ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$26^η$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7} = \frac{9(n^2 + 7) - 32}{n^2 + 7} = 9 - \frac{32}{n^2 + 7}.$$

Επειδή ο αριθμός Κ είναι ακέραιος, έπεται ότι ο $n^2 + 7$ είναι διαιρέτης του 32 και αφού είναι $n^2 + 7 \geq 8$, έπεται ότι:

$$n^2 + 7 \in \{8, 16, 32\} \Leftrightarrow n^2 \in \{1, 9, 25\} \Leftrightarrow n \in \{-1, 1, -3, 3, -5, 5\}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να λύσει τη δεδομένη ισότητα ως προς n^2 και στη συνέχεια να προσδιορίσει τις κατάλληλες τιμές του Κ για τις οποίες ο n^2 προκύπτει μη αρνητικός ακέραιος.

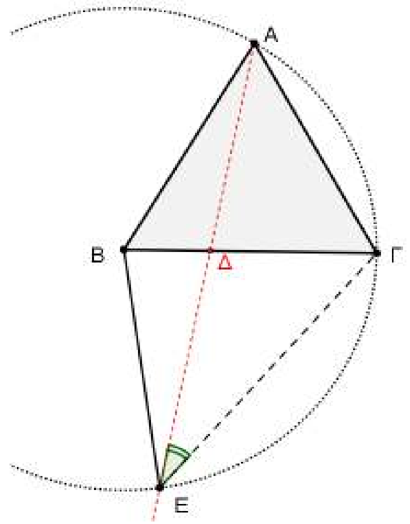
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$.
Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA} = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{BE}$, οπότε το σημείο Β είναι κέντρο κύκλου που περνάει από τα σημεία Α, Γ και Ε. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(\mathrm{B}, \mathrm{BA})$ με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^\circ$. Άρα είναι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0.$$



$2^{ος}$ τρόπος

Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$ και ΒΑ = ΒΓ, οπότε θα είναι ΒΓ = ΒΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Αν φέρουμε το ύψος του από την κορυφή Β, έστω ΒΖ, $Z \in \Gamma E$, τότε η ΒΖ είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΓΕ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΒΖ με την ΑΕ. Τότε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΚΕ είναι ίσα, γιατί έχουν:

$B\Gamma = BE$, ΒΚ κοινή πλευρά και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{B}E$.

Άρα έχουμε:

$$B\hat{\Gamma}K = B\hat{E}K$$

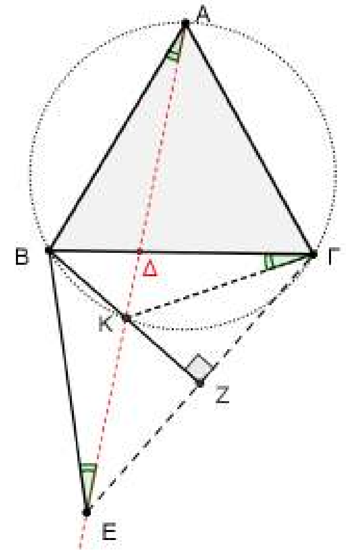
και αφού $B\hat{E}K = B\hat{A}K$ έπεται ότι $B\hat{\Gamma}K = B\hat{A}K$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΚΓ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$Z\hat{K}E = B\hat{K}A \text{ (ως κατά κορυφή)}$$

$B\hat{K}A = B\hat{\Gamma}A = 60^\circ$ (από το εγγράψιμο ΑΒΚΓ).

Άρα είναι

$$A\hat{E}\Gamma = K\hat{E}Z = 90^\circ - E\hat{K}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^0.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \text{ και } B = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A < B$, **(β)** $A < \frac{1}{5990}$.

Λύση

(α) Σε κάθε κλασματικό παράγοντα του Α της μορφής $\frac{2\nu-1}{2\nu+2}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$, αντιστοιχεί ένας κλασματικός παράγοντας του Β της μορφής $\frac{2\nu}{2\nu+3}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$.

Επειδή ισχύει:

$$\frac{2\nu-1}{2\nu+2} < \frac{2\nu}{2\nu+3} \Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu - 3 < 4\nu^2 + 4\nu \Leftrightarrow -3 < 0,$$

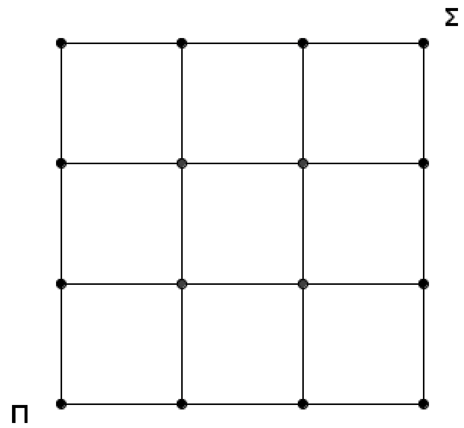
για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, άρα και για $\nu = 1,2,\ldots,299$, με πολλαπλασιασμό των παραπάνω 299 ανισοτήτων με θετικούς όρους κατά μέλη, προκύπτει η ανισότητα $A < B$.

(β) Επειδή είναι $A > 0$, από την ανισότητα $A < B$ με πολλαπλασιασμό των δύο μελών της επί Α, λαμβάνουμε:

$$A^2 < A\cdot B = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{599\cdot 600\cdot 601} < \frac{1}{100\cdot 599^2} = \frac{1}{5990^2} \Rightarrow A < \frac{1}{5990}.$$

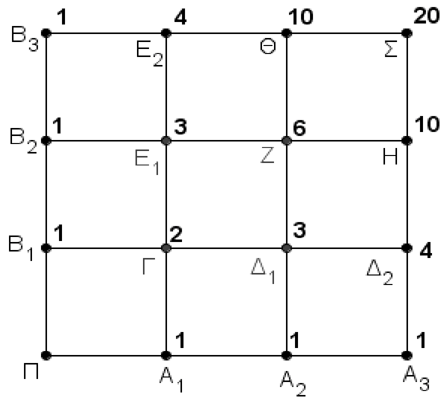
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



Λύση

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει κάποιος μαθητής όλες τις διασταυρώσεις μέχρι να φτάσει στο σχολείο.



Προφανώς στις διασταυρώσεις A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2, B_3, μπορεί κάποιος μαθητής να μετακινηθεί με ένα μόνο τρόπο, διότι μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά ή προς τα άνω.

Στις υπόλοιπες διασταυρώσεις, μπορεί να μετακινηθεί με το άθροισμα των τρόπων που μπορεί να μετακινηθεί προς τις πλησιέστερες διασταυρώσεις που βρίσκονται αριστερά και προς τα κάτω.

Έτσι όλες οι δυνατές διαδρομές από τις οποίες μπορεί να φτάσει κάποιος στο σχολείο, είναι συνολικά 20. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, δύο τουλάχιστον μαθητές θα ακολουθήσουν οπωσδήποτε την ίδια διαδρομή, εφόσον ο αριθμός των μαθητών είναι $k \geq 21$. Άρα η ελάχιστη τιμή του k είναι 21.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

Λύση

Αρκεί να υπάρχουν $a,b\in\mathbb{N}^*$ με $(a,b)=1$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{9n-1}{n+7}=\frac{a^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$n=\frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2}=\frac{7(a^2-9b^2)+64b^2}{9b^2-a^2}=-7+\frac{64b^2}{9b^2-a^2} \qquad (2)$$

Επειδή είναι $(a,b)=1$, έπεται ότι $(a^2,b^2)=1$ και $(9b^2-a^2,b^2)=1$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο αριθμός n είναι ακέραιος, αν, και μόνον αν, ο ακέραιος $9b^2-a^2$ είναι διαιρέτης του 64.

Επειδή οι αριθμοί a,b και n είναι θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι $9b^2-a^2\geq 8$, οπότε θα είναι:

$$9b^2-a^2=(3b+a)(3b-a)\in\{8,16,32,64\}. \qquad (3)$$

Επειδή οι παράγοντες $3b+a$, $3b-a$ έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 6 και διαφορά πολλαπλάσιο του 2 και είναι $3b+a>3b-a$, από τη σχέση (3) οι μόνες δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$(3b+a,3b-a)=(4,2) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(8,4) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(16,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,1) \text{ ή } (a,b)=(2,2) \text{ ή } (a,b)=(7,3).$$

Το ζευγάρι $(a,b)=(2,2)$ απορρίπτεται, γιατί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a,b είναι 2, οπότε προκύπτουν τελικά οι τιμές $n=1$ ή $n=11$.

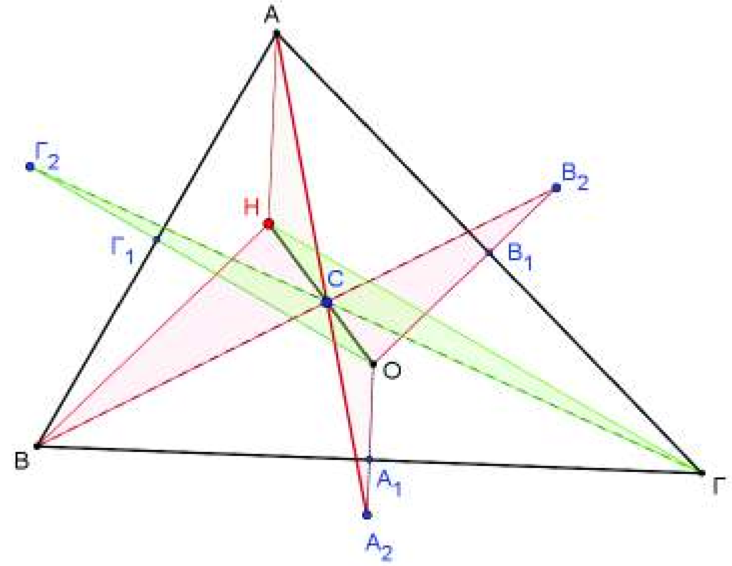
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1,\Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2,\Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda>0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2,\mathrm{BB}_2,\Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$. Τότε θα ισχύει $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OA_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA_1}$, καταλήγουμε στη σχέση: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{OA_2}$.

Αν τώρα C είναι το σημείο τομής των AA_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων CHA και COA_2), έχουμε: $\overrightarrow{HC} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{CO}$. Δηλαδή η AA_2 περνάει από το σημείο C που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.



Ομοίως, θα ισχύει $\overrightarrow{BH} = 2 \cdot \overrightarrow{OB_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OB_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB_1}$, καταλήγουμε

$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{OB_2}.$$

Αν τώρα C' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων $C'HA$ και $C'OB_2$), έχουμε: $\overrightarrow{HC'} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{C'O}$. Δηλαδή η BB_2 περνάει από το σημείο C' που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.

Αν τώρα C'' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH, τότε με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η $\Gamma\Gamma_2$ περνάει από το σημείο C'' που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.

Τα σημεία όμως C, C', C'' ταυτίζονται. Άρα οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\lambda = 1$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(2) Αν $\lambda = 2$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $ΑΒΓ$. Στη περίπτωση αυτή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ίσα και έχουν κοινό κύκλο του Euler.

(3) Σε κάθε περίπτωση τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι όμοια με τις πλευρές τους παράλληλες. Το ένα τρίγωνο είναι "εικόνα" του άλλου μέσα από ομοιοθεσίες, οπότε μπορεί να προκύψει λύση και μέσω ομοιοθεσιών.

(4) Λύσεις του προβλήματος μπορούν να δοθούν με χρήση Ααλυτικής Γεωμετρίας ή μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη φάση τη γνωστή ανισότητα $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = \frac{1}{2}\left(2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2xyz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xy \cdot xy + 2yz \cdot yz + 2zx \cdot zx + 2xyz\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[xy\left(x^2 + y^2\right) + yz\left(y^2 + z^2\right) + yz\left(y^2 + z^2\right) + 2xyz\right] \qquad (1) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz^2 - yzx^2 - zxy^2 + 2xyz\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz\left(x + y + z - 2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right], \quad (\text{αφού } x + y + z = 2).
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right], \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα ισχύει, όπως προκύπτει από την (1), όταν :

$$x = y = z \text{ ή } x = y, z = 0 \text{ ή } y = z, x = 0 \text{ ή } z = x, y = 0,$$

οπότε, αφού είναι $x + y + z = 2$, η ισότητα αληθεύει όταν:

$$\left(x, y, z\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ ή } \left(1,1,0\right) \text{ ή } \left(1,0,1\right) \text{ ή } \left(0,1,1\right). \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα $\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, θεωρώντας $\alpha = 2xy + 2yz + 2zx,\ \beta = x^2 + y^2 + z^2$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(2xy + 2yz + 2zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\frac{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x + y + z\right)^4 = 1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Από τις (2) και (4) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Η ισότητα στην ανισότητα (4) ισχύει όταν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2,$$

η οποία συναληθεύει με τις ισότητες (3) για $\left(x, y, z\right) = \left(1,1,0\right)$ ή $\left(1,0,1\right)$ ή $\left(0,1,1\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3,\ A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad (\mathrm{I}),$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.

Λύση

(α) Εφόσον ο μιγαδικός w είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$, θα ισχύει $w^2 + w + 1 = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία εξίσωση με w, έχουμε:

$$w^3 + w^2 + w = 0 \Leftrightarrow w^3 + \underbrace{w^2 + w + 1}_{0} = 1 \Leftrightarrow w^3 = 1.$$

Από τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $|w| = 1$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w^2 = -w - 1$, έχουμε:

$$z_1(-1 - w) + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow -z_1 - z_1 w + z_3 w + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_3 - z_1)w = z_1 - z_5.$$

Άρα

$$|(z_3 - z_1)w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow |z_3 - z_1||w| = |z_1 - z_5| \Leftrightarrow \boxed{|z_3 - z_1| = |z_1 - z_5|} \quad (\mathrm{A}).$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w = -w^2 - 1$, έχουμε:

$$z_1 w^2 + z_3(-w^2 - 1) + z_5 = 0 \Leftrightarrow z_1 w^2 - z_3 w^2 - z_3 + z_5 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_3)w^2 = z_5 - z_3.$$

Άρα έχουμε

$$|(z_1 - z_3)w^2| = |z_5 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - z_3||w^2| = |z_5 - z_3| \Leftrightarrow \boxed{|z_3 - z_1| = |z_5 - z_3|} \quad (\mathrm{B}).$$

Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε τις ισότητες:

$$|z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| = |z_5 - z_1|,$$

δηλαδή το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο.

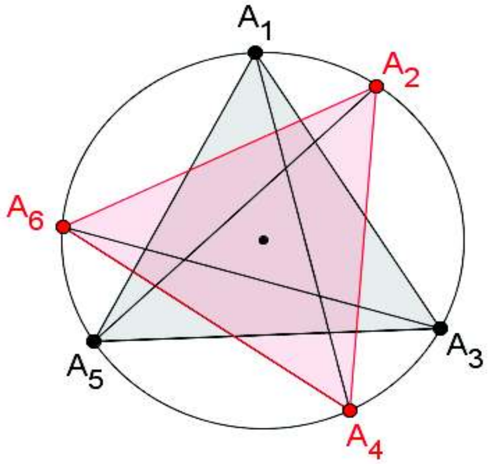
(β) Με όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τη σχέση (II)) αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο $A_2A_4A_6$ είναι ισόπλευρο.

Από γνωστή πρόταση της γεωμετρίας έχουμε ότι $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4$, οπότε χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_6 - z_1| = |z_1 - z_4|. \qquad (1)$$

Ομοίως, από την ισότητα $A_3A_2 + A_3A_4 = A_3A_6$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| = |z_3 - z_6|. \qquad (2)$$



Ομοίως , από την ισότητα $A_5A_4 + A_5A_6 = A_5A_2$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| = |z_2 - z_5|. \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$|z_1 - z_4| = |z_3 - z_6| = |z_2 - z_5|$$

λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|.$$