ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα,** αφού πρώτα στα παραρτήματα , εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
8. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **24 Φεβρουαρίου 2007** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **24^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρόδος, 26 Απριλίου – 2 Μαΐου 2007**), στην **11^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Βουλγαρία, Ιούνιος 2007)** και στην **48η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Βιετνάμ, Ιούλιος 2007).**
9. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
10. **Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχυδρομική διεύθυνση όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\overline{xyzxyz}$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^{4} \cdot 7^{2}$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha|\delta-\gamma|+\alpha|\delta-\varepsilon|+\varepsilon|\beta-\alpha|+\varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\gamma|+|\delta-\gamma|+|\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta<\mathrm{K}<\delta$.

(ii) Αν είναι

$$x=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x,y,z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{M B \Gamma}}=\widehat{\mathrm{M \Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}}=\widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\le 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^3<512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = x,\ \log_{150} 3 = y$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ .

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=2$ και $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{IA} + \mathrm{IB} + \mathrm{I\Gamma} \le 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

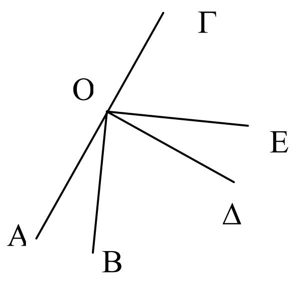
1. $\dfrac{42}{2\nu+1}\in\mathbb{Z}$ με $\nu\in\mathbb{N}\Rightarrow 2\nu+1\in\Delta_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{\mathrm{AOB}}=\omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega+90^\circ+\omega=180^\circ\Leftrightarrow 5\omega=90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega=18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow\frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta}\Rightarrow 2\beta(\gamma-\delta-\gamma-\delta)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0\Rightarrow\beta\delta=0\Rightarrow\beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} = \overline{xyzxyz} &= 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z \\
&= 100100x + 10010y + 1001z \\
&= 1001 \cdot (100x + 10y + z) \\
&= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό N.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$\mathrm{A} = (2 \cdot 5)^{90} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 10^{90} \cdot 4 \cdot 81 \cdot 49 = 15876 \cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow 4x = 3y \text{ και } xz = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} \text{ και } xz = 18.$$

Επειδή οι αριθμοί x, z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz = 18 \Leftrightarrow (x,z) = (1,18) \text{ ή } (2,9) \text{ ή } (3,6) \text{ ή } (6,3) \text{ ή } (9,2) \text{ ή } (18,1),$$

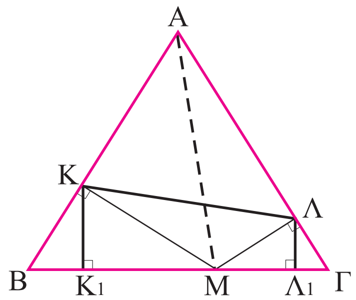
οπότε, από την ισότητα $y = \dfrac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$(x,y,z) = (3,4,6) \text{ ή } (6,8,3) \text{ ή } (9,12,2) \text{ ή } (18,24,1).$$

3. Έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{ABM}) + (\mathrm{A\Gamma M}) \Leftrightarrow \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda} = 3\sqrt{3} \quad (1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{KK_1M}$ και $\mathrm{\Lambda\Lambda_1M}$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$\mathrm{KK_1} = \frac{1}{2}\mathrm{MK}, \ \ \mathrm{\Lambda\Lambda_1} = \frac{1}{2}\mathrm{M\Lambda} \text{ και}$$

$$\mathrm{MK_1} = \mathrm{MK}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{M\Lambda_1} = \mathrm{M\Lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \mathrm{K_1\Lambda_1} = \mathrm{MK_1} + \mathrm{M\Lambda_1} = (\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$$

και $KK_1 + ΛΛ_1 = \frac{1}{2}(MK + MΛ) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Άρα είναι $(KK_1ΛΛ_1) = \frac{1}{2}(KK_1 + ΛΛ_1)K_1Λ_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $K = \gamma$, οπότε $\beta < K < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma-\beta) + \delta(\beta-\gamma) = (\gamma-\beta)(\alpha-\delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta-\gamma)(\alpha-\beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{MBΓ} = \widehat{MΓB}$, το τρίγωνο MBΓ είναι ισοσκελές με

$$MB = MΓ. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{MAΔ} = \widehat{MAE}$.

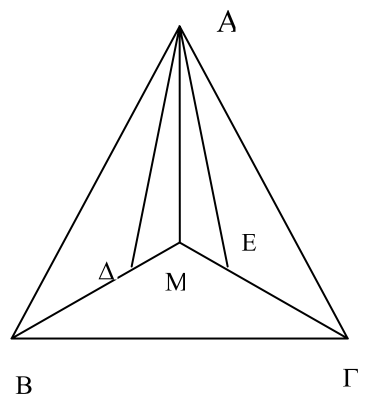
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{AMΔ} = \widehat{AME}. \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$AB = AΓ,$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8(x^3 + y^2) \le 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot\left(y+11z\right)=49000 \Rightarrow 9\left|49000\right.,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

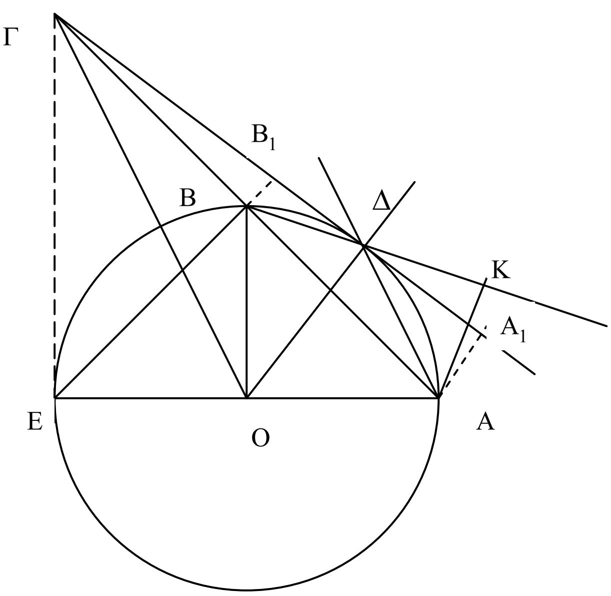
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(1-x_1\right)\left(1+x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1+x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_3\right)\\&=\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\left(1+x_3\right)\\&=\mathrm{P}\left(1\right)\left[-\left(-1-x_1\right)\left(-1-x_2\right)\left(-1-x_3\right)\right]\\&=-\mathrm{P}\left(1\right)\mathrm{P}\left(-1\right)=-\left(1+\kappa+\lambda\right)\left(-1-\kappa+\lambda\right)=\left(1+\kappa\right)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1ος Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^{\circ}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\begin{aligned}&\mathrm{OB}\parallel\mathrm{E}\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE} \Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E} \text{ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} \Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\end{aligned}$$

2ος Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\mathrm{K\Delta A}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\mathrm{KA} = \mathrm{K\Delta} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\mathrm{AA_1} \perp \Gamma\Delta$, $\mathrm{BB_1} \perp \Gamma\Delta$ και $\mathrm{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\Delta\mathrm{A}^2/2R}{\Delta\mathrm{B}^2/2R} = \frac{\mathrm{AA_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{B}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \mathrm{K\Delta} = \mathrm{KA}$ και

$$\mathrm{KB} = \mathrm{K\Delta} + \Delta\mathrm{B} = 2\cdot\mathrm{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

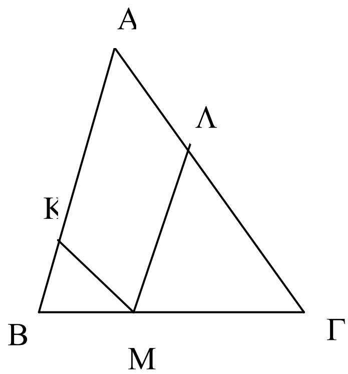
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}+\overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^\alpha\left(\beta^3\right)^\beta} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^\alpha\beta^\beta\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\mathrm{MB} = \kappa$ και $\mathrm{M\Gamma} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{-2\gamma^2/\alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right)/\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2^{ος} τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $\mathrm{S}\min=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\dfrac{\kappa}{\lambda}=\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^{x}=2,\ 150^{y}=3$

$$\mathrm{A}=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^{y}}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x}\cdot150^{y}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2^{ος} τρόπος

$$\log_{150}\mathrm{A}=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση $h(x)=\frac{2x^2+1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται και

$$h^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}}, & x\geq\frac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\frac{1-3x}{2}}, & x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow h^{-1}(x)=h(x)$ με $x\geq\frac{1}{3}$.

Αφού f γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των $G_{h^{-1}}$, G_h θα βρίσκονται στη πρώτη διχοτόμο y=x.

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}2x^3-3x+1=0\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}\text{ αφού } x\geq\frac{1}{3}.$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$.

2^{ος} τρόπος

$$\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=h^{-1}(x)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ x=h(y)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ x=\frac{2y^3+1}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3} & (2)\\ x-y=\frac{2}{3}\left(y^3-x^3\right) & (3)\end{matrix}\right.$$

$(3)\Leftrightarrow x=y$ ή $2x^2+2yx+2y^2+3=0$ $\qquad(4)\Leftrightarrow x=y$ αφού η (4) έχει $\Delta=-\left(12y^2+24\right)<0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ κ.λπ.

4. Θεωρούμε τον περιγεγραμένο κύκλο $C_1(K,R)$ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τον συμμετρικό του $C_2(\Lambda,R)$ ως προς τη ΒΓ. Τότε το Λ θα είναι μέσο του μικρού τόξου ΒΓ.

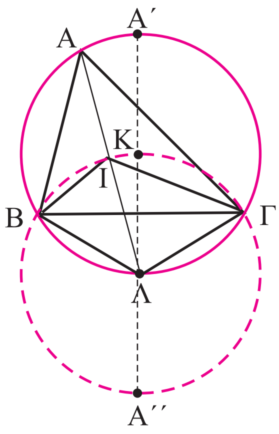
Έστω Α΄ το αντιδιαμετρικό του Α στον C_1 και Α΄΄ το αντιδιαμετρικό του Κ στον C_2.

Το τρίγωνο ΒΑ΄΄Γ είναι ισόπλευρο οπότε $IA''=IB+I\Gamma$. Επίσης $B\hat{I}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=120^o$.

Επομένως $IA+IB+I\Gamma=IA+IA''$.

Αλλά $IA''\leq KA''=2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου) και $IA=A\Lambda-R<A'\Lambda-R=KA'=R$.

Άρα $IA+IB+I\Gamma\leq 3R=3\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$, αφού ΒΓ=2 $\Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



$2^{ος}$ τρόπος

Έστω ΙΑ=x, ΙΒ=y, ΙΓ=ω

Τότε $\dfrac{\hat{A}}{2} = 30^{o} \Rightarrow x = 2\rho$

$B\hat{I}\Gamma = 120^{o} \Rightarrow y^2 + \omega^2 + y\omega = 4 \Rightarrow (y+\omega)^2 - y\omega = 4 \Rightarrow (y+\omega)^2 = 4 + y\omega \Rightarrow$

$y + \omega = \sqrt{4 + y\omega} = \sqrt{4+\lambda}$ με λ=yω.

Εξάλλου $(I B \Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot 2 = \rho$

$(I B \Gamma) = \dfrac{1}{2} y\omega \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{4}$, οπότε $\rho = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί λοιπόν $\dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4+\lambda} \le 2\sqrt{3}$, ή $\lambda\sqrt{3} + 2\sqrt{4+\lambda} \le 4\sqrt{3}$.

Όμως $R\sqrt{3} = 2 \Rightarrow R = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ και $R > \rho \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} > \dfrac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 8 > 3\lambda \Rightarrow \dfrac{8}{3} > \lambda \Rightarrow 4 > \dfrac{8}{3} > \lambda$.

Οπότε αρκεί $2\sqrt{4+\lambda} \le \sqrt{3}(4-\lambda)$, ή $4(4+\lambda) \le 2(4-\lambda)^2$, ή $3\lambda^2 - 28\lambda + 32 \ge 0$

που ισχύει αφού Δ=–188.