ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \text{ και } \mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Λύση
Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(27+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(28+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{112}{31}$$

$$\mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81}-\frac{79}{81}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\frac{1}{81}+\frac{67}{41}=\frac{81}{41}+\frac{67}{41}=\frac{148}{41}$$

Επειδή $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{112}{31}-\frac{148}{41}=\frac{112\cdot 41-148\cdot 31}{31\cdot 41}=\frac{4592-4588}{1271}=\frac{4}{1271}>0$, έπεται ότι $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.
Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100}=36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+36=756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756:12=63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100}=100{,}8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+100{,}8=820{,}8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820{,}8:24=34{,}2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

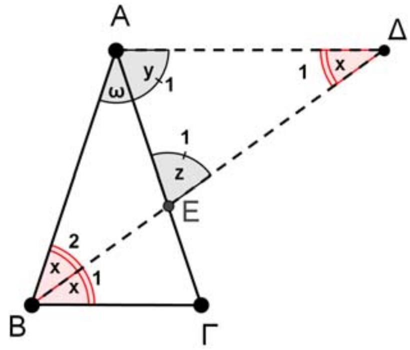
(β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$.

Οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$. Επομένως η ΒΔ διχοτομεί την γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των ΑΔ και ΒΓ (με τέμνουσα την ΑΓ), έχουμε:

$$\hat{y} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \quad (\mathrm{A}) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \quad (\mathrm{B}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (A) και (B) λαμβάνουμε: $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (A) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{B} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60+45)-15=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24\cdot\dfrac{100}{10}=240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240\cdot\dfrac{60}{100}=144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240\cdot\dfrac{45}{100}=108$.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x=3^{-2}$, $y=3^{-3}$ έχουμε $\dfrac{x^3}{y^2}=\dfrac{\left(3^{-2}\right)^3}{\left(3^{-3}\right)^2}=\dfrac{3^{-6}}{3^{-6}}=1$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3^{-2}}{3^{-3}}=\dfrac{3^3}{3^2}=3$ και

$$\frac{81x^2+27y}{y}=\frac{81\cdot\left(3^{-2}\right)^2+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot 3^{-4}+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot\frac{1}{81}+27\cdot\frac{1}{27}}{3^{-3}}=2\cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^3+2\cdot 3^3=\frac{4}{3}\cdot 27+2\cdot 27=36+54=90.$$

(β) Ο αριθμός Β γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot 5^{89}=2^{92}\cdot 5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot 5^{89}\right)=2^3\cdot(2\cdot 5)^{89}=2^3\cdot 10^{89}=8\cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός Β έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65+45)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36\cdot\frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360\cdot\frac{60}{100}=216$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360\cdot\frac{45}{100}=162$.

Πρόβλημα 3

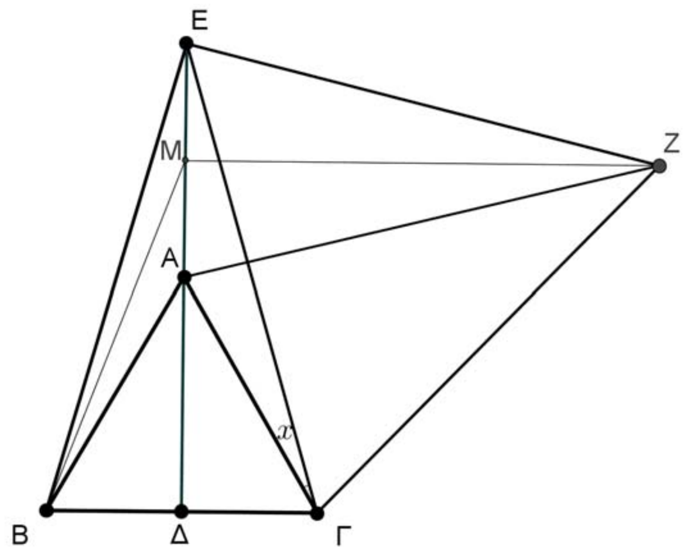
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $ΑΕ=ΑΔ$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $ΑΖ=ΕΓ$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ έχουν:

1. $ΒΓ=ΑΓ$ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο).

2. $ΕΓ=ΖΓ$ (διότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο).

3. $Ε\hat{Γ}Β=Ζ\hat{Γ}Α=60^o+\hat{x}$, όπου $\hat{x}=Α\hat{Γ}Ε$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $ΑΖ=ΕΓ$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α, οπότε το ύψος του ΑΔ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $ΑΕ=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $ΕΔ=\alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(ΑΓΖΕ)=(ΑΓΖ)+(ΖΑΕ)=(ΕΒΓ)+(ΖΑΕ)$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΓΖ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο ΕΒΓ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $ΒΓ=\alpha$ με αντίστοιχο ύψος $ΕΔ=2\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{EB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{ZE}$) και το M είναι μέσο του τμήματος AE έπεται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\mathrm{ZM}=\sqrt{\mathrm{ZA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Delta}^2+\mathrm{\Delta\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{3\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{16}}=\frac{7\alpha}{4}.$$

Άρα έχουμε $\left(\mathrm{ZAE}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7\alpha}{4}=\frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$\left(\mathrm{A\Gamma ZE}\right)=\left(\mathrm{EB\Gamma}\right)+\left(\mathrm{ZAE}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+\frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}=\frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο $\mathrm{B\Gamma ZM}$ είναι τραπέζιο ($\mathrm{ZM}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία $\mathrm{\Delta E}$. Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $\mathrm{B\Gamma}=\alpha,\ \mathrm{ZM}=\frac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα $\mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta A}+\mathrm{\Delta M}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{B\Gamma ZM}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{ZM}\right)\cdot\mathrm{\Delta M}=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\frac{7\alpha}{4}\right)\cdot\frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)\ \text{και}\ Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1)=21$ έχουμε ότι $P(1)=(a+b+c)(a+b)=21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a,b,c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c>a+b$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{matrix}a+b+c=7\\ a+b=3\end{matrix}\right\}\ (1)\qquad ή\qquad \left\{\begin{matrix}a+b+c=21\\ a+b=1\end{matrix}\right\}.\ (2)$$

Επειδή οι a,b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)=a^2x^3+2abx^2+\left(b^2+ac\right)x+bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow\left\{a^2=a^2,\ 2ab=4,\ b^2+ac=d,\ bc=e\right\}.$$

Επειδή $c=4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3,\ ab=2,\ c=4,\ b^2+4a=d,\ 4b=e,\ a,b,c,d,e \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$
$$\Leftrightarrow a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=8\ e=8 \quad \text{ή} \quad a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=9\ e=4.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow (x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\le|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\le|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή}\ x^2+4=0\ \text{ή}\ x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\ne\pm x$ και $2x+4y+5\ne0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\ne\pm x$ και $2x+4y+5\ne0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } y-2=0 \text{ (διαφορετικά θα είχαμε} (x-1)^2+(y-2)^2>0)$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B}, \mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

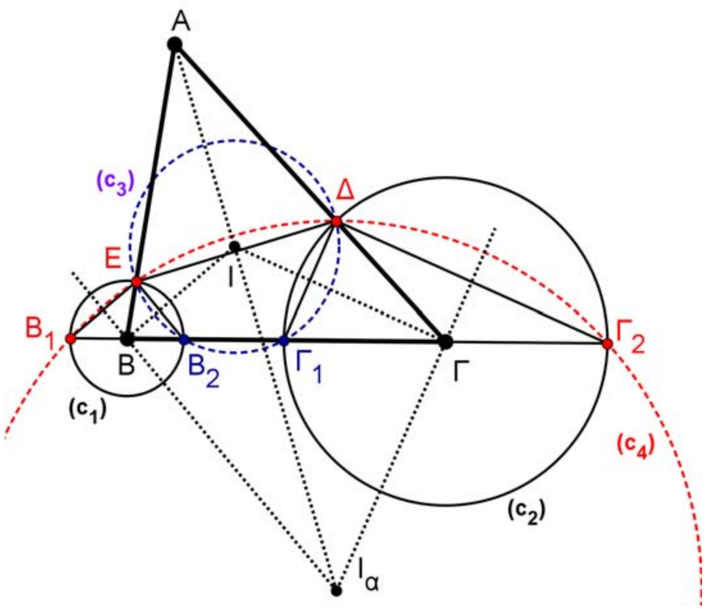
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές ΒΕ και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B_2E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB_2} = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, $\mathrm{B_2}$, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B_1}, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2,\ \text{(αδύνατη, αφού } 3-2\sqrt{2} > 0\text{)}.$$

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2.$

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει ή ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2|=5 .$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \ (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2 .$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in\{-2,-1\}$, $y \in\{-2,-1,0,1,2, \ldots .\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in\{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)<4 y(y-1)\left(x y-2 x+2 y-y^{2}\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2 y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& x^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)<4 y(y-1)\left(x y-2 x+2 y-y^{2}\right) \\
& \Rightarrow x^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)-4 y(y-1)\left(x y-2 x+2 y-y^{2}\right)<0 \\
& \Rightarrow x^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)-4 y(y-1)(y-2) x-4 y(y-1)\left(2 y-y^{2}\right)<0 \\
& \Rightarrow x^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)-4 y\left(y^{2}-3 y+2\right) x+4 y^{2}\left(y^{2}-3 y+2\right)<0 \\
& \Rightarrow\left(y^{2}-3 y+2\right)\left(x^{2}-4 x y+4 y^{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow\left(y^{2}-3 y+2\right)(x-2 y)^{2}<0 \\
& \Rightarrow y^{2}-3 y+2<0, \text{ αφού ισχύει} (x-2 y)^{2} \geq 0, \\
& \Rightarrow(y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.
\end{aligned}$$

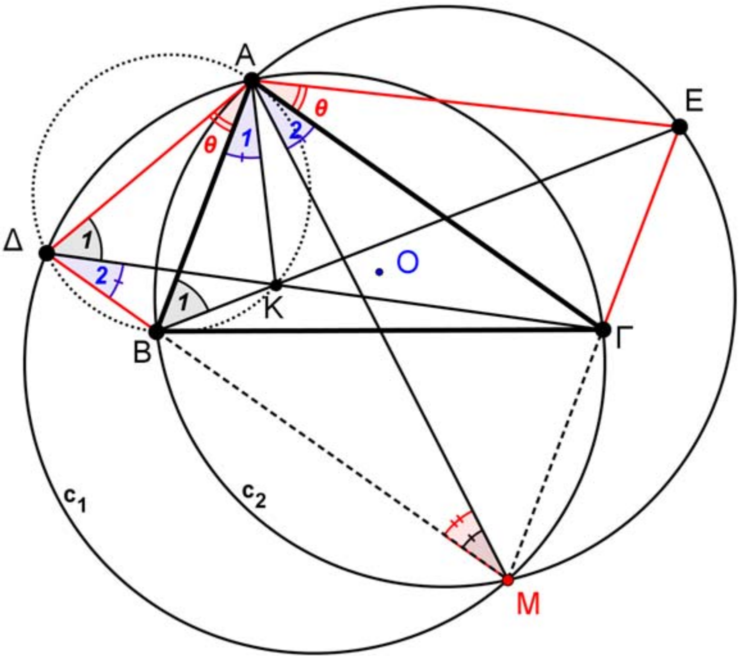
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{2 y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow-1<2 y-3<1 \Rightarrow|2 y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως : (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}.$$

Λύση

Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.

Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:

$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2 - 4x^2} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$

Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2 - 4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:

$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13 + 13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6, 7\}.$$

- Για $n = 6$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$
- Για $n = 7$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Λύση

Επειδή είναι $2x^2 + 1 > 0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι

$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y-x)(y^2 + xy + x^2) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x,$$

αφού $y^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x = y = 0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).

Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y > x$, έπεται ότι

$$y \geq x + 1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad (1)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε

$$x^3 + 2x^2 + 1 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0\}. \qquad (2)$$

- Για $x = -3$, λαμβάνουμε $y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$.
- Για $x = -2$, λαμβάνουμε $y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (απορρίπτεται, αφού $xy = z^2 + 2 > 0$).
- Για $x = -1$, λαμβάνουμε $y^3 = 2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x = 0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy = z^2 + 2 > 0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x = -3, y = -2$, οπότε προκύπτει $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x, y, z) = (-3, -2, 2) \text{ ή } (x, y, z) = (-3, -2, -2).$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right)-y^2=f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη σχέση για ειδικές τιμές των μεταβλητών.

Για $x=y=0$ λαμβάνουμε $f\left(0\right)=f\left(0\right)^2 \Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ ή $f\left(0\right)=1$.

Για $x=y=2$ λαμβάνουμε $f\left(4\right)-4=f\left(4\right)f\left(0\right)$, οπότε, αν $f\left(0\right)=1$, τότε $-4=0$ (άτοπο), ενώ, αν $f\left(0\right)=0$, τότε $f\left(4\right)=4$. Άρα έχουμε $f\left(0\right)=0$ και $f\left(4\right)=4$.

Για $x=y=t\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(t^2\right)-t^2=f\left(2t\right)f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(t^2\right)=t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\geq 0$, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $t^2=x$, έπεται ότι $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$, $y>0$, λαμβάνουμε $f\left(0\right)-y^2=f\left(y\right)f\left(-y\right)\Rightarrow yf\left(-y\right)=-y^2\Rightarrow f\left(-y\right)=-y$, για κάθε $y>0$, δηλαδή $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x<0$.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},a>1,$ ορίζεται για $x\in\left[-a,a\right]$ και παίρνει τιμές θετικές. Αν υποθέσουμε ότι $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z},$ τότε θα έχουμε

$$f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-x^2}=\frac{n^2}{2}-a \qquad (1)$$

Επειδή $0\leq\sqrt{a^2-x^2}\leq a$, έχουμε $0\leq\frac{n^2}{2}-a\leq a\Leftrightarrow 2a\leq n^2\leq 4a\Leftrightarrow\sqrt{2a}\leq n\leq 2\sqrt{a}$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a},2\sqrt{a}\right]$ η εξίσωση (1) έχει λύση ως προς x. Πράγματι, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$a^2-x^2=\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=a^2-\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2}{2}\left(2a-\frac{n^2}{2}\right),\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2\left(4a-n^2\right)}{4},\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}.$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο διάστημα $[-a,\ a]$, οπότε είναι αποδεκτές, λόγω της σχέσης $x^2 = a^2 - \left(\frac{n^2}{2} - a\right)^2 \leq a^2$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$, για $x = \pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}$.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δυνατές ακέραιες τιμές για το $n=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$, εφόσον επιτύχουμε να κάνουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, δίνοντας κατάλληλη τιμή στην παράμετρο a. Για παράδειγμα, για να περιέχει το διάστημα $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ Κ ή περισσότερους ακέραιους, αρκεί να ισχύει ότι

$$\left|2\sqrt{a}-\sqrt{2a}\right| \geq K \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{a} \geq K \Leftrightarrow a \geq \left(\frac{K}{2-\sqrt{2}}\right)^2.$$

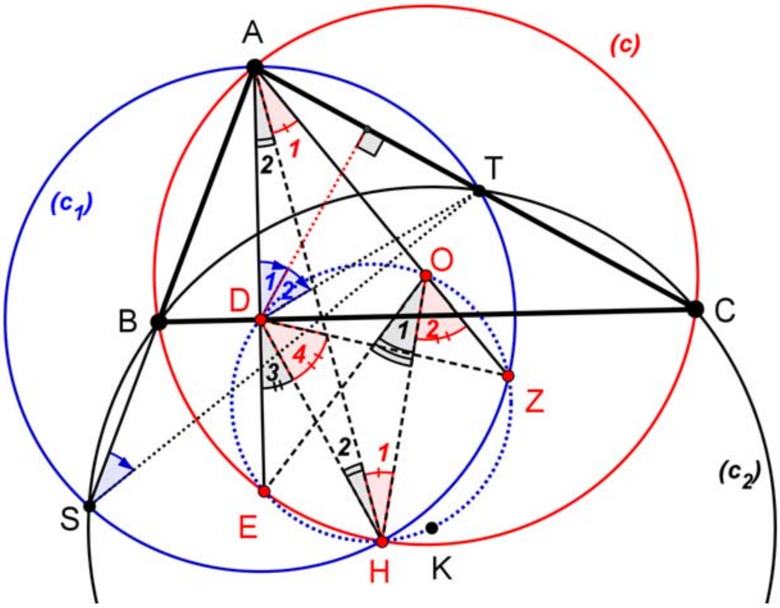
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O,D,E,Z,H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

(α) Η γωνία $A\hat{S}T = \hat{S}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο AT. Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{S}$, οπότε $A\hat{D}T = 2\hat{S}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}T$ είναι κάθετος στην πλευρά AC, οπότε

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C} = 90^o - D\hat{A}C .$$

Άρα $\hat{S} = \hat{C}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο.

(β) Η γωνία $E\hat{D}H = \hat{D}_3$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου DAH ($DA = DH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε

$$\hat{D}_3 = 2\hat{A}_2 . \qquad (1)$$

Η γωνία $Z\hat{A}H = \hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c και η γωνία $E\hat{O}H = \hat{O}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_2 . \qquad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{D}_3$, οπότε τα σημεία O,D,E,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η γωνία $H\hat{O}Z = \hat{O}_2$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAH ($OA = OH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A}_1 . \qquad (3)$$

Η γωνία $E\hat{A}H = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c_1 και η γωνία $H\hat{D}Z = \hat{O}_4$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{D}_4 = 2\hat{A}_1 . \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_2 = \hat{D}_4$, οπότε τα σημεία O,D,Z,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η μεσοκάθετη του τμήματος ST περνάει από το κέντρο D του κύκλου c_1. Η μεσοκάθετη του τμήματος BC περνάει από το κέντρο O του κύκλου c. Το σημείο τομής K των δύο μεσοκαθέτων, είναι το κέντρο του κύκλου c_2.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στο κύκλο που ορίζουν τα σημεία O,D,Z,E,H, δηλαδή ότι: $D\hat{K}O = D\hat{H}O$.

Πράγματι, η γωνία $D\hat{K}O$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι ST και BC (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες), δηλαδή είναι:

$$D\hat{K}O = 180^o - \hat{S} - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} - \hat{C} ,$$

ενώ ακόμη ισχύει ότι:

$$D\hat{H}O = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = E\hat{A}O = 90^o - \frac{A\hat{O}E}{2} = 90^o - A\hat{C}E = 90^o - (\hat{C} + 90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

.