ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

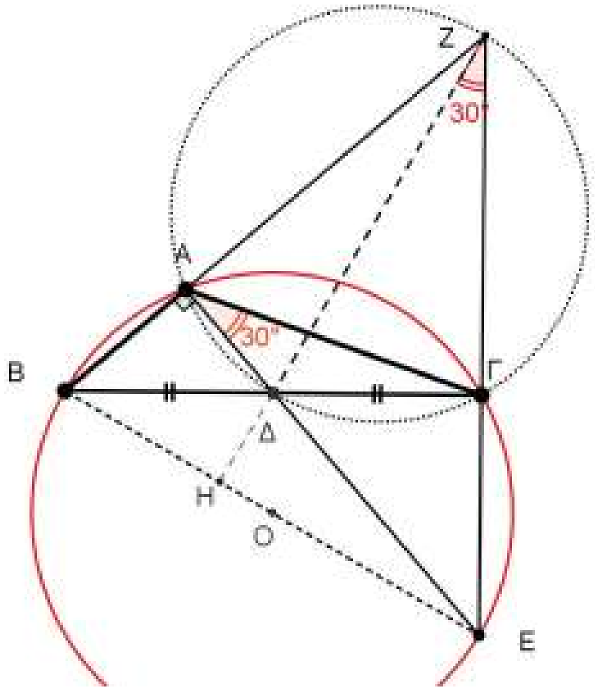
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$. Αν Δ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ, δίνεται ότι η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΒΑ και ΕΓ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\Delta \perp BE$, **(β)** $Z\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $B\hat{A}E = 90^\circ$ η ΒΕ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως θα είναι και $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο ΖΒΕ τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΒΓ είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο Δ.

Επομένως η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΖΒΕ, δηλαδή είναι $Z\Delta \perp BE$.



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι: $Z\hat{B}H = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$Z\hat{B}H = 180^\circ - \left(H\hat{B}Z + B\hat{Z}H\right) \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$H\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = E\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 120^\circ - 90^\circ + \Gamma\hat{B}A = 30^\circ + \hat{B}. \qquad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΓΖ (γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \hat{\Gamma} \qquad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = 180^\circ - \left(30^\circ + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(180^\circ - 120^\circ\right) = 90^\circ.$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα θα έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΖ η υποτείνουσα ΖΔ θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΔΓ, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{B}\Gamma$, αφού Δ μέσο της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha - \delta) + 100(\beta - \gamma) + 10(\gamma - \beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha - \delta) + 90(\beta - \gamma) \\ &= 9\left(111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma)\right). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma).$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον $x > y$, θα ισχύει $\alpha > \delta$.

Η παράσταση Α γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν μέγιστοι και επί πλέον $\alpha - \delta > \beta - \gamma$. Η διαφορά $\alpha - \delta$ γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 9$ και $\delta = 1$. Η διαφορά $\beta - \gamma$ γίνεται μέγιστη όταν $\beta = 8$ και $\gamma = 2$.

Άρα $x = 9821$ και $y = 1289$ είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά $x - y = 9821 - 1289 = 8532$.

Η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $\alpha - \delta$ είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ) είναι:

$$(9,8), (8,7), (7,6)\ (6,5)\ (5,4)\ (4,3)\ (3,2) \text{ και } (2,1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ), η τιμή της παράστασης A γίνεται:

$$\mathrm{A} = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς $\beta - \gamma$ είναι το -8 που δημιουργείται για $\beta = 1$ και $\gamma = 9$.

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη (9,8) και (2,1) (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών x, y καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$.

Λύση

(α) Έστω $3\nu+1=7\kappa$, όπου ν,κ ακέραιοι. Ο ακέραιος ν έχει τη μορφή $\nu=7\rho+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ και ρ ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\upsilon)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\upsilon+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\upsilon+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το υ είναι το 2. Έτσι έχουμε $\nu=7\rho+2$, όπου ρ ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m=(7\rho+2)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(7\rho)^{m-i}\,2^i=\pi o\lambda.7+2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^m με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι $m=3\sigma+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$, τότε λαμβάνουμε:

$$2^m=2^{3\sigma+\upsilon}=8^\sigma\cdot 2^\upsilon=(7+1)^\sigma\cdot 2^\upsilon=(\pi o\lambda.7+1)\cdot 2^\upsilon=\pi o\lambda.7+2^\upsilon,$$

όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$. Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$ είναι τα $2^0=1$, $2^1=2$ και $2^2=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}. \tag{1}$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{x}\,, \qquad (2)$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{4}}=\sqrt{y}\,, \qquad (3)$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{4}}=\sqrt{z}\ . \qquad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=\frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^3}\left(\frac{z^2}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^7}z^8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z^7=4^7 \Leftrightarrow x=y=z=4.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΕΜΕ

28$^{\eta}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2\left(2y-x\right)=x^2y^4-36 .$$

Λύση

Μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2y^2\left(x-y\right)^2-6^2=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow\left[xy\left(x-y\right)-6\right]\cdot\left[xy\left(x-y\right)+6\right]=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x-y\right)=6,\ x,y\in\mathbb{Z},\qquad \text{ή}\quad xy\left(x-y\right)=-6,\ x,y\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x-y\right)=6,\ x,y\in\mathbb{Z},\quad (1)\quad \text{ή}\quad xy\left(y-x\right)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}.\qquad (2)$$

Από τη μορφή των (1) και (2) προκύπτει ότι, αν $\left(x_0,y_0\right)$ είναι λύση της (1), τότε το ζευγάρι $\left(y_0,x_0\right)$ είναι λύση της (2) και αντιστρόφως. Επομένως, αρκεί να λύσουμε μόνον την εξίσωση (1). Επειδή $x,y\in\mathbb{Z}$, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με :

$$\left\{xy=6,x-y=1\right\}\left(\Sigma_1\right)\text{ή }\left\{xy=-6,x-y=-1\right\}\left(\Sigma_2\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=3,x-y=2\right\}\left(\Sigma_3\right)\text{ή }\left\{xy=-3,x-y=-2\right\}\left(\Sigma_4\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=1,x-y=6\right\}\left(\Sigma_5\right)\text{ ή }\left\{xy=-1,x-y=-6\right\}\left(\Sigma_6\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=2,x-y=3\right\}\left(\Sigma_7\right)\text{ή }\left\{xy=-2,x-y=-3\right\}\left(\Sigma_8\right).$$

Από τα 8 συστήματα μόνον τα $\left(\Sigma_1\right),\left(\Sigma_3\right),\ \left(\Sigma_8\right)$ δίνουν τις ακέραιες λύσεις:

$$\left(x,y\right)=\left(3,2\right),\left(x,y\right)=\left(-2,-3\right),\ \left(x,y\right)=\left(3,1\right),$$

$$\left(x,y\right)=\left(-1,-3\right),\ \left(x,y\right)=\left(-2,1\right)\text{και }\left(x,y\right)=\left(-1,2\right).^{\cdot}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση (2) έχει στους ακέραιους τις λύσεις

$$\left(x,y\right)=\left(2,3\right),\left(x,y\right)=\left(-3,-2\right),\left(x,y\right)=\left(1,3\right),$$

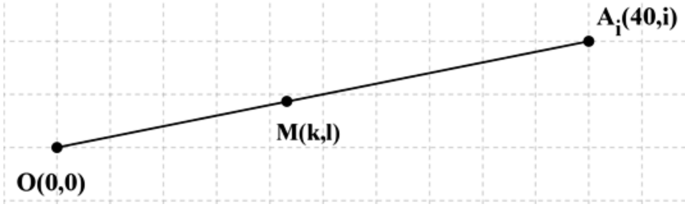
$$\left(x,y\right)=\left(-3,-1\right),\left(x,y\right)=\left(1,-2\right)\text{και }\left(x,y\right)=\left(2,-1\right).^{\cdot}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1)$, $A_2(40,2)$, …, $A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση.

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $\text{ΜΚΔ}(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l.



Σχήμα 1

Ένα σημείο $\text{M}(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος OA_i, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{OM}}$ και $\overrightarrow{\text{OA}_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$), δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40}=\frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα OA_i "καλό", θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του "καλού" σημείου $\text{M}(k,l)$).

Επομένως, για να υπάρχει "καλό" σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως "καλό") θα πρέπει $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$. Αν τώρα $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$, τότε θα υπάρχουν $\text{ΜΚΔ}(40,i)-1$ "καλά" σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i. Στο σημείο $\text{A}_2(40,2)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα OA_2, στο οποίο ανήκει το "καλό" σημείο $(20,1)$. Στο σημείο $\text{A}_4(40,4)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα OA_4, στο οποίο ανήκουν τα "καλά" σημεία $(10,1)$, $(20,2)$, $(30,3)$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

A2(40,2)	ΜΚΔ(40,2)=2	1	A40(40,40)	ΜΚΔ(40,40)=40	39
A4(40,4)	ΜΚΔ(40,4)=4	3	A38(40,38)	ΜΚΔ(40,38)=2	1
A5(40,5)	ΜΚΔ(40,5)=5	4	A36(40,36)	ΜΚΔ(40,36)=4	3
A6(40,6)	ΜΚΔ(40,6)=2	1	A35(40,35)	ΜΚΔ(40,35)=5	4
A8(40,8)	ΜΚΔ(40,8)=8	7	A34(40,34)	ΜΚΔ(40,34)=2	1
A10(40,10)	ΜΚΔ(40,10)=10	9	A32(40,32)	ΜΚΔ(40,32)=8	7
A12(40,12)	ΜΚΔ(40,12)=4	3	A30(40,30)	ΜΚΔ(40,30)=10	9
A14(40,14)	ΜΚΔ(40,14)=2	1	A28(40,28)	ΜΚΔ(40,28)=4	3
A15(40,15)	ΜΚΔ(40,15)=5	4	A26(40,26)	ΜΚΔ(40,26)=2	1
A16(40,16)	ΜΚΔ(40,16)=8	7	A25(40,25)	ΜΚΔ(40,25)=5	4

A18(40,18)	ΜΚΔ(40,18)=2	1	A24(40,24)	ΜΚΔ(40,24)=8	7
A20(40,20)	ΜΚΔ(40,20)=20	19	A22(40,22)	ΜΚΔ(40,22)=2	1
		60			**80**

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη:
$$\text{ΜΚΔ}\,(k,l)=\text{ΜΚΔ}\,(l,k)=\text{ΜΚΔ}\,(l-k,k)=\text{ΜΚΔ}\,(|l-k|,|k|).$$
3. Το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης ϕ του Euler. Είναι γνωστό ότι $n-\phi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν. Επειδή όμως $40=5\cdot 2^3$, έχουμε:
$$\phi(40)=40\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=40\frac{1}{2}\frac{4}{5}=16.$$
Άρα το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων είναι $40-\phi(40)=24$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου ως εξής:
$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{a^2+2bc+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+2bc+24\right),$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{b^2+2ca+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(b^2+2ca+24\right),$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{c^2+2ab+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(c^2+2ab+24\right),$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le\frac{1}{3\sqrt[2]{12^2}}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+72\right)$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left[\left(a+b+c\right)^2+72\right]=\frac{36}{\sqrt[3]{12^2}}=\frac{18}{\sqrt[3]{18}}=3\sqrt[3]{12}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$a^2+2bc=12,\ b^2+2ca=12,\ c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c)=0,(b-c)(b+c-2a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(6-3c)=0,(b-c)(6-3a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow a=b=c=2.$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $3\sqrt[3]{12}$ και λαμβάνεται όταν είναι $a=b=c=2$.

Παρατήρηση

1. *Η επιλογή του αριθμού 12 ως δεύτερου και τρίτου όρου για την εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου οφείλεται στο ότι μόνον για αυτόν είναι δυνατόν να αληθεύει η ισότητα και στις τρεις επιμέρους ανισότητες. Αυτό είναι αναγκαίο για είναι δυνατόν η παράσταση να πάρει την τιμή που εμφανίζεται ως ένα πάνω φράγμα της. Για παράδειγμα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει τις ανισότητες*

$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\sqrt[3]{(a^2+2bc)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{a^2+2bc+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\sqrt[3]{(b^2+2ca)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{b^2+2ca+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\sqrt[3]{(c^2+2ab)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{c^2+2ab+2}{3},$$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα βρίσκαμε

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6}{3}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2+6}{3}=\frac{42}{3}=14.$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να αληθεύει, όπως προκύπτει από το σύστημα

$$a^2+2bc=1,\ b^2+2ca=1,\ c^2+2ab=1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)^2=3,\ \text{άτοπο.}$$

2. *Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό*

$$x=\sqrt[3]{a^2+2bc},\ y=\sqrt[3]{b^2+2ca},\ z=\sqrt[3]{c^2+2ab},$$

μέσω του οποίου η συνάρτηση γίνεται $S(x,y,z)=x+y+z$, *της οποίας ζητάμε τη μέγιστη τιμή υπό τη συνθήκη* $x^3+y^3+z^3=(a+b+c)^2=36$. *Στη συνέχεια θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει **τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange**, χωρίς σοβαρό πρόβλημα στις πράξεις. Επίσης θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί χρησιμοποιώντας και άλλες κλασικές ανισότητες, όπως η ανισότητα του Holder ή την ανισότητα των δυνάμεων.*

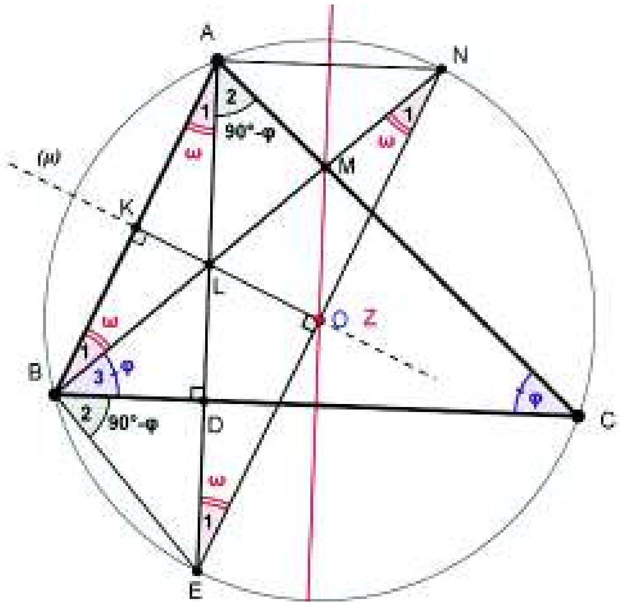
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο $\boldsymbol{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$, δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB // EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



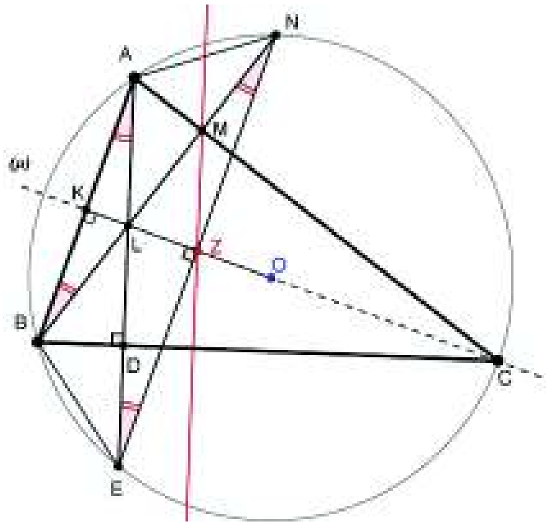
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ***ταυτίζεται με το σημείο*** O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$. Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Έστω ότι το τρίγωνο ABC ***είναι ισοσκελές*** **(**$CA = CB$**).** Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια ***το σημείο*** M ***είναι το μέσο του τμήματος*** LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

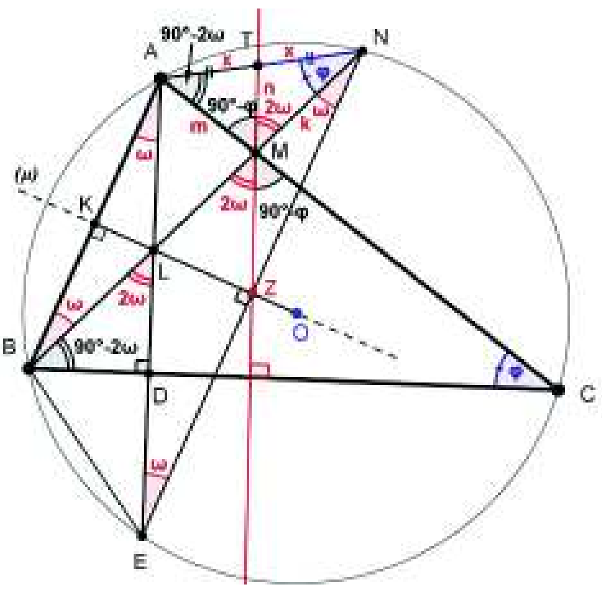
Το σημείο Z ***είναι το μέσο του τμήματος*** EN **(**διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ ***είναι κάθετη στην*** BC ***και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο*** ABC ***είναι ισοσκελές (***$CA = CB$***) ή το σημείο*** Z ***ταυτίζεται με το κέντρο*** O ***του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).***

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC. Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ \parallel AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ \parallel AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ \parallel AE$, προκύπτει η "μεταφορά" γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD \,//\, MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\, \eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2} mn\,\eta\mu(90-\varphi) = \frac{1}{2} mx\,\eta\mu(90-2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} kn\,\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2} kx\,\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\, 2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 2\omega}{\eta\mu\,\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu\, 2\varphi = \eta\mu\, 4\omega .$$

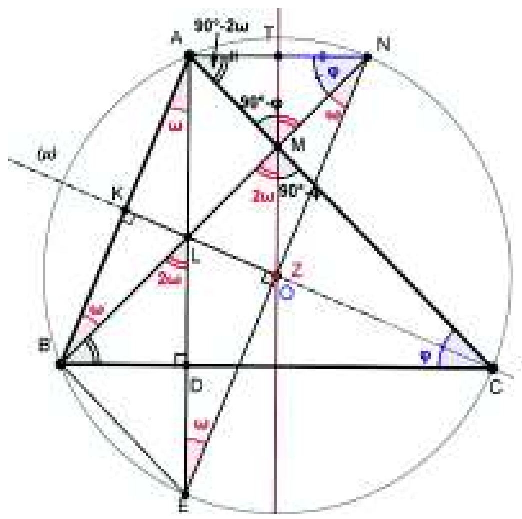
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \qquad (A) \quad \text{ή} \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \qquad (B).$$

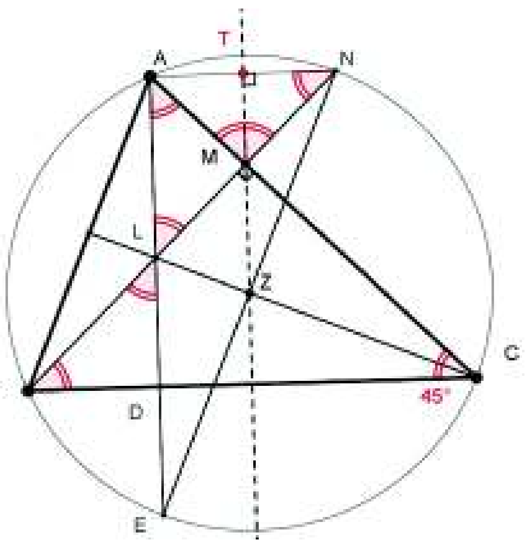
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM = TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N = 90^o$). Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T, δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ και $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^o$, τότε τα τρίγωνα TMN, TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετη της BC.

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z *ταυτίζεται με το σημείο* O, *οπότε η διάζευξη των προτάσεων* $\left(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O\right)$ *είναι εγκλειστική.*