)\frac{x}{100}=\frac{20x}{100}=|\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

$$|\mathrm{ΚΟΓ}|=(45-20)\frac{x}{100}=\frac{25x}{100}=60 \Leftrightarrow x=240$$

2^{ος} τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa\Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι *60*, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow}y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν }\ x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1=16x^4\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)=\left(16x^4-1\right)\left(x^2-1\right)=$$
$$=\left(4x^2+1\right)\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=\left(4x^2+1\right)(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$
$$Q(x)=4x^4-5x^2+1=4x^4-4x^2-x^2+1=4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow 4x^2+1=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{2}$ και $x\neq\pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x=2014-y$ και

$$2014-y=\omega y+97,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ \omega\geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=1917,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=3^3\cdot 71,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917=3^3\cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y=3\cdot 71=213\ \text{ή}\ \ y=3^2\cdot 71=639\ \text{ή}\ \ y=3^3\cdot 71=1917$$

- Για $y=213$, είναι $x=1801$ και $\omega=8$.
- Για $y=639$, είναι $x=1375$ και $\omega=2$.
- Για $y=1917$, είναι $x=97<y=1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\text{Α}\Delta=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\text{Α}\Gamma^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2\Leftrightarrow \text{Α}\Gamma=\alpha\sqrt{2},$$

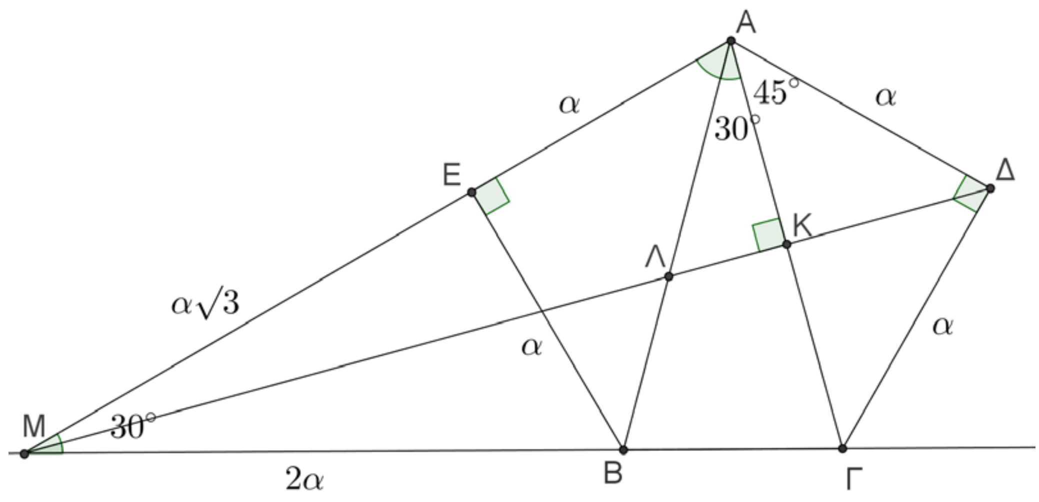
οπότε θα είναι: $\mathrm{AK} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\mathrm{K\hat{A}\Lambda} = 30^\circ$, αν $\mathrm{K\Lambda} = x$, έχουμε

$$x = \mathrm{K\Lambda} = \mathrm{A\Lambda} \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Lambda} \Rightarrow \mathrm{A\Lambda} = 2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AK}^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σχήμα 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MA} = \mathrm{M\Gamma} \text{ και } \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

οπότε $\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = 75^\circ \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B} + 30^\circ = 75^\circ \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B} = 45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΕΜ.

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{AE} = \alpha$ και $\mathrm{BE} = \alpha$.

Το τρίγωνο ΒΜΕ έχει

$$\mathrm{M\hat{B}E} = \mathrm{B\hat{M}A} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{BE} = \mathrm{BM} \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BM} \Rightarrow \mathrm{BM} = 2\alpha \text{ και}$$

$$\mathrm{ME} = \mathrm{BM} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow \mathrm{ME} = 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AE} + \mathrm{ME} = \alpha\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Τέλος από την ισότητα $\mathrm{M\Gamma} = \mathrm{MA}$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha + \mathrm{B\Gamma} = \alpha\sqrt{3} + \alpha \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = \alpha\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x=\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y=\sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1=\sqrt[8]{3}<\sqrt[8]{4}=\sqrt[4]{2}=y.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \quad \text{και} \quad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right)\leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \Leftrightarrow |x-1|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-1\leq 3 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2\geq 0 \text{ και } |x|-5\leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2\leq 0 \text{ και } |x|-5\geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\leq |x\leq 5| \text{ ή } \left(|x|\leq 2 \text{ και } |x|\geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2\leq |x|\leq 5.$$

Όμως $|x|\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$ και $|x|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5\leq x\leq -2 \text{ ή } 2\leq x\leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x=-2 \text{ ή } 2\leq x\leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ($\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}>\text{ΒΓ}$). Ο κύκλος $c_1(\Gamma,\text{ΒΓ})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα ΒΓ) τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\text{Α},\text{Α}\Delta)$ (με κέντρο Α και ακτίνα $\text{Α}\Delta$) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο $c_1(\Gamma,\text{ΒΓ})$ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $\text{Α}\Delta\text{Ζ}$ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Μ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων:

$$\Gamma B = \Gamma\Delta = \Gamma Z \qquad (1) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_1(\Gamma, B\Gamma))$$

$$A\Delta = AE = AZ \qquad (2) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_2(A, A\Delta))$$

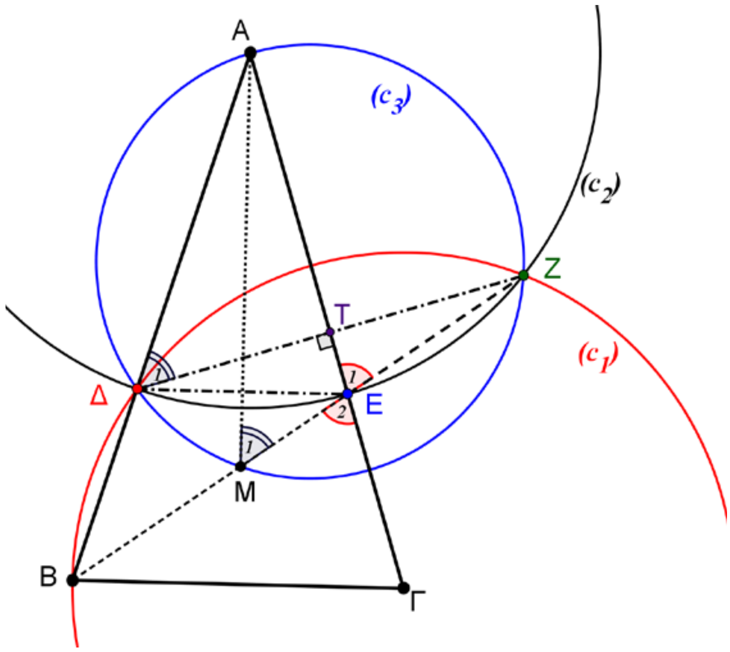
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$ και ομοίως από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε: $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE. Αυτά έχουν:

(α) η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή, (β) $B\Delta = \Gamma E$, (γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα, οπότε $BE = \Delta\Gamma \overset{(1)}{=} B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια

$$\hat{E}_2 = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$



Σχήμα 5

Εφόσον $A\Delta = AZ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma Z$, η $A\Gamma$ (διάκεντρος των δύο κύκλων) είναι μεσοκάθετη της ΔZ (κοινή χορδή των δύο κύκλων). Επομένως τα σημεία Δ και Ζ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ και ισχύει:

$$\hat{E}_1 = A\hat{E}Z = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\hat{E}_2 = B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = \hat{E}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}, \qquad (5)$$

οπότε, δεδομένου ότι τα σημεία Α, Ε, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΑΓ, έπεται ότι οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ ή είναι αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το Ε ή είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΓ. Το τελευταίο αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε τις ευθείες ΕΔ και ΕΒ να συμπίπτουν, ως συμμετρικές και οι δύο με την ΕΖ ως προς την ευθεία ΑΓ, άτοπο.

Επομένως οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ είναι αντικείμενες, δηλαδή τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε θεωρώντας το άθροισμα

$$\mathrm{B\hat{E}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{E}A} + \mathrm{A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{A}} + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 180^\circ,$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\hat{T}\Delta}$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M\hat{A}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a + b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a + b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s-10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s - 5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s - 5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a + b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

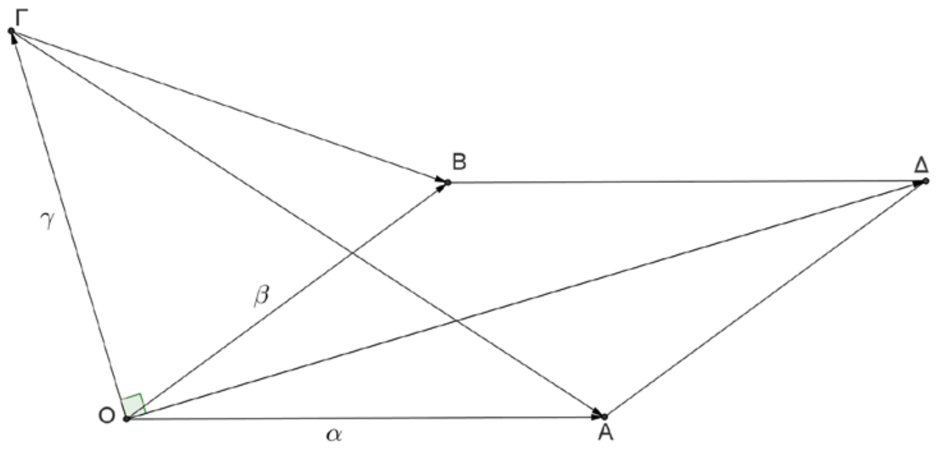
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta},\ \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση



Σχήμα 6

Από τις ισότητες $\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^{2}=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^{2}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^{2}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^{2}-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=0\Rightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{0}\ \text{ή}\ \vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}\,(\text{αδύνατο,αφού}\,O,A,B\,\text{μη συνευθειακά})\ \text{ή}\ \vec{\gamma}\perp\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{O\Delta}$$

$\Rightarrow\vec{\gamma}$ κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου ΟΑΔΒ.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a\Leftrightarrow x^3-2x^2=4ax^2-8ax-3ax+6a$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)=4ax\left(x-2\right)-3a\left(x-2\right)\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2-4ax+3a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\ \text{ή}\ x^2-4ax+3a=0\Leftrightarrow x=2\quad\text{ή}\quad x^2-4ax+3a=0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x=2$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2-4ax+3a=0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16a^2-12a=4a\left(4a-3\right)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $4a\left(4a-3\right)\geq0\Leftrightarrow a\leq0$ ή $a\geq\frac{3}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u,v\in\mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u+v=4a\ \text{ και }\ uv=3a\Rightarrow3\left(u+v\right)=4uv\Rightarrow3u+3v-4uv=0\Rightarrow u\left(3-4v\right)=-3v,$$

οπότε αφού $4u-3\neq0$ λαμβάνουμε:

$$u=\frac{3v}{4v-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{12v}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{12v-9+9}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{9}{4v-3}\right)\Rightarrow4u-3=\frac{9}{4v-3}\in\mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει $4v-3\in\left\{9,-9,\,3,-3,\,1,\,-1\right\}$, οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v = 3 \text{ ή } v = 0 \text{ ή } v = 1.$$

- Για $v = 3$ ή $v = 1$ προκύπτει $u = 1$ ή $u = 3$ και $a = 1$.
- Για $v = 0$ προκύπτει $u = 0$ και $a = 0$.

Επομένως για $a = 0$ ή $a = 1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6a^2, \\ x + y &= 3a, \\ y + z &\geq 3a, \end{aligned}$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

Θέτουμε $s = y + z$, οπότε θα είναι $z = s - y$. Επίσης έχουμε $x = 3a - y$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε

$$(3a - y)^2 + y^2 + (s - y)^2 = 6a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2(3a + s)y + s^2 + 3a^2 = 0 \qquad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως προς y λύση στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν,

$$\Delta = 4\left[(3a + s)^2 - 3(s^2 + 3a^2)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -2s^2 + 6as \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 3a.$$

Όμως από την ανίσωση του συστήματος έχουμε: $s \geq 3a$, οπότε λαμβάνουμε ότι: $s = 3a$. Τότε προκύπτει $\Delta = 0$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $y = \frac{3a + s}{3} = 2a$, οπότε θα είναι $x = 3a - y = a$ και $z = 3a - y = a$. Επομένως, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$(x, y, z) = (a, 2a, a).$$

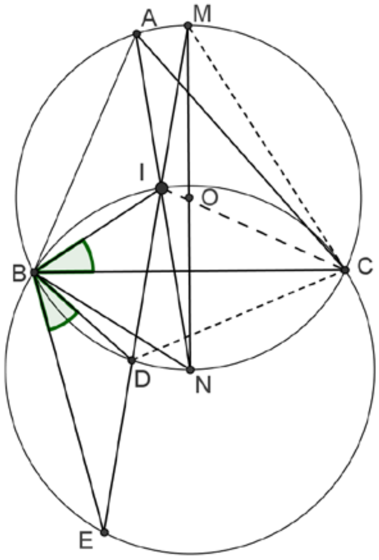
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{D} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}$.

Λύση

Ο κύκλος $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ περνάει από τα σημεία B και C. Πράγματι, η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AIB, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Επίσης $\mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C} + \mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}$, οπότε $\mathrm{NB} = \mathrm{NI}$.

Επιπλέον, επειδή η κάθετος από το κέντρο O του κύκλου προς την πλευρά BC περνάει από τα μέσα των αντίστοιχων τόξων, έπεται ότι η NM είναι διάμετρος του κύκλου (O, R), οπότε $\mathrm{N}\hat{\mathrm{D}}\mathrm{M} = 90^\circ$. Επομένως στον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ το σημείο D είναι μέσο της χορδής IE.



Σχήμα 7

Από το τρίγωνο BED έχουμε $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{B\hat{D}M} - \mathrm{B\hat{E}I}$. Όμως $\mathrm{B\hat{D}M} = 90^\circ - \mathrm{B\hat{A}N} = 90^\circ - \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$ και $\mathrm{B\hat{E}I} = \dfrac{\hat{\mathrm{C}}}{2}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$). Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E\hat{B}D} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{I\hat{B}C}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 20ax - 6ax + 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) = 5ax(x-4) - 6a(x-4) \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 5ax + 6a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5ax + 6a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 4$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 5ax + 6a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 25a^2 - 24a = a(25a - 24)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $a(25a-24) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \dfrac{24}{25}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 5a \text{ και } uv = 6a \Rightarrow 6(u+v) = 5uv \Rightarrow 6u + 6v - 5uv = 0 \Rightarrow u(6 - 5v) = -6v,$$

οπότε αφού $6 - 5v \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{6v}{5v-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{30v}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{30v - 36 + 36}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{36}{5v-6}\right) \Rightarrow 5u - 6 = \frac{36}{5v-6} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει

$$5\nu-6\in\{36,-36,18,-18,12,-12,9,-9,6,-6,4,-4,3,-3,2,-2,1,-1\},$$

οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$\nu=-6 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=2.$$

- Για $\nu=-6$ ή $\nu=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=-6$, αντίστοιχα, και $a=-1$.
- Για $\nu=3$ ή $\nu=2$ προκύπτει $u=2$ ή $u=3$, αντίστοιχα, και $a=1$
- Για $\nu=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=\pm1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2\le 8\right\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y$, όταν $(x,y)\in D$, και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $(x-1)^2+(y-2)^2=8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Λύση

(α) Έστω $S=x+y$. Τότε η ανίσωση που ορίζει το χωρίο D γράφεται:

$$(x-1)^2+(S-x-2)^2\le 8\Leftrightarrow.$$

$$2x^2+2(1-S)x+S^2-4S-3\le 0. \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=4\left[(1-S)^2-2\left(S^2-4S-3\right)\right]=4\left(1-2S+S^2-2S^2+8S+6\right)$$

$$=-4\left(S^2-6S-7\right)=-4(S+1)(S-7).$$

Επομένως η ανίσωση (1) αληθεύει για τιμές του x μεταξύ των ριζών του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (1), όταν: $\Delta\ge0\Leftrightarrow -1\le S\le 7$, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S είναι η $S_{\max}=7$. Για $S=7$ η ανίσωση (1) γράφεται $x^2-6x+9\le0\Leftrightarrow(x-3)^2\le0$ και αληθεύει μόνο για $x=3$, οπότε $y=S_{\max}-x=7-3=4$.

(β) Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $\varepsilon: x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $C:(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C για εκείνα τα k, για τα οποία το σύστημα

$$(x-1)^2+(y-2)^2=8,\ x+y=k,$$

έχει διπλή λύση, δηλαδή όταν η ευθεία ε έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο C.

Ισοδύναμα, αυτό ισχύει όταν η εξίσωση

$$2x^2+2(1-k)x+k^2-4k-3=0. \qquad (2)$$

έχει μοναδική λύση ως προς x, δηλαδή όταν έχει διακρίνουσα $\Delta=-4\left(k^2-6k-7\right)=0\Leftrightarrow$ $k=-1$ ή $k=7$, οπότε η ελάχιστη τιμή του k είναι $k_{\min}=-1$. Το αντίστοιχο σημείο επαφής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης (2) για $k=-1$. Επειδή είναι $\Delta=0$ η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=\dfrac{k-1}{2}=-1$, οπότε $y=0$. Επομένως το ζητούμενο σημείο επαφής είναι το $(x,y)=(-1,\,0)$.

Πρόβλημα 3

Έστω $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο, ώστε $f(a)\geq k+2$.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$, ισχύει ότι $f(a)<k+2$. Τότε $f(a)\leq k+1$ για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$. Αφού επιπλέον η f είναι 1-1, έπεται ότι οι αριθμοί

$$f(1)-1,\ f(2)-1,\ \ldots,\ f(k+1)-1,$$

είναι (με κάποια διαφορετική ενδεχομένως σειρά) οι αριθμοί $1-1, 2-1,\ldots,k+1-1$.

Επομένως

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]=3\left[1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2\right]$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}=\frac{2k^3+3k^2+k}{2}=k^3+\frac{3}{2}k^2+k.$$

Όμως $k^3<k^3+\frac{3}{2}k^2+k<(k+1)^3$, οπότε ο παραπάνω αριθμός δεν μπορεί να είναι κύβος φυσικού αριθμού, (άτοπο). Επομένως υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο ώστε $f(a)\geq k+2$.

Πρόβλημα 4

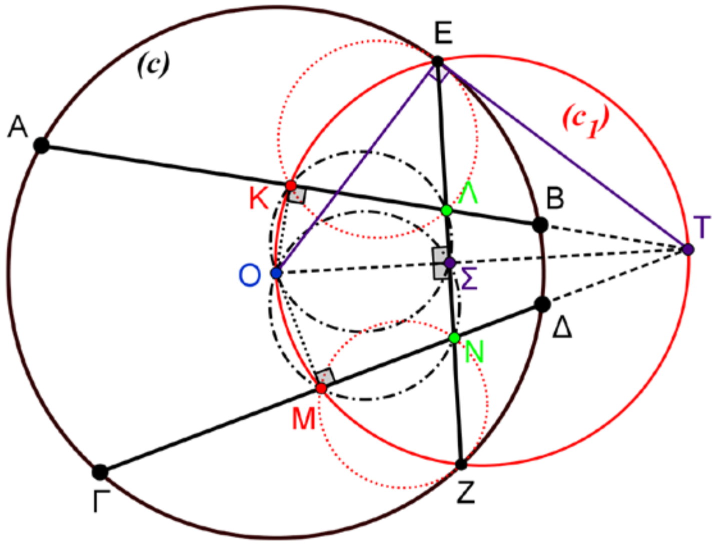
Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O},R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K,M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στα σημεία E,Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ,N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K},\Lambda,\mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Οι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$.

Λύση

(i) Επειδή K,M είναι μέσα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, θα ισχύουν οι καθετότητες: $\mathrm{OK}\perp\mathrm{AB}$ και $\mathrm{OM}\perp\Gamma\Delta$.



Σχήμα 8

Έστω Τ το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής ΑΒ και του κύκλου c_1. Τότε το σημείο Τ είναι το αντιδιαμετρικό του Ο στο κύκλο c_1 (διότι $\hat{\mathrm{K}} = 90^o$) . Το σημείο Τ είναι επίσης το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής ΓΔ και του κύκλου c_1.

Άρα η ΟΤ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΕΖ.

Επειδή $\hat{\mathrm{K}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο ΟΣΛΚ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (1).$$

Επειδή $\hat{\mathrm{N}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο ΟΣΝΜ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM}$, οπότε το τετράπλευρο ΚΛΝΜ είναι εγγράψιμο.

(ii) Το τρίγωνο ΟΕΤ είναι ορθογώνιο στο Ε (διότι η ΟΤ είναι διάμετρος του κύκλου c_1), οπότε η ΤΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO}. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (3) (σε συνδυασμό με την ισότητα (1)), έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK}. \qquad (4)$$

Άρα η ΕΤ εφάπτεται στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΚΛΕ. Επομένως οι κύκλοι $c(\mathrm{O}, R)$ και $(\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{E})$ έχουν στο σημείο τους Ε κοινή εφαπτομένη, οπότε εφάπτονται στο σημείο Ε.