ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A} = k^4 + 4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = \frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Λύση

(α) Έχουμε

$$k^4+4=\left(k^2\right)^2+4k^2+2^2-4k^2=\left(k^2+2\right)^2-(2k)^2$$
$$=\left(k^2+2-2k\right)\left(k^2+2+2k\right)=\left[(k-1)^2+1^2\right]\left[(k+1)^2+1^2\right].$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος επί $\left(2^4\right)^n$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n)^4+\frac{1}{4}\right]}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n-1)^4+\frac{1}{4}\right]}$$
$$=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\cdots\left[(4n)^4+4\right]}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\cdots\left[(4n-2)^4+4\right]}$$
$$=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\left(13^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}$$
$$=\frac{(4n+1)^2+1}{1^2+1}=8n^2+4n+1=4n^2+4n^2+4n+1=(2n)^2+(2n+1)^2.$$

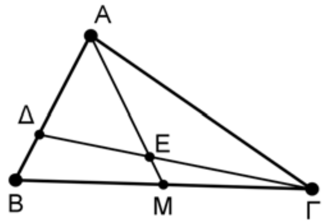
Παρατήρηση. Για το ερώτημα (β) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την παραγοντοποίηση

$$k^4+\frac{1}{4}=\left(k^2+\frac{1}{2}\right)^2-k^2=\left(k^2+\frac{1}{2}-k\right)\left(k^2+\frac{1}{2}+k\right)=\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Για την απλοποίηση του κλάσματος εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

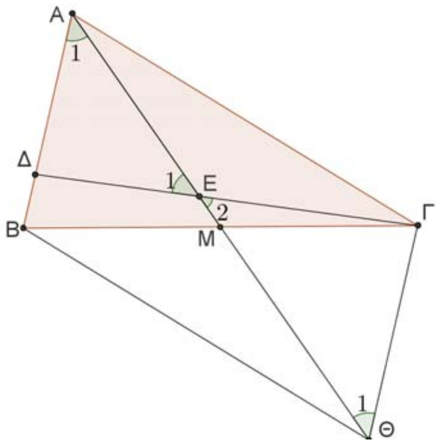
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E, τότε ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$.



Λύση (1ος τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Theta = AM$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Theta\Gamma$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $AB \parallel \Gamma\Theta$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Theta}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{\Theta}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο $E\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές με $\Gamma E = \Gamma\Theta$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $AB\Theta\Gamma$ έχουμε ότι $AB = \Gamma\Theta$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $AB = \Gamma E$.

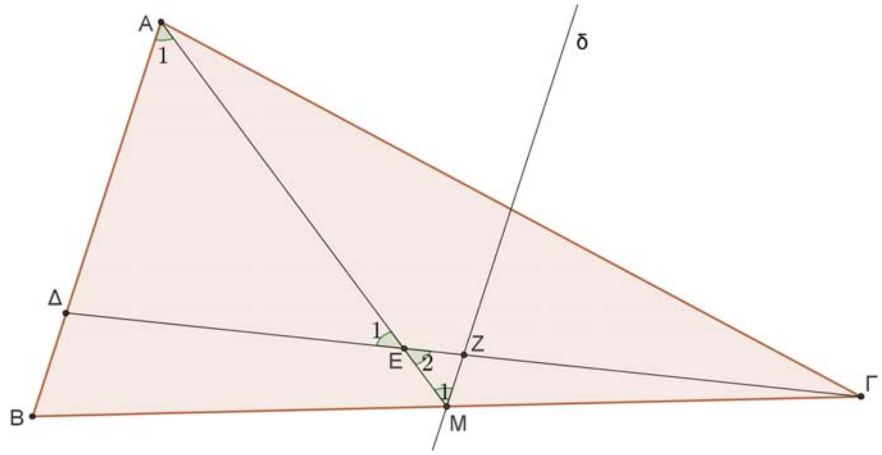
2ος τρόπος

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ, άρα και προς την πλευρά ΒΔ του τριγώνου ΒΓΔ, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, έστω στο σημείο Ζ. Τότε το Ζ θα είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, δηλαδή

$$\Gamma Z = Z\Delta \qquad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$B\Delta = 2\cdot MZ. \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta E}$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$ και επιπλέον $\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_2$, οπότε το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{ZM} = \mathrm{EZ}. \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma\mathrm{E} &= \Gamma\mathrm{Z} + \mathrm{ZE} \\ &= \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{ZE} && \text{(λόγω της (1))} \\ &= \Delta\mathrm{E} + 2\cdot\mathrm{ZM} && \text{(λόγω της (3))} \\ &= \mathrm{A}\Delta + \Delta\mathrm{B} = \mathrm{AB}. && \text{(λόγω της υπόθεσης και της (2))} \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $\mathrm{A} = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $\mathrm{B} = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει όλα τα ψηφία του περιττούς ακέραιους, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = (a+d)\cdot 10^3 + (b+c)\cdot 10^2 + (b+c)\cdot 10 + (a+d).$$

Από την υπόθεση, όλα τα ψηφία του ακέραιου $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ είναι περιττοί ακέραιοι. Όμως για την εύρεση των ψηφίων του ακεραίου $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ πρέπει να ξέρουμε αν οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$ είναι μικρότεροι του 10. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε:

$$a+d = 10+k, k = 0,1,2,\ldots,5,$$

$$b+c = 10+\ell,\ \ell = 0,1,2,\ldots,5.$$

Έτσι ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathrm{A}+\mathrm{B} &= (10+k)\cdot 10^3 + (10+\ell)\cdot 10^2 + (10+\ell)\cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + (k+1)\cdot 10^3 + (\ell+1)\cdot 10^2 + (\ell+1)\cdot 10 + k, \end{aligned}$$

δηλαδή έχει ψηφία $1, k+1, \ell+1, \ell+1, k$, τα οποία πρέπει να είναι περιττοί ακέραιοι, που είναι άτοπο, λόγω της ύπαρξης των διαδοχικών ακέραιων k και $k+1$.

(β) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c<10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $a+d=10+k, k=0,1,2,\ldots,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (10+k)\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c)\cdot 10+(10+k)\\ &= 10^4+k\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c+1)\cdot 10+k,\end{aligned}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b+c=9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφίο δεκάδων το 0, που είναι άρτιος, άτοπο.
- Αν $b+c<9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφία τους ακέραιους $b+c$ και $b+c+1$ που δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δύο περιττοί.

(γ) Έστω $a+d<10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $b+c=10+\ell, \ell=0,1,2,\ldots,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (a+d)\cdot 10^3+(10+\ell)\cdot 10^2+(10+\ell)\cdot 10+(a+d)\\ &= (a+d+1)\cdot 10^3+(\ell+1)\cdot 10^2+\ell\cdot 10+(a+d),\end{aligned}$$

οπότε οι ακέραιοι ℓ και $\ell+1$ είναι ψηφία του $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, άτοπο.

(δ) Έστω $a+d<10$ και $b+c<10$. Τότε τα ψηφία του αριθμού $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ είναι οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$, οι οποίοι πρέπει να είναι περιττοί. Λόγω των περιορισμών $a>b>c>d>0$ και $a \geq 7$, έπεται ότι $a+d=9$ και επίσης $5 \geq c \geq 2, 6 \geq b \geq 3$, οπότε $10>b+c \geq 5$, δηλαδή $b+c \in \{5,7,9\}$ Επομένως, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=9$ με $b=7$, $c=2$ ή $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$
  Επομένως, προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8721}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8631}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8541}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=9$ με $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{7632}$, $\mathrm{A}=\mathbf{7542}$
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=7$ με $b=5$, $c=2$ ή $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8521}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8431}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=7$ με $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{7432}$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=5$ με $b=3$, $c=2$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{8321}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1$$

Λύση

Αν είναι $x \geq 3$ και $y \geq 3$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z} \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{z}=1-\frac{4}{z}<1,$$

οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Επομένως θα είναι: $x \leq 2$ ή $y \leq 2$, οπότε πρέπει να ισχύει ένα από τα επόμενα: $x=1$ ή $x=2$ ή $y=1$ ή $y=2$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=2y \Leftrightarrow y=k,\ z=2k,$ όπου k θετικός ακέραιος, οπότε έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(1,k,2k), k\in\mathbb{Z}$ θετικός.
- Για $x=2$ η εξίσωση γίνεται:
$$\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{8+z}{2z} \Leftrightarrow y=\frac{4z}{z+8} \Leftrightarrow y=\frac{4(z+8)-32}{z+8} \Leftrightarrow y=4-\frac{32}{z+8}.$$
Επειδή ο y πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο $z+8$ πρέπει να είναι θετικός διαιρέτης του 32 και μεγαλύτερος του 8. Άρα οι δυνατές τιμές του $z+8$ είναι 16 ή 32, οπότε $z=8$ ή $z=24$. Για $z=8$ λαμβάνουμε $y=2$, ενώ για $z=24$ λαμβάνουμε $y=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(2,2,8) \text{ ή } (x,y,z)=(2,3,24).$$
- Για $y=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=-1 \Leftrightarrow \frac{4}{z}=\frac{1+x}{x} \Leftrightarrow z=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}.$
Επειδή πρέπει ο z να είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο $1+x$ να είναι θετικός διαιρέτης του 4 και μεγαλύτερος του 1, δηλαδή πρέπει $1+x=2$ ή $1+x=4$ $\Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=3$ Για $x=1$ λαμβάνουμε $z=2$, ενώ για $x=3$ λαμβάνουμε $z=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(1,1,2) \text{ ή } (x,y,z)=(3,1,3).$$
- Για $y=2$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=4x \Leftrightarrow x=\ell,\ z=4\ell,$ όπου ℓ θετικός ακέραιος. Άρα, στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(\ell,2,4\ell)$, όπου ℓ θετικός ακέραιος.

Συνολικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις επικαλύψεις των λύσεων που βρήκαμε, έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(1,k,2k), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(\ell,2,4\ell), \text{ όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(3,1,3) \text{ και } (x,y,z)=(2,3,24).$$

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n=1,2,3,\ldots$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

Λύση (1^ος^ τρόπος)

Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{1}\cdot a_1 = 3\cdot 2, a_3 = \frac{4}{2}\cdot\left(a_1 + a_2\right) = \frac{4}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4\cdot 2^2,$$

$$a_4 = \frac{5}{3}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3\right) = \frac{5}{3}\cdot 24 = 5\cdot 2^3 a_5 = \frac{6}{4}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right) = \frac{6}{4}\cdot 64 = 6\cdot 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_n = (n+1)\cdot 2^{n-1}$, για κάθε $n = 1,2,3,\ldots,k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για $n = k+1$, δηλαδή ότι ισχύει: $a_{k+1} = (k+2)\cdot 2^k$.

Πράγματι, έχουμε

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right) = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right)$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2\cdot 2^0 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right) \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί 2, λαμβάνουμε

$$2a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + (k+1)\cdot 2^k\right), \qquad (2)$$

οπότε με αφαίρεση της (1) από τη (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^{k-1} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-1 - \frac{1-2^k}{1-2} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$= \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2^k + (k+1)\cdot 2^k\right) = (k+2)\cdot 2^k.$$

Άρα έχουμε: $a_{2013} = 2014\cdot 2^{2012}$

2^ος^ τρόπος

Θεωρούμε τις σχέσεις

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2, \qquad (3)$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right),\ n \geq 1, \qquad (4)$$

από τις οποίες λαμβάνουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n, n \geq 2 \qquad (5)$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)a_{n+1},\ n\geq 1. \qquad (6)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (5) από τη σχέση (6) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)a_{n+1}-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n \Rightarrow a_{n+1}=\left(\frac{2(n+2)}{n+1}\right)a_n,\ n\geq 1 \qquad (7)$$

Επομένως έχουμε

$$a_n=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)a_{n-1}=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right)a_{n-2}=\ldots$$

$$=\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{2\cdot 4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)a_1=\left(n+1\right)\cdot 2^{n-2}\cdot a_1=\left(n+1\right)\cdot 2^{n-1},$$

αφού είναι $a_1=2$. Άρα έχουμε $a_{2013}=2014\cdot 2^{2012}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:

$$y=2x^2+5xy+3y^2.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y=2x^2+2xy+3xy+3y^2 \Leftrightarrow y=\left(x+y\right)\left(2x+3y\right). \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $x+y=z$, τότε πρέπει $z\in\mathbb{Z}$ και η εξίσωση (1) γίνεται

$$y=z\left(2z+y\right)\Leftrightarrow y=2z^2+yz\Leftrightarrow\left(z-1\right)y=-2z^2. \qquad (2)$$

Για $z=1$ η εξίσωση (2) γίνεται $0\cdot y=-2$ (αδύνατη).

Για $z\neq 1$ η εξίσωση γίνεται

$$y=-\frac{2z^2}{z-1}=-\frac{2\left(z^2-1\right)+2}{z-1}=-2\left(z+1\right)-\frac{2}{z-1}. \qquad (3)$$

Για να είναι ο y ακέραιος πρέπει ο $z-1$ να είναι διαιρέτης του 2, δηλαδή πρέπει

$$z-1\in\left\{-1,1,-2,2\right\}\Leftrightarrow z\in\left\{0,2,-1,3\right\}.$$

- Για $z=0$, λαμβάνουμε τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$.
- Για $z=2$, λαμβάνουμε τη λύση $\left(x,y\right)=\left(10,-8\right)$.
- Για $z=-1$, λαμβάνουμε τη λύση $\left(x,y\right)=\left(-2,1\right)$.
- Για $z=3$, λαμβάνουμε τη λύση $\left(x,y\right)=\left(12,-9\right)$.

2ος τρόπος

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y=2x^2+2xy+3xy+3y^2\Leftrightarrow\left(x+y-1\right)\left(2x+3y+2\right)=-2 \qquad (4)$$

Επειδή ζητάμε λύσεις στους ακέραιους, οι δύο παράγοντες στο πρώτο μέρος πρέπει να είναι ακέραιοι, οπότε από την εξίσωση (4) έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\left\{\begin{array}{c}x+y-1=-1\\2x+3y+2=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\2x+3y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$

- $\left.\begin{cases} x+y-1=1 \\ 2x+3y+2=-2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(10,-8)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=2 \\ 2x+3y+2=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=-3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(12,-9)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x+3y+2=1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-2,1)$

3^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2x^2+5yx+3y^2-y=0\text{,} \qquad (5)$$

δηλαδή είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ακέραιους συντελεστές. Για να έχει η εξίσωση αυτή ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου , δηλαδή πρέπει $\Delta=y^2+8y=y(y+8)=\rho^2$, όπου ρ ακέραιος .

- Αν είναι $\rho=0$, τότε θα είναι $\Delta=0$ και $y=0$ ή $y=-8$. Για $y=0$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=0$, δηλαδή είναι $(x,y)=(0,0)$. Για $y=-8$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=10$, οπότε έχουμε τη λύση $(x,y)=(10,-8)$.
- Αν είναι $\rho\neq 0$, τότε **πρέπει** η εξίσωση

$$y^2+8y-\rho^2=0, \qquad (6)$$

να έχει ακέραιες λύσεις ως προς y για κατάλληλες τιμές του ρ. Άρα, πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης (6) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Άρα πρέπει να είναι $\Delta'=64+4\rho^2=8^2+(2\rho)^2=w^2$, οπότε η τριάδα $(8,2\rho,w)$ πρέπει να είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα. Όμως όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής $\left(k\cdot(m^2-n^2),k\cdot 2mn,k\cdot(m^2+n^2)\right)$, όπου k,m,n θετικοί ακέραιοι, $m>n$. Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

$$k\cdot(m^2-n^2)=8,\ k\cdot 2mn=2\rho \qquad (7)$$

$$\text{ή } k\cdot 2mn=8,\ k\cdot(m^2-n^2)=2\rho. \qquad (8)$$

Για $k=1$ η σχέση (7) μπορεί να αληθεύει με $(m,n)=(3,1)$, οπότε $\rho=3$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται $y^2+8y-9=0\Leftrightarrow y=1$ ή $y=-9$, δηλαδή έχει ακέραιες λύσεις Από την εξίσωση (5) λαμβάνουμε τις λύσεις $x=-2$, για $y=1$ και $x=12$, για $y=-9$, οπότε έχουμε τις λύσεις: $(x,y)=(-2,1)$ και $(x,y)=(12,-9)$. Για $k\geq 2$, από το σύστημα (7) δεν προκύπτει ακέραια τιμή για το ρ. Ομοίως, από το σύστημα (8) δεν προκύπτουν ακέραιες τιμές για το ρ.

Εναλλακτικά, όταν φθάσουμε στην αναγκαία συνθήκη $\Delta'=64+4\rho^2=w^2$ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta'=64+4\rho^2=w^2\Leftrightarrow w^2-4\rho^2=64\Leftrightarrow (w-2\rho)(w+2\rho)=64.$$

Στη συνέχεια, για την επιλογή των ακέραιων παραγόντων του πρώτου μέλους, παρατηρούμε ότι:

$$(w+2\rho)+(w-2\rho)=2w=\text{πολλαπλάσιο του 2}$$

$$(w+2\rho)-(w-2\rho)=4\rho=\text{πολλαπλάσιο του 4.}$$

Επομένως οι περιπτώσεις που οδηγούν σε θετικές ακέραιες λύσεις για τα w και ρ είναι μόνον οι εξής:

- $\left.\begin{cases} w+2\rho=16 \\ w-2\rho=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(10,3)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:

  $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=-9$ ή $y=1$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(12,-9)$ και $(x,y)=(-2,1)$.

- $\left.\begin{cases} w+2\rho=8 \\ w-2\rho=8 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(8,0)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:

  $y^2+8y=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=-8$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(0,0)$ και $(x,y)=(10,-8)$.

Μπορούμε ακόμη να θεωρήσουμε την εξίσωση ως τριώνυμο μεταβλητής y και να εργαστούμε ανάλογα, όπως στη παραπάνω περίπτωση . Τότε καταλήγουμε στην αναγκαία συνθήκη να είναι τέλειο η διακρίνουσα $\Delta=x^2-10x+24=(x-5)^2-1$, δηλαδή $(x-5)^2-1=\omega^2 \Leftrightarrow (x-5)^2-\omega^2=1 \Leftrightarrow (x-5-\omega)(x-5+\omega)=1$, από την οποία προκύπτουν τελικά οι ακέραιες λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i|=i,\ i=1,2,...,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,...,\mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3,...,\mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

Λύση

Υποθέτουμε ότι κατά το πρώτο βήμα αφαιρούμε από όλα τα επιλεγμένα σύνολα k_1 στοιχεία, κατά το δεύτερο βήμα αφαιρούμε k_2 στοιχεία και ομοίως κατά το $n-$στό βήμα αφαιρούμε k_n στοιχεία. Όταν εξαντληθούν τα στοιχεία όλων των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$, τότε θα πρέπει το κάθε $i=|\mathrm{A}_i|,\ i=1,2,...,160$, να είναι άθροισμα κάποιων όρων από τους $k_1,k_2,...,k_n$. Όμως τα δυνατά αθροίσματα που δημιουργούνται από όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{k_1,k_2,...,k_n\}$ είναι 2^n, αφού για τη δημιουργία τέτοιων αθροισμάτων για κάθε όρο υπάρχουν δύο επιλογές, δηλαδή μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο στο άθροισμα ή όχι. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι $2^n \geq 160$, οπότε πρέπει $n \geq 8$ και η ελάχιστη πιθανή τιμή του n είναι το 8.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για $n=8$ μπορούμε να επιτύχουμε την εξάντληση των στοιχείων των δεδομένων συνόλων με την προβλεπόμενη διαδικασία, οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του n θα είναι 8.

Στο πρώτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{81},...A_{160}$ και αφαιρούμε από το καθένα από αυτά 80 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_1 θα έχει $80 \cdot 80 = 6400$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 80 στοιχείων ως $A^1_{81},...,A^1_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i και A^1_{80+i}, $i = 1,2,...,80$ έχουν από i στοιχεία. Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{41},...,A_{80}$, $A^1_{121},...,A^1_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 40 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_2 θα έχει $80 \cdot 40 = 3200$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 40 στοιχείων ως $A^1_{41},...,A^1_{80}$ και $A^2_{121},...,A^2_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i, A^1_{40+i}, A^1_{80+i} και $A^2_{120+i}, i = 1,2,...,40$ έχουν το καθένα από i στοιχεία. Στο τρίτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{21},...,A_{40}$, $A^1_{60+i},...,A^1_{100+i}$, $A^2_{140+i}, i = 1,2,...,20$ αφαιρούμε από καθένα από αυτά 20 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_3 θα έχει $80 \cdot 20 = 1600$ στοιχεία.

Συνεχίζουμε ομοίως με ανάλογους συμβολισμούς, θεωρώντας στο τέταρτο βήμα τα σύνολα $A_{10+i}, A^1_{30+i}, A^2_{50+i}, A^2_{70+i}, A^2_{90+i}, A^2_{110+i}, A^3_{130+i}, A^3_{150+i}, i = 1,2,...,10$, και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 10 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_4 θα έχει $80 \cdot 10 = 800$ στοιχεία. Τα σύνολα που απομένουν έχουν το καθένα το πολύ 10 στοιχεία. Στο πέμπτο βήμα επιλέγουμε τα μισά από αυτά, δηλαδή τα $A^{\ell}_{5+i(\text{mod}10)}, i = 1,2,3,4,5$ με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1,2,3,4$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 5 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_5 θα έχει $80 \cdot 5 = 400$ στοιχεία. Έτσι έχουν απομείνει 32 ομάδες συνόλων που έχουν από ένα μέχρι πέντε στοιχεία. Στο έκτο βήμα επιλέγουμε από αυτά τα $A^{\ell}_{2+i(\text{mod}5)}, i = 1,2,3$, συνολικά 96 σύνολα, με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1,2,...,5$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 3 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_6 θα έχει $96 \cdot 3 = 288$ στοιχεία. Τότε τα 32 σύνολα $A^{\ell}_{3(\text{mod}5)}$ γίνονται κενά , τα σύνολα A_1, $A^{\ell}_{1(\text{mod}3)}$ έχουν από ένα στοιχείο, ενώ τα σύνολα A_2, $A^{\ell}_{2(\text{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1,2,...,6$ έχουν από δύο στοιχεία. Στο έβδομο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_2, $A^{\ell}_{2(\text{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από δύο στοιχεία, οπότε γίνονται κενά, ενώ στο όγδοο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_1, $A^{\ell}_{1(\text{mod}3)}, \ell = 1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από ένα στοιχείο, οπότε γίνονται κενά.

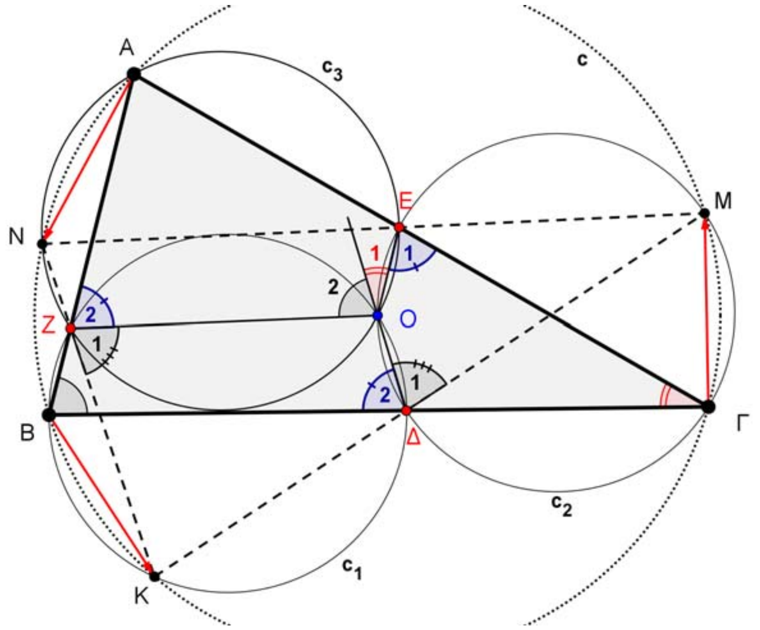
Έτσι το σύνολο M_7 θα έχει 128 στοιχεία, ενώ το σύνολο M_8 θα έχει 64 στοιχεία.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη απόδειξη για ότι ο αριθμός των βημάτων μπορεί να είναι 8, δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να πάρουμε τα 81 σύνολα $A_{80}, A_{81},...,A_{160}$ και να τους αφαιρέσουμε από 80 στοιχεία με ανάλογη συνέχεια στα επόμενα βήματα. Τότε θα αφαιρούσαμε στο πρώτο βήμα $81 \cdot 80 = 6480$ στοιχεία που είναι και το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να αφαιρεθούν στο πρώτο βήμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $B\Gamma$ (διαφορετικό από το μέσο της $B\Gamma$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $BO\Delta$ (έστω c_1) τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Gamma O\Delta$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M και την $A\Gamma$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KMN είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 1

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος c_3 περνάει από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε: $\hat{O}_2 = \hat{B}$.

Από τη πρόσθεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων ισοτήτων γωνιών λαμβάνουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \ E\hat{O}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o - \hat{A},$$

οπότε το τετράπλευρο $AEOZ$ είναι εγγράψιμο (άθροισμα απέναντι γωνιών 180^o).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 είναι ίσοι μεταξύ τους.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε; $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$.

Επομένως έχουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2 = \hat{E}_1$. Οι τρεις αυτές ίσες γωνίες βαίνουν στις ίσες χορδές $OB, O\Gamma$ και OA των κύκλων c_1, c_2 και c_3 αντίστοιχα. Άρα οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 έχουν ίσες ακτίνες, οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

Στους ίσους κύκλους c_1 και c_2, οι γωνίες $\hat{Z}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ βαίνουν στις ίσες χορδές OK και OM ($OK = OM = R$), οπότε θα είναι: $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα σημεία K, Δ, M είναι συνευθειακά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία M, E, N και τα σημεία N, Z, K είναι επίσης συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\mathrm{B\hat{\Delta}K} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}M}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{E}M} = \mathrm{A\hat{E}N}$ (που είναι κατά κορυφή) προκύπτει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{AN} = \mathrm{BK} = \mathrm{\Gamma M}$ (τα οποία είναι χορδές του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$.
Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και KMN έχουν κοινό περίκεντρο O και το KMN είναι η εικόνα του $\mathrm{AB\Gamma}$ στη στροφή με κέντρο το σημείο O και γωνία $\mathrm{A\hat{O}N} = \mathrm{B\hat{O}K} = \mathrm{\Gamma\hat{O}M} = \hat{\omega}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Το περίκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, ταυτίζεται με το σημείο Miquel που αντιστοιχεί στα σημεία $\Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ των πλευρών του τριγώνου. Έτσι μπορεί να προκύψει άμεσα ότι το τετράπλευρο ΑΕΟΖ είναι εγγράψιμο.