Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
«Ο Αρχιμήδης»
Θέματα Μεγάλων Τάξεων 1999-2009

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Συγκελάκης
(Για το www.mathematica.gr)

1999-2000

Θέμα 1^{ο}.

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α, ΑΔ = β. Ευθεία ε που περνάει από το κέντρο Ο του ορθογωνίου τέμνει τη πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε, έτσι ώστε $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{1}{2}$.

Αν το Μ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε στο εσωτερικό του ορθογωνίου, να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των α και β, έτσι ώστε οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΔ, ΑΒ, ΔΓ και ΒΓ, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Θέμα 2^{ο}.

Να προσδιορίσετε το πρώτο αριθμό ρ, αν ο αριθμός $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Θέμα 3^{ο}.

Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός πραγματικός αριθμός κ, για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)(3x^2+y^2)}} \le \frac{1}{\kappa}$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y.

Θέμα 4^{ο}.

Για τα υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$ του συνόλου Μ, ισχύει ότι $|A_i| > \frac{2}{3}|M|$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, 2000$, όπου με |Χ| συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Χ.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο α του Μ το οποίο ανήκει τουλάχιστον σε 1334 από τα υποσύνολα A_i.

2000-2001

Θέμα 1ο.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Οι ΒΔ, ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ και η ΔΕ τέμνει το τόξο ΑΒ, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Κ. Αν είναι $\mathbf{KA_1 \perp B\Gamma}$, $\mathbf{KB_1 \perp A\Gamma}$, $\mathbf{K\Gamma_1 \perp AB}$ και το σημείο Δ απέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ απόσταση ίση με x, ενώ το Ε απέχει από τις πλευρές ΓΑ, ΒΓ απόσταση ίση με y, τότε:

i. να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων KA_1, KB_1, $K\Gamma_1$ συναρτήσει των x, y και του λόγου

$$\lambda = \frac{\mathbf{K\Delta}}{\mathbf{E\Delta}}$$

ii. να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{KB}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{KA}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{K\Gamma}}$.

Θέμα 2ο.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α,β τέτοιοι ώστε το γινόμενο $\mathbf{(15\alpha + \beta)\cdot(\alpha + 15\beta)}$ να είναι μία δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

Θέμα 3ο.

Έστω $\mathbf{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathbf{f(1) = 3}$ και

$$\mathbf{f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2}},$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m, n με $\mathbf{m \geq n}$.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Θέμα 4ο.

Στο πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από 1 έως 500.

Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το εξής παιγνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιγνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δύο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο Α.

Αν ο Α αρχίζει πρώτος, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης;

2001-2002

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ με $\beta\gamma \neq 0$ ισχύει ότι $\dfrac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι

$$10(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma^3)\geq 2\alpha\beta+5\alpha\gamma .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας φοιτητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου διάβαζε το περασμένο καλοκαίρι για τις επαναληπτικές εξετάσεις ενός μαθήματος επί 37 μέρες, σύμφωνα με τους εξής κανόνες :

(ι) Κάθε μέρα διάβαζε μία τουλάχιστον ώρα.

(ιι) Κάθε μέρα διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών, χωρίς να ξεπερνάει τις 12 ώρες.

(ιιι) Συνολικά έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες.

Να αποδείξετε ότι υπήρξαν κάποιες διαδοχικές μέρες, κατά τη διάρκεια των οποίων διάβασε συνολικά 13 ώρες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma}>10^\circ$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}+10^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, έτσι ώστε $A\hat{\Gamma}E=10^\circ$, και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, έτσι ώστε $\Delta\hat{B}A=15^\circ$. Έστω $Z\neq A$ είναι σημείο τομής των περιγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ.

Να αποδείξετε ότι

$$Z\hat{B}A>Z\hat{\Gamma}A$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

(α) Για τους μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς p,q,r,a ισχύει ότι $pq=ra^2$, όπου ο r είναι πρώτος και οι p,q είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(p,q)=1$.

Να αποδείξετε ότι ένας από τους αριθμούς p,q είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος φυσικός αριθμός p, που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $p(2^{p+1}-1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

2002-2003

1. Αν a,b,c,d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$a^3+b^3+3ab=c+d=1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3+\left(b+\frac{1}{b}\right)^3+\left(c+\frac{1}{c}\right)^3+\left(d+\frac{1}{d}\right)^3\geq 40$$

2. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2+y^2-z(x+y)=2$$
$$y^2+z^2-x(y+z)=4$$
$$z^2+x^2-y(z+x)=8$$

3. Δίνεται κύκλος C κέντρου K και ακτίνας r, σημείο A πάνω στο κύκλο και σημείο P στο εξωτερικό του κύκλου C. Από το σημείο P θεωρούμε μεταβλητή ευθεία ε η οποία τέμνει τον κύκλο C στα B και Γ. Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο T του επιπέδου του κύκλου C τέτοιο ώστε το άθροισμα

$$HA^2 + HT^2$$

να είναι σταθερό (ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε).

4. Στο σύνολο Σ των σημείων ενός επιπέδου Π ορίζουμε μία πράξη $*$,δηλαδή μία απεικόνιση της μορφής

$$* : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$$

η οποία απεικονίζει κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων (X,Y) στο σημείο

$$X * Y = Z,$$

που είναι το συμμετρικό του X ως προς κέντρο συμμετρίας το Y.
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ στο επίπεδο Π. Είναι δυνατόν με διαδοχικές εφαρμογές της πράξης $*$ στο σύνολο των τριών κορυφών $\{A, B, \Gamma\}$ να λάβουμε την τέταρτη κορυφή Δ ; Δεν εξετάζονται οι πράξεις με σημεία που δεν ανήκουν στους άξονες x και y.

2003-2004

1. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού M για την οποία αληθεύει η ανισότητα

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2,$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_m$, όπου $m \geq 2$, τέτοιοι ώστε

$$x_1 < x_2 < ... < x_m \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + ... + \frac{1}{x_m^3} = 1.$$

3. Δίνεται κύκλος (O,ρ) και σημείο A εκτός αυτού. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία ε , διαφορετική της ευθείας AO, που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ, με το B μεταξύ των A και Γ. Στη συνέχεια φέρουμε τη συμμετρική ευθεία της ε, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία AO, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία E και Δ, με το E μεταξύ των A και Δ.
Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΒΓΔΕ διέρχονται από σταθερό σημείο, δηλαδή τέμνονται στο ίδιο πάντοτε σημείο ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε.

4. Έστω M ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών με 2004 στοιχεία. Αν γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου M το οποίο να ισούται με το άθροισμα δύο διαφορετικών στοιχείων του M, να προσδιορίσετε

την ελάχιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του Μ

2004-2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $P(2)=12$ και $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \dfrac{1}{\nu^3}$, $\nu = 2,3,\ldots$.

(i) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu < \dfrac{5}{4}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Αν ε είναι δεδομένος θετικός πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό $\nu_0 > 0$ που είναι τέτοιος ώστε , για κάθε $\nu > \nu_0$, να ισχύει

$$\left|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu\right| < \varepsilon$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω κυρτή γωνία $x\hat{O}y$. Εντός αυτής θεωρούμε τις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 έτσι ώστε $x\hat{O}x_1 = y_1\hat{O}y < \dfrac{x\hat{O}y}{3}$. Πάνω στις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 θεωρούμε σταθερά σημεία K, Λ ,αντίστοιχα, έτσι ώστε $\mathrm{OK} = \mathrm{O}\Lambda$. Αν τα σημεία Α και Β κινούνται πάνω στις πλευρές Ox και Oy, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\mathrm{A} \neq \mathrm{O}, \mathrm{B} \neq \mathrm{O}$ και το εμβαδόν του πολυγώνου ΟΑΚΛΒ να παραμένει σταθερό , να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΟΑΒ διέρχονται από σταθερό σημείο, διαφορετικό του Ο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται ότι ο αριθμός k είναι θετικός ακέραιος και ότι η εξίσωση

$$x^3 + y^3 - 2y(x^2 - xy + y^2) = k^2(x - y) \qquad (1)$$

έχει μία λύση (x_0, y_0), με $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^*$ και $x_0 \neq y_0$. Να αποδείξετε ότι :

(α) η εξίσωση (1) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων (x, y) με $x, y \in \mathbb{Z}$ και $x \neq y$.

(β) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε 11 επιπλέον διαφορετικές λύσεις (X, Y) της εξίσωσης (1), με $X, Y \in \mathbb{Z}^*$ και $X \neq Y$, όπου οι X, Y είναι συναρτήσεις των x_0, y_0.

2005-2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Πόσοι διαφορετικοί πενταψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν που το καθένα από τα ψηφία τους, εκτός του τελευταίου, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του επομένου ψηφίου τους;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Έστω n ένα θετικός ακέραιος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3n$ δεν έχει λύσεις στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Λ,Μ,Ν των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε η ΑΛ να είναι διχοτόμος της γωνίας Α και οι ΒΝ και ΓΜ να διέρχονται από ένα κοινό σημείο Σ της ΑΛ. Αν η γωνία ΑΛΒ ισούται με τη γωνία ΑΝΜ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΝΛ είναι ορθή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες:

i. $f(x+y+z)\le 3(xy+yz+zx)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z και

ii. Υπάρχει φυσικός αριθμός ν και συνάρτηση g τέτοια ώστε $g\big(g(x)\big)=x^{2\nu+1}$ και $f\big(g(x)\big)=g^2(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό **x.**

2006-2007

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ο αριθμός $2007+4^{\nu}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Αν α,β,γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\gamma-\beta)^4}{\alpha(\alpha+\beta-\gamma)}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^4}{\beta(\beta+\gamma-\alpha)}+\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^4}{\gamma(\alpha+\gamma-\beta)}\ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Σε κυκλικό δακτύλιο με ακτίνες R και $R-2r$, όπου $R=11r$, τοποθετούμε κύκλους ακτίνας r εφαπτόμενους των κύκλων που ορίζουν το δακτύλιο και ανά δύο μη επι-

καλυπτόμενους. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό των κύκλων που μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα στο δακτύλιο. (Δίνεται ότι: $9,94 < \sqrt{99} < 9,95$)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Σε κάθε τετράγωνο μιας σκακιέρας 2007×2007 τοποθετούμε έναν από τους αριθμούς 1 ή -1. Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i – γραμμής, $i = 1, 2, ..., 2007$, και με B_j το γινόμενο των αριθμών της j – στήλης, $j = 1, 2, ..., 2007$. Να αποδείξετε ότι:

$$A_1 + A_2 + ... + A_{2007} + B_1 + B_2 + ... + B_{2007} \neq 0 .$$

2007-2008

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $x, y \in (0,1)$ μεταβλητοί πραγματικοί αριθμοί και θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha = x + ym$ και $b = y + xm$ όπου a, b, m θετικοί ακέραιοι. Αν όλα τα ζεύγη ακεραίων που προκύπτουν καθώς τα x,y μεταβάλλονται είναι 119, να βρεθεί ο m.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $x^8 + 2^{2^x+2} = p$ όπου p πρώτος αριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα R=1. Αν Σ είναι η τομή των ευθειών που ορίζουν τα τμήματα ΗΚ και ΒΓ και επιπλέον ισχύει $ΚΣ \cdot ΚΗ = 1$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΗΓΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ είναι θετικοί ακέραιοι και k,t είναι ο ελάχιστος και ο μέγιστος από αυτούς αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\frac{tn}{k}} \geq \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n$$

2008-2009

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2, \mathrm{BB}_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5, \mathrm{A}_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2 + z_3w + z_5 = 0 \quad (\mathrm{I}),$$

$$z_2w^2 + z_4w + z_6 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|+|z_4-z_5|+|z_5-z_6|+|z_6-z_1| = = 3|z_1-z_4| = 3|z_2-z_5| = 3|z_3-z_6|$.