ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$71^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση
(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20\cdot\frac{30}{100}=6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60)\cdot\frac{60}{100}=80\cdot\frac{60}{100}=48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48-6=42$ αυτοκίνητα.

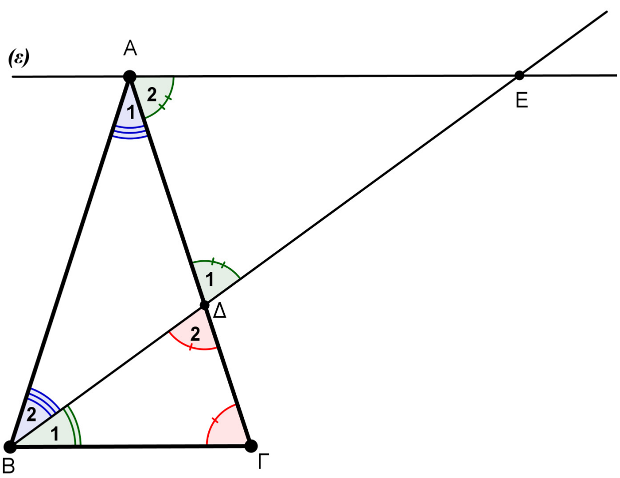
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000\cdot\frac{5}{100}=500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000\cdot\frac{10}{100}=1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6\cdot 500+42\cdot 1200=3000+50400=53400 \text{ ευρώ}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{A}=36^o$, θα έχουμε: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=72^o$.

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{72^o}{2}=36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9\cdot(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση
(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1\Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8\Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$
$$\Leftrightarrow 7x+29=8\Leftrightarrow 7x=8-29\Leftrightarrow 7x=-21\Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$
$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$
$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2
Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\leq 10,\ \beta\geq 12\ \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση
Είναι $\alpha\leq 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\geq 0\Leftrightarrow 40\geq 2\beta\Leftrightarrow \beta\leq 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\leq\alpha\leq 10\ \text{ και } 12\leq\beta\leq 20\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30\ \text{ και } 24\leq 2\beta\leq 40$$
$$\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30\ \text{ και } -40\leq -2\beta\leq -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\leq\mathrm{A}=3\alpha-2\beta\leq 6,$$

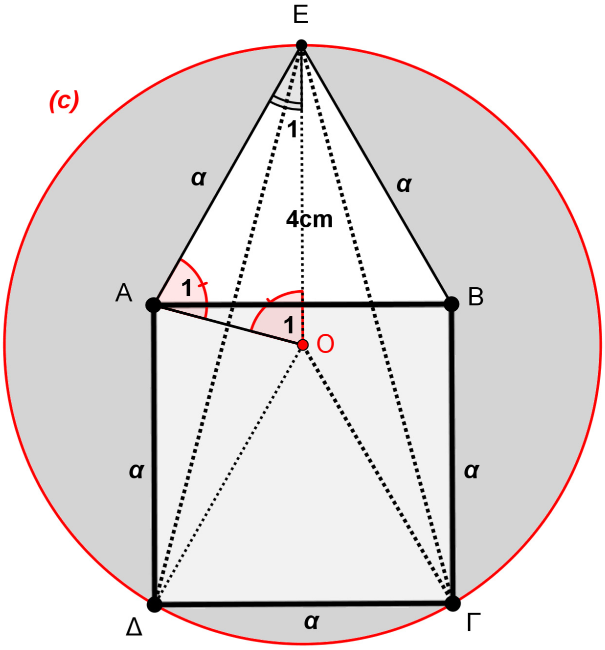
οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $ΑΕ = ΒΕ = \alpha$, $ΑΔ = ΒΓ = \alpha$ και $Ε\hat{Α}Δ = Ε\hat{Β}Γ = 90^o + 60^o = 150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα και κατά συνέπεια $ΕΔ = ΕΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $ΕΔ = ΕΓ$, το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΔΓ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Άρα η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Ε}Β$ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ. Άρα είναι $\hat{Ε}_1 = 30^o$.

$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = ΑΔ = \alpha \\ ΟΕ = ΟΔ = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } ΕΔ \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της } Δ\hat{Α}Ε \Rightarrow \hat{Α}_1 = 75^o.$$

Στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε: $\hat{Α}_1 = 75^o$ και $\hat{Ε}_1 = 30^o$. Άρα $\hat{Ο}_1 = 75^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $Ε_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $Ε_{τετ} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι: $Ε_{τρ} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $Ε = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $Α - Β = 198$, όπου $Β = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\dfrac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2. \quad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4, \quad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta=0$, ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}=\alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho=\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho-\alpha=\left(\alpha+\beta\sqrt{10}\right)-\alpha=\beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\frac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta=0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5+\frac{2}{4}+\sqrt{10}=\frac{11}{2}+\sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2=x^2+4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow x^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow |x|=1-\alpha .$$

Επειδή είναι $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha<1$, οπότε είναι $1-\alpha>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
$$x=1-\alpha \text{ ή } x=\alpha-1.$$
- $\alpha=1,$ οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x=0$.
- $\alpha>1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

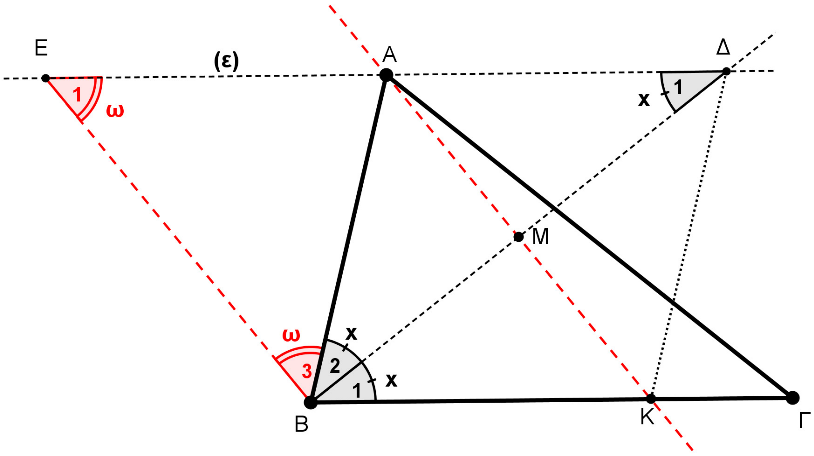
Λύση

Επειδή είναι $A\Delta P B\Gamma$ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Επίσης η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$AB = A\Delta . \tag{1}$$



Σχήμα 3

Επειδή E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το A, θα ισχύει:

$$A\Delta = AE \ . \tag{2}$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε $AE = AB$ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $BE\Delta$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o ,$$

δηλαδή το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ορθογώνιο ($BE \perp B\Delta$) και εφόσον $AM P BE$ καταλήγουμε:

$$AM \perp B\Delta .$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ η AM είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $B\Delta$.

Επειδή τώρα το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετη του $B\Delta$, το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $AB = A\Delta = BK = K\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2 .$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 2010^2 &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2010^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2\right) \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3} .\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1 = 2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha \geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= (yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ 19-yz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ (yz)^2+3(yz)-18=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \text{ ή } yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+16=0 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x=4 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R}) \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ y+z=4 \\ yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y(4-y)=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow (x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \tag{1}$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \tag{2}$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \tag{3}$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \tag{5}$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \qquad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \qquad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} \le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (M είναι το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο $\mathrm{N_1}$ (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο $\mathrm{K_1}$ (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K}<\mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN_1}, \mathrm{\Gamma K_1}$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές $\mathrm{AN_1}, \mathrm{AK_1}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία T, Σ και M αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες $\mathrm{OT}, \mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές $\mathrm{AN_1}, \mathrm{AK_1}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες $\mathrm{OT}, \mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές $\mathrm{AN_1}, \mathrm{AK_1}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c). Τα αποστήματα $\mathrm{OT}, \mathrm{O\Sigma}$ και OM είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $\mathrm{AN_1}=\mathrm{AK_1}=\mathrm{B\Gamma}$ (*) και τα σημεία $\mathrm{T}, \Sigma, \mathrm{M}$ είναι τα μέσα των χορδών $\mathrm{AN_1}, \mathrm{AK_1}$ και $\mathrm{B\Gamma}$, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{TA}=\mathrm{TN_1}=\mathrm{\Sigma A}=\mathrm{\Sigma K_1} \qquad (1)$$

Το σημείο N βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και NM, NT είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

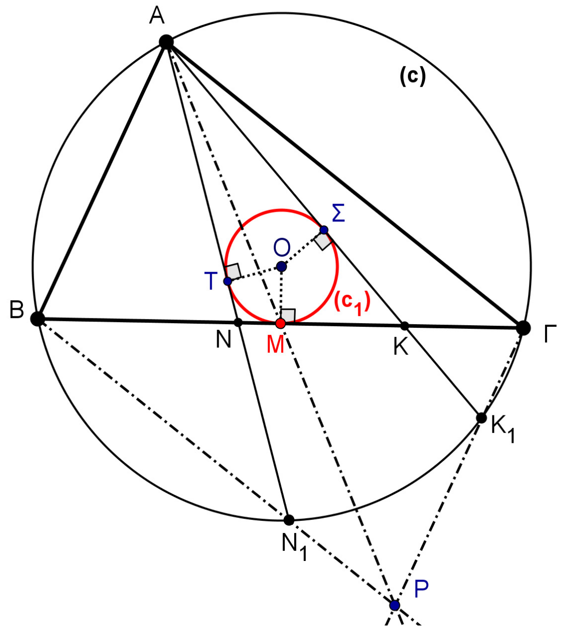
$$\mathrm{NM}=\mathrm{NT} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & \mathrm{MB}=\mathrm{TN}_1 \\ (2): & \mathrm{NM}=\mathrm{NT}\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{TN}_1}{\mathrm{NT}} \Rightarrow \mathrm{TM} \parallel \mathrm{BN}_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & \mathrm{M\Gamma}=\mathrm{TA} \\ (2): & \mathrm{NM}=\mathrm{NT}\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{M\Gamma}}{\mathrm{NM}}=\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{NT}} \Rightarrow \mathrm{TM}//\mathrm{A\Gamma} \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $\mathrm{BN}_1 \parallel \mathrm{A\Gamma}$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{\Gamma K}_1 \parallel \mathrm{AB}$. Αν λοιπόν Ρ είναι η τομή των ευθειών BN_1 και $\mathrm{\Gamma K}_1$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΡΓ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $\mathrm{BN}_1, \mathrm{\Gamma K}_1$ και ΑΜ θα συντρέχουν στο Ρ.

(*) "Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα."
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2+4\beta^2\geq 4\alpha\beta,\ \beta^2+4\gamma^2\geq 4\beta\gamma,\ \gamma^2+4\alpha^2\geq 4\gamma\alpha, \qquad (1)$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{4\alpha\beta}\geq\frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha=2\beta)\Rightarrow\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}\geq\gamma \qquad (2)$$

$$\frac{\beta^2+4\gamma^2}{4\beta\gamma}\geq\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta=2\gamma)\Rightarrow\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}\geq\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{\gamma^2+4\alpha^2}{4\gamma\alpha}\geq\frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma=2\alpha)\Rightarrow\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\beta \qquad (4)$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma=12. \qquad (5)$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha=2\beta,\ \ \beta=2\gamma,\ \ \gamma=2\alpha,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x^2+2xy=5 \\ y^2-3xy=-2 \end{cases}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x,y) του συστήματος (Σ), με $x=0$ ή $y=0$, τότε λαμβάνουμε 0 = 5 ή 0 = -2, άτοπο.

Για $xy\neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2+2xy}{y^2-3xy}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1+2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\cdot\frac{y}{x}}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\frac{1+2m}{m^2-3m}=-\frac{5}{2}\\ \frac{y}{x}=m\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}5m^2-11m+2=0\\ \frac{y}{x}=m\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}m=2 \text{ ή } m=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x}=m\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}m=2\\ y=2x\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}m=\frac{1}{5}\\ y=\frac{x}{5}\end{Bmatrix}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x^2+2xy=5\\ y=2x\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}x^2+2xy=5\\ y=\frac{x}{5}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}5x^2=5\\ y=2x\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}\frac{7x^2}{5}=5\\ y=\frac{x}{5}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=\pm 1\\ y=2x\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{7}\\ y=\frac{x}{5}\end{Bmatrix}$$

$$(x,y)=(1,2) \text{ ή } (x,y)=(-1,-2) \text{ ή } (x,y)=\left(\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων (c_1),(c_2) και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1=R_2=R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΟΒ έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΟΝΒ έχουμε: $\hat{A}_2=\hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, έχουμε: $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $N\hat{A}\Gamma=K\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΝΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε $NA=N\Gamma$ και $KB=K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB=O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. ΟΚ (κοινή)

3. $KB=K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3).

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (1ος τρόπος)

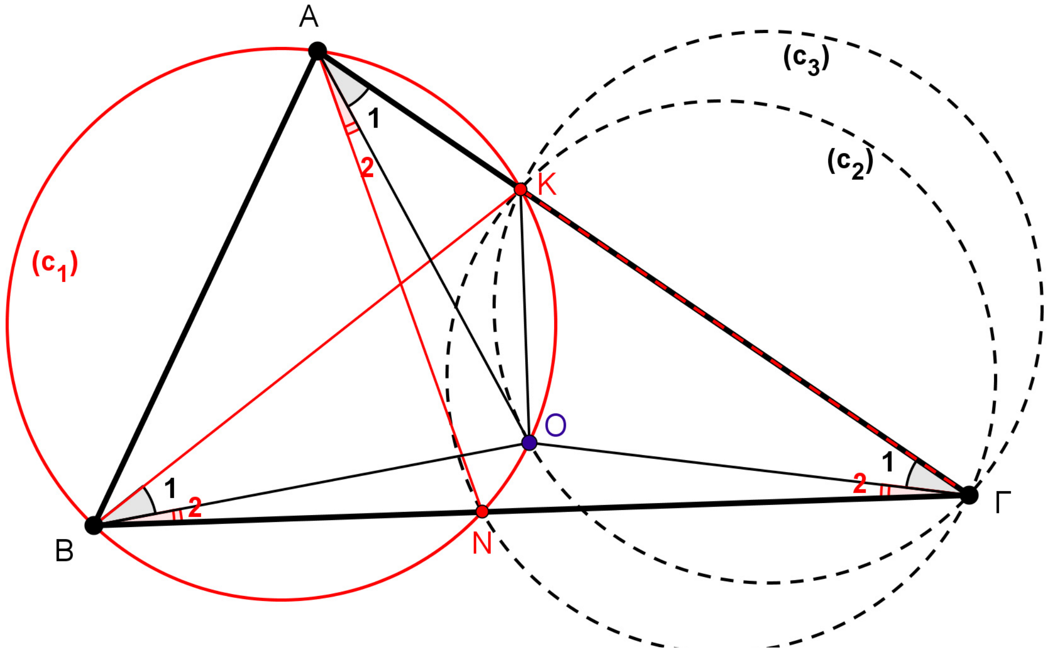
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E=(\text{ΑΒΓ})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1=(\text{ΚΝΒ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΒ και $E_2=(\text{ΚΝΓ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΓ. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E_1&=(\text{ΚΝΒ})=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1}\\ E_2&=(\text{ΚΝΓ})=\frac{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}{4R_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{4R_2\cdot\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1\cdot\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{R_2\cdot\text{ΝΒ}}{R_1\cdot\text{ΝΓ}},\qquad(1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\text{ΚΒ}=\text{ΚΓ}$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουν τις γωνίες τους $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Β}$ και $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Γ}$ παραπληρωματικές. Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}}{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{\text{ΝΒ}}{\text{ΝΓ}}\ .\qquad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1=R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων *(c_1)* και *(c_2)* ($2^{\text{ος}}$ τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\text{ημΑ}}=\frac{\beta}{\text{ημΒ}}=\frac{\gamma}{\text{ημΓ}}=2R\,.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουμε:

$$\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν})}=2R_1\ \text{και}\ \frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\hat{\Gamma})}=2R_2\,.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν}=\hat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1=R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in ¥^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n},\ n \in \text{¥}^{*},\ \ a_1 = 1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $k,\ n$ τέτοιοι ώστε : $a_n = \dfrac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2 = a_1 - \frac{k}{2},\ a_3 = a_2 - \frac{k}{2^2},\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} - \frac{k}{2^{n-1}},\ \ n = 1,2,3,\ldots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n = a_1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - k\left(-1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 + k - 2k\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}},\ n = 1,2,3,\ldots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k)\cdot 2^{n-1+1000} + k\cdot 2^{1000} = 2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n \in \text{¥}^{*},\ n > 1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000} - 2^{n-1} = k\left(2^{n-1+1000} - 2^{1000}\right).$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} > 0,\ k \in \text{Ά}. \qquad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n-1 > 1000 \Leftrightarrow n > 1001$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k \in (0,1)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n-1 < 1000 \Leftrightarrow n < 1001$, τότε έχουμε:

$$k - 1 = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} - 1 = \frac{2^{1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} = \frac{1 - 2^{n-1001}}{2^{n-1} - 1},$$

  οπότε θα είναι $0 < k-1 < 1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n-1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k = 1$.