ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων

$$\mathrm{A} = (5^2 - 4^2)\cdot(2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2)\cdot 2024^0,$$

$$\mathrm{B} = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31)\cdot(1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3\cdot 5^2)$$

και να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{\mathrm{A}^{1012}}{\mathrm{B}^{1012}}$ ως δύναμη με βάση το 3.

Λύση

$$\mathrm{A} = (5^2 - 4^2)\cdot(2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2)\cdot 2024^0$$

$$= (25 - 16)\cdot(8 - 4 + 1) + (100 - 64)\cdot 1 = 9\cdot 5 + 36 = 45 + 36 = 81 = 3^4.$$

$$\mathrm{B} = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31)\cdot(1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3\cdot 5^2)$$

$$= (1 + 3 + 9 + 27 - 31)\cdot(1 + 5 + 25 + 125 - 3\cdot 25) = 9\cdot 81 = 3^2\cdot 3^4 = 3^6.$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^2}, \text{οπότε } \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)^{1012} = \left(\frac{3^4}{3^6}\right)^{1012} = (3^{-2})^{1012} = 3^{-2024}.$$

Πρόβλημα 2. Η Μαρία πριν να ανοίξουν τα Σχολεία πήγε για ψώνια στην αγορά. Εκεί από τα χρήματα που είχε μαζί της ξόδεψε το $\frac{1}{8}$ των χρημάτων της για να αγοράσει τετράδια και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων της για να αγοράσει βιβλία. Στη συνέχεια αγόρασε ένα φόρεμα με έκπτωση 20% ξοδεύοντας τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που της είχαν απομείνει. Μετά από αυτές τις αγορές η Μαρία διαπίστωσε ότι της είχαν απομείνει 50 ευρώ. Να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα είχε μαζί της η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά.

(β) Ποια ήταν η αρχική τιμή του φορέματος που αγόρασε πριν την έκπτωση.

Λύση

(α) Έστω ότι η Μαρία ξεκίνησε το πρωί με x ευρώ. Τότε πλήρωσε για τετράδια $\frac{x}{8}$ και για βιβλία $\frac{x}{4}$ ευρώ, δηλαδή

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{8} \text{ ευρώ}$$

οπότε της έμειναν

$$x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{3x}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5x}{8} + 50 \Leftrightarrow \; x = \frac{3x}{8} + \frac{10x}{24} + 50$$

$$\Leftrightarrow 24x = 9x + 10x + 1200 \Leftrightarrow 5x = 1200 \Leftrightarrow x = 240.$$

Άρα η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά είχε μαζί της 240 ευρώ.

(β) Η Μαρία πλήρωσε για το φόρεμα

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5x}{8} = \frac{10x}{24} = \frac{10 \cdot 240}{24} = 100 \text{ ευρώ}$$

οπότε η τιμή του πριν την έκπτωση του 20% ήταν

$$100 \cdot \frac{100}{80} = \frac{1000}{8} = 125 \text{ ευρώ.}$$

2ος τρόπος για το (α) ερώτημα

Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι είχαν απομείνει στη Μαρία $\frac{5x}{8}$ ευρώ.
Επομένως τα 50 ευρώ είναι το $\frac{1}{3} \cdot \frac{5x}{8} = \frac{5x}{24}$, οπότε έχουμε

$$\frac{5x}{24} = 50 \Rightarrow 5x = 1240 \Rightarrow x = 240.$$

Πρόβλημα 3

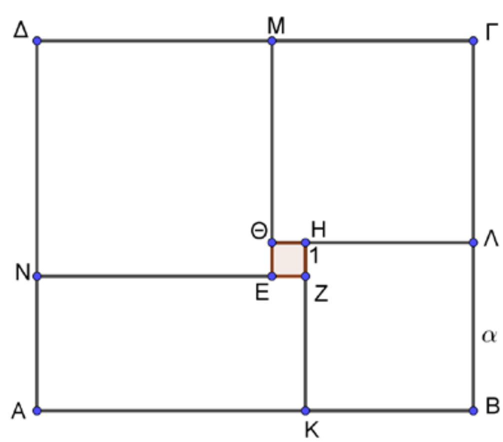
Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει υποδιαιρεθεί στα τετράγωνα

ΚΒΛΗ, ΕΖΗΘ, ΘΛΓΜ, ΝΕΜΔ

και στο ορθογώνιο ΑΚΖΝ.
Δίνεται ότι το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά ίση με 1, το τετράγωνο ΚΒΛΗ έχει πλευρά ίση με α και για το ορθογώνιο ΑΚΖΝ ισχύει η σχέση

$$\text{ΑΚ} = 2 \cdot \text{ΚΖ}.$$

Να βρείτε την τιμή του α και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Λύση
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$\Theta\Lambda = \alpha + 1, \qquad \mathrm{ME} = \mathrm{M}\Theta + \Theta\mathrm{E} = \Theta\Lambda + \Theta\mathrm{E} = \alpha + 2,$$

$$\mathrm{AK} = \mathrm{NZ} = \mathrm{NE} + \mathrm{EZ} = \mathrm{ME} + \mathrm{EZ} = \alpha + 3, \mathrm{AN} = \mathrm{KZ} = \alpha - 1.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{AK} = 2 \cdot \mathrm{KZ} \Leftrightarrow \alpha + 3 = 2 \cdot (\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha + 3 = 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

Άρα είναι

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AK} + \mathrm{KB} = \alpha + 3 + \alpha - 1 = 2\alpha + 2 = 12,$$

$$\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Lambda + \Lambda\Gamma = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = 11,$$

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = 12 \cdot 11 = 131.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.
(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους μ, ν έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}$$

Λύση
(α) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

(β) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμητή του κλάσματος $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο διαιρετών του 2024 η οποία να ισούται με 1. Έχουμε

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23 - 2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} - \frac{2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{1}{88} - \frac{1}{92}$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.
(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

(α) $\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta = 1100\alpha + 11\beta = 11 \cdot 100\alpha + 11\beta$

$$= 11 \cdot (100\alpha + \beta) = \text{πολ.}11.$$

(β) Επειδή αριθμός $\mathrm{A} = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4 έπεται ότι ο ακέραιος $\overline{\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε πρέπει:

$$\beta = 0 \text{ ή } \beta = 4 \text{ ή } \beta = 8. \qquad (1)$$

Επειδή αριθμός $\mathrm{A} = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 9, έπεται ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή $2(\alpha+\beta) \in \{9, 18, 27, 36\}$, οπότε

$$\alpha + \beta = 9 \text{ ή } \alpha + \beta = 18 \qquad (2)$$

- Αν $\beta = 0$ προκύπτει ότι $\alpha = 9$ και $\mathrm{A} = 9900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$.
- Αν $\beta = 4$ προκύπτει ότι $\alpha = 5$ και
  $\mathrm{A} = 5544 = 11 \cdot 504 = 11 \cdot 9 \cdot 56 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = 11 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^3$.
- Αν $\beta = 8$ προκύπτει ότι $\alpha = 1$ και
  $\mathrm{A} = 1188 = 11 \cdot 108 = 11 \cdot 9 \cdot 12 = 11 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 3^3 \cdot 2^2$.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu+2)^2 + 3\nu + 6}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu+2)^2 + (3\nu+2) + 4}{3\nu + 2} =$$

$$= 3\nu + 3 + \frac{4}{3\nu + 2}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3\nu + 2) \mid 4 \Rightarrow 3\nu + 2 \in \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}.$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι: $\nu \in \{-2, -1, 0\}$.

Πρόβλημα 3

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιγνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιγνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιγνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιγνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.
(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιγνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Λύση
(α) Στην πρώτη φάση κάθε ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες 13 δύο φορές 2 φορές, οπότε έχουμε συνολικά $13 + 13 = 26$ αγωνιστικές σε κάθε μία από τις οποίες διεξάγονται $14 : 2 = 7$ παιγνίδια. Έτσι έχουμε στην πρώτη φάση

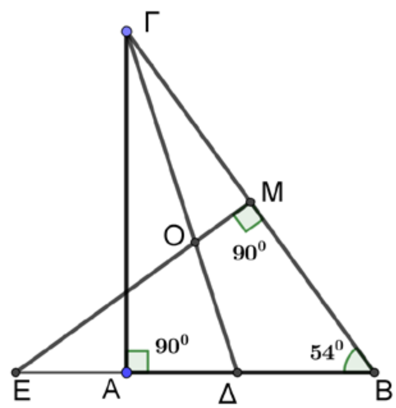
$$26 \cdot 7 = 182 \text{ παιγνίδια.}$$

Ομοίως στον όμιλο των 6 πρώτων ομάδων διεξάγονται: $10 \cdot 3 = 30$ παιγνίδια, ενώ στο όμιλο των υπόλοιπων 8 ομάδων διεξάγονται $4 \cdot 7 = 28$ παιγνίδια.

Άρα συνολικά έχουμε $182 + 30 + 28 = 240$ παιγνίδια.

(β) Αν όλα τα παιγνίδια έληγαν με νίκη μιας ομάδας, τότε θα είχαμε συνολικά το μέγιστο δυνατό αριθμό βαθμών, δηλαδή $240 \cdot 3 = 720$. Επειδή οι συνολικοί βαθμοί ήταν 677, αυτό σημαίνει ότι είχαμε και ισόπαλα παιγνίδια στα οποία οι βαθμοί για τις δύο ομάδες ήταν 2, δηλαδή κάθε ισόπαλο παιγνίδι μείωνε τον αριθμό των βαθμών κατά 1. Άρα τα ισόπαλα παιγνίδια ήταν $720 - 677 = 43$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^0$ και $\widehat{B} = 54^0$. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ στο σημείο Ο και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Έστω $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$.
(α) Να αποδείξετε ότι:
(i) $OB = O\Gamma = OE$
(ii) $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ συναρτήσει των μηκών των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σημείωση. *Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.*

Λύση
1. Φέρουμε το τμήμα ΟΒ. Επειδή ΟΜ μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ έπεται ότι:

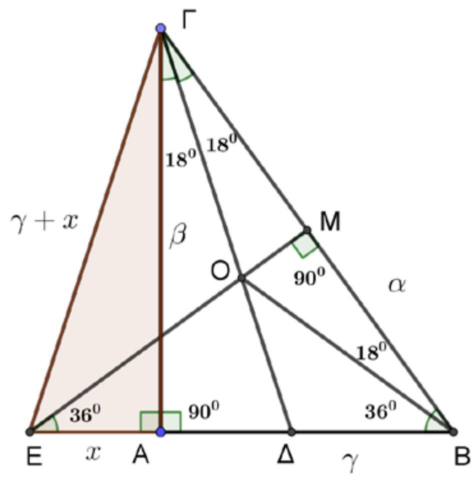
$$OB = O\Gamma.$$

Τότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$O\widehat{B}\Gamma = O\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{90^0 - 54^0}{2} = 18^0.$$

Άρα έχουμε:

$$O\widehat{B}E = \widehat{B} - O\widehat{B}\Gamma = 54^0 - 18^0 = 36^0.$$



Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΕ έχουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = 90^0 - \hat{\mathrm{B}} = 90^0 - 54^0 = 36^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} \Rightarrow \mathrm{OEB}$ ισοσκελές με $\mathrm{OB} = \mathrm{OE}$.
Άρα έχουμε αποδείξει ότι: $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE}$.

(ii) Η γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = 54^0 + 18^0 = 72^0.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ ($\mathrm{EB} = \mathrm{E\Gamma}$), έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot \hat{\mathrm{B}} = 180^0 - 2 \cdot 54^0 = 72^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ και συνεπώς το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$.

2. Έστω $\mathrm{AE} = x$. Επειδή ΕΜ μεσοκάθετη της ΒΓ θα είναι $\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EB} = \gamma + x$.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\beta^2 + x^2 = (\gamma + x)^2 \Rightarrow \beta^2 + x^2 = \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x \Rightarrow 2\gamma x = \beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^{10} - \nu^6 - \nu^4 + 1}{\nu^7 - \nu^6 - \nu + 1}$$

είναι σύνθετος ακέραιος, για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$.

Λύση

Ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^7-\nu^6-\nu+1=\nu^6(\nu-1)-(\nu-1)=(\nu-1)(\nu^6-1)$$
$$=(\nu-1)(\nu^3-1)(\nu^3+1)>0,$$

για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 2$. Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^{10}-\nu^6-\nu^4+1=\nu^6(\nu^4-1)-(\nu^4-1)=(\nu^4-1)(\nu^6-1)$$

$$=(\nu^2-1)(\nu^2+1)(\nu^6-1)=(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2+1)(\nu^6-1).$$

Άρα το κλάσμα γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{\nu^{10}-\nu^6-\nu^4+1}{\nu^7-\nu^6-\nu+1}=\frac{(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2+1)(\nu^6-1)}{(\nu-1)(\nu^6-1)}=(\nu+1)(\nu^2+1)$$

και είναι σύνθετος ακέραιος, αφού οι αριθμοί $\nu+1$ και ν^2+1 είναι θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 2, για κάθε $\nu\geq 2$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓμε $\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ$. Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΑΓκαι έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ν ως προς το Β και έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΝΛ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΓ.

Λύση

Λύση. **(1ος τρόπος)** Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία η $\widehat{\mathrm{K N \Lambda}}$ είναι συμπληρωματική της $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$. Αφού η $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$ συμπληρωματική της $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\Lambda$. Έχουμε:

1. $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{N}}\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{N}\widehat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Lambda}$

Πράγματι, η ΒΓ είναι μεσοκάθετος του ΝΚ και άρα το τρίγωνο ΝΛΚ είναι ισοσκελές.

2. $\mathbf{NM}\parallel\mathbf{B\Gamma}$ **και** $\mathbf{NM}=\mathbf{BK}$.

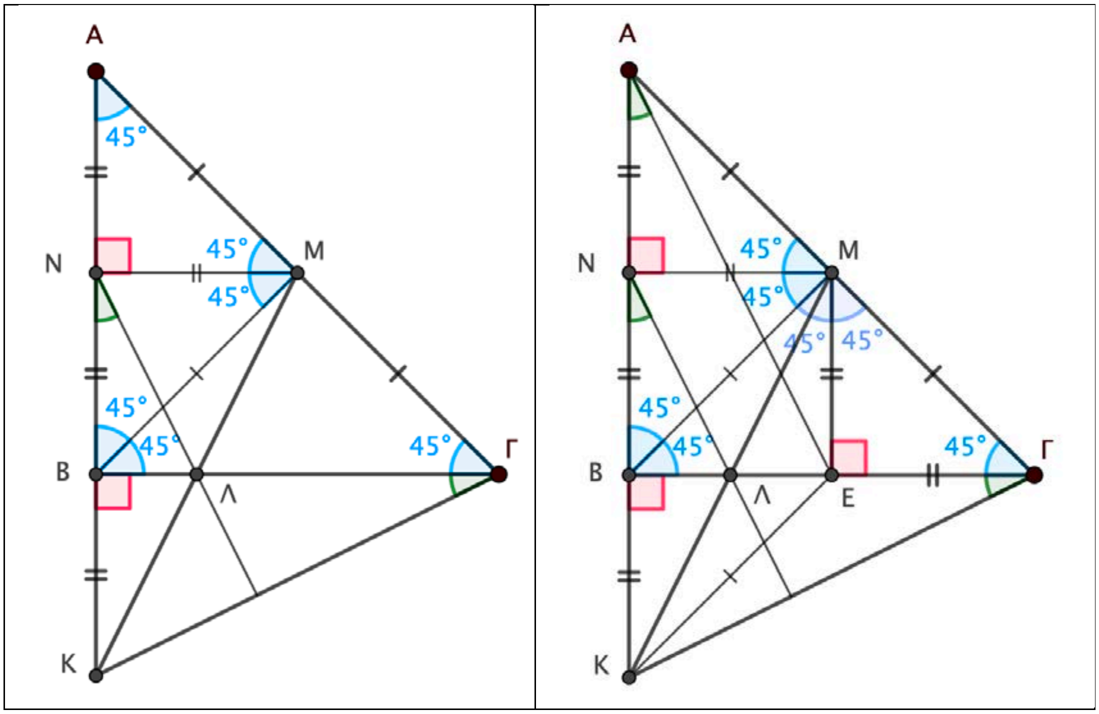
Πράγματι, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}$. Το Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ, οπότε η ΒΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΓ. Έτσι το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, αφού $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=45^\circ$.
Αφού το σημείο Ν είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και $\mathrm{AM}=\mathrm{MB}$, η ΝΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΒ. Άρα $\mathrm{MN}\perp\mathrm{AB}$, και τα τρίγωνα ΑΝΜ και ΒΝΜ είναι ισοσκελή ορθογώνια. Έτσι $\mathrm{NM}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{NM}=\mathrm{AN}=\mathrm{NB}=\mathrm{BK}$.

3. **Τα τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα**.

Πράγματι, είναι $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M}=90^\circ=\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, $\mathrm{KN}=\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{NM}=\mathrm{BK}$. Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα, και άρα $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$.

4. $\mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{K}=\mathbf{K}\widehat{\mathbf{N}}\boldsymbol{\Lambda}$**.**

Από την ισότητα των τριγώνων, έπεται ότι $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\Lambda$, όπως θέλαμε. Συνεπώς, $\mathrm{N\Lambda}\perp\mathrm{K\Gamma}$.



(2ος τρόπος) Έστω E το μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Παρατηρούμε ότι

1. $\mathbf{B\widehat{A}E = B\widehat{\Gamma}K}$.

Πράγματι**,** τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $\mathrm{\Gamma BK}$ είναι ίσα, αφού έχουμε $\mathrm{AB = B\Gamma}$ και $\mathrm{BK = NB = \frac{AB}{2} = BE}$. Συνεπώς, $\mathrm{B\widehat{A}E = B\widehat{\Gamma}K}$.
Άρα η $\mathrm{B\widehat{A}E}$ είναι συμπληρωματική της $\mathrm{B\widehat{K}\Gamma}$, και αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{K\widehat{N}\Lambda = B\widehat{A}E}$.

2. **Το $\boldsymbol{\Lambda}$ είναι το μέσο της $\mathbf{BE}$.**

Πράγματι, όπως στον πρώτο τρόπο, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\mathrm{ME\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού το M ανήκει στη μεσοκάθετη του $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BM\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, και κατά συνέπεια, το M ανήκει και στη μεσοκάθετη του $\mathrm{B\Gamma}$. Άρα $\mathrm{ME \perp B\Gamma}$ και $\mathrm{ME = E\Gamma = B\Gamma/2 = AB/2 = BK}$. Αφού οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, τα τρίγωνα $\mathrm{KB\Lambda}$ και $\mathrm{ME\Lambda}$ είναι ίσα. Συνεπώς, $\mathrm{B\Lambda = \Lambda E}$, δηλ. το Λ είναι το μέσο της BE.

3. $\mathbf{\widehat{KN\Lambda} = \widehat{BAE}}$.

Από το Θεώρημα Θαλή ή αφού το N είναι το μέσο της AB και το Λ είναι το μέσο της BE, έπεται ότι $\mathrm{N\Lambda \parallel AE}$. Άρα, $\mathrm{K\widehat{N}\Lambda = B\widehat{A}E}$, ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς, $\mathrm{N\Lambda \perp K\Gamma}$, όπως θέλαμε.

<u>Σχόλια.</u>

1. Εναλλακτικά, στον πρώτο τρόπο, ο ισχυρισμός 2 έπεται ως εξής: Αφού το N είναι το μέσο της πλευράς AB και το M είναι το μέσο της υποτείνουσας $\mathrm{A\Gamma}$, είναι $\mathrm{NM \parallel B\Gamma}$ και $\mathrm{NM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = BK}$.

2. Για τον ισχυρισμό 2 του δεύτερου τρόπο έχουμε εναλλακτικά: Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΕΒΚ
είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε $\mathrm{ME} \parallel \mathrm{BK}$, και αφού $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 45^{\circ} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K}$, και $\mathrm{MB} \parallel \mathrm{EK}$. Συνεπώς, το ΒΜΕΚ είναι παραλληλόγραμμο, κι άρα οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επίσης, εναλλακτικά, αφού$\mathrm{NM} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ και το Β είναι το μέσο του τμήματος ΝΚ, έπεται ότι το Λ είναι το μέσο της ΚΜ και $\mathrm{B\Lambda} = \frac{\mathrm{NM}}{2} = \mathrm{BE}/2$. Συνεπώς, το Λ είναι το μέσο της ΒΕ

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε ο καθένας από αυτούς να ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο άλλων.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω ότι υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha = (\beta+\gamma)^2 \\ \beta = (\gamma+\alpha)^2 \\ \gamma = (\alpha+\beta)^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma & (1) \\ \beta = \gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha & (2) \\ \gamma = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta & (3) \end{Bmatrix}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της δεύτερης από την πρώτη και της τρίτης από τη δεύτερη λαμβάνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha-\beta = (\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2\gamma) \\ \beta-\gamma = (\gamma-\beta)(\beta+\gamma+2\alpha) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha+\beta+2\gamma = -1 \\ \beta+\gamma+2\alpha = -1 \end{Bmatrix},$$

αφού $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma - \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha, \text{ άτοπο.}$$

2ος τρόπος.

Έστω ότι υπάρχουν οι ζητούμενοι αριθμοί. Αν x είναι ένας από τους αριθμούς α, β, γ και $S = \alpha+\beta+\gamma$, τότε:

$$x = (S-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - (2S+1)x + S^2 = 0 \qquad (1)$$

Αν υπάρχουν δύο αριθμοί $x_1 \neq x_2$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1), τότε $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ και από τους τύπους Vieta προκύπτει ότι $x_1 + x_2 = 2S+1 > S$, που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

Πρόβλημα 4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha+\beta+\gamma = 6 \text{ και } \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 9,$$

να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)}.$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε:

$$\alpha^2+9=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$$
$$\beta^2+9=\beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)$$
$$\gamma^2+9=\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι οι αριθμοί $(\alpha+\beta),(\beta+\gamma),(\gamma+\alpha)$, είναι ομόσημοι, και αφού $(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=12>0$, έπεται ότι:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)>0$$

Άρα έχουμε:

$$A=\alpha\beta\gamma+\sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)}=\alpha\beta\gamma+|(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)|$$
$$=\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6\cdot 9=54.$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους ν που είναι λύσεις του συστήματος των ανισώσεων:

$$-45\leq\frac{2025}{45-\nu}\ \text{ και }\ \frac{2025}{45-\nu}\leq 45-\nu.$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $0\leq\nu<45$. Τότε $45-\nu>0$ και έχουμε:

$$-45\leq\frac{2025}{45-\nu}\Leftrightarrow -2025+45\nu\leq 2025\Leftrightarrow \nu\leq 90 \qquad (1)$$
$$\frac{2025}{45-\nu}\leq 45-\nu\Leftrightarrow 2025\leq(45-\nu)^2\Leftrightarrow 45-\nu\geq 45\Leftrightarrow \nu\leq 0 \quad (2)$$

Οι ανισώσεις (1) και (2), υπό τη συνθήκη $0\leq\nu<45$, συναληθεύουν μόνο για $\nu=0$.

2. $\nu>45$. Τότε $45-\nu<0$ και έχουμε:

$$-45\leq\frac{2025}{45-\nu}\Leftrightarrow -2025+45\nu\geq 2025\Leftrightarrow \nu\geq 90 \qquad (3)$$
$$\frac{2025}{45-\nu}\leq 45-\nu\Leftrightarrow 2025\geq(45-\nu)^2\Leftrightarrow -45+\nu\leq 45\Leftrightarrow \nu\leq 90 \quad (4)$$

Οι ανισώσεις (3) και (4) συναληθεύουν μόνο για $\nu=90$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εξωτερικό του, στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΓ με το Β, τέτοιο ώστε $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}=90^0$ και $\mathrm{AE}=2\cdot\mathrm{E\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΕΔ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

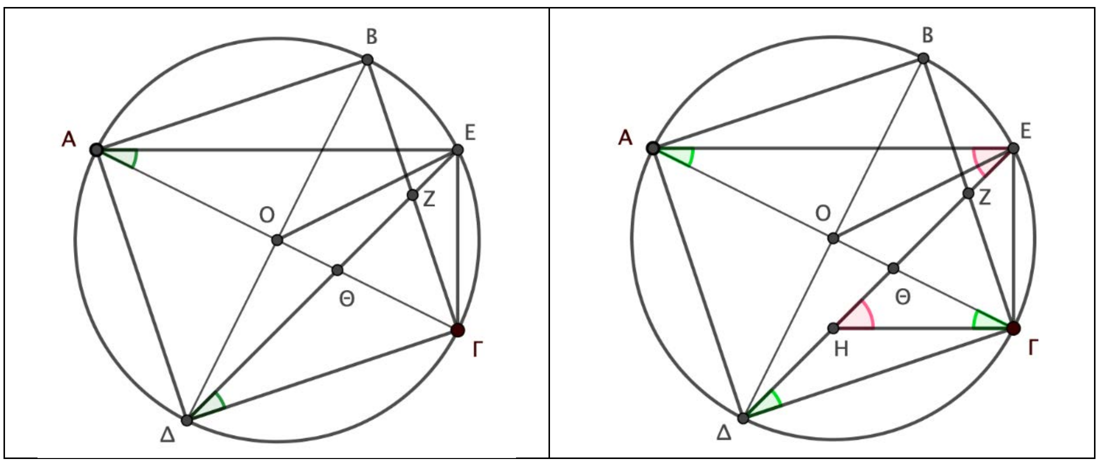
Λύση
Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου. Το Ο είναι το μέσο της ΑΓ, οπότε η ΕΟ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΓ και άρα ισούται με το μισό της. Έτσι,

$$\mathrm{OE} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OA} = \mathrm{O\Delta} = \mathrm{OB}.$$

Επομένως, το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Ε, Γ, και Δ, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ.

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΕΔ με την πλευρά ΒΓ. Αφού οι εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου οι οποίες βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες, έπεται ότι

$$\mathrm{E\widehat{A}\Gamma} = \mathrm{Z\widehat{\Delta}\Gamma}.$$



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΓκαι ΖΔΓείναι όμοια. Αφού ΔΓ = ΒΓ, έχουμε

$$\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και τριγωνομετρικά ως εξής:

$$\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \text{εφ}\mathrm{Z\widehat{\Delta}\Gamma} = \text{εφ}\mathrm{E\widehat{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

(2^{ος} **τρόπος**) Έστω Θ το σημείο τομής της ΕΔ με την ΑΓ και Η το σημείο τομής της ΕΔ με την παράλληλη ευθεία προς την ΑΕ από το Γ. Τότε τρίγωνα ΑΕΘ και ΓΗΘ είναι όμοια, κι αφού $\mathrm{\Gamma\widehat{H}\Theta} = \mathrm{H\widehat{E}A} = 45^{\circ} = \mathrm{H\widehat{E}\Gamma}$, το τρίγωνο ΗΓΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ΗΓ=ΕΓ=ΑΕ/2. Έτσι

$$\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta\Gamma}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{H\Gamma}} = 2$$

και άρα

$$\frac{2 \cdot \mathrm{ΟΓ}}{\mathrm{ΘΓ}} = \frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΘΓ}} = 1 + \frac{\mathrm{ΑΘ}}{\mathrm{ΘΓ}} = 3$$

Άρα $\mathrm{ΟΓ}:\mathrm{ΘΓ} = 3:2$, οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρο του ΔΒΓ. Άρα το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ.

Πρόβλημα 3. Τα 22 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του θέσεις δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στη σειρά διαδοχικά 3 ή περισσότερα αγόρια, γιατί τότε ένα αγόρι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά να υπάρχουν το πολύ 2 αγόρια. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχει κάποιο κορίτσι που έχει δίπλα του δυο αγόρια, γιατί τότε ένα κορίτσι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά διαδοχικά να υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορίτσια.
Έστω Κ ο αριθμός των κοριτσιών και ν_K οι ομάδες κοριτσιών πάνω στον κύκλο. Έστω Α ο αριθμός των αγοριών και ν_A οι ομάδες αγοριών πάνω στον κύκλο. Για κάθε ομάδα κοριτσιών πρέπει να ακολουθεί μία ομάδα αγοριών, γιατί διαφορετικά θα υπάρχει αγόρι με δύο γειτονικά αγόρια, δηλαδή πρέπει $\nu_K = \nu_A$.
Αν υποθέσουμε ότι $K \leq 11$, τότε $\nu_\kappa \leq 5$, οπότε $\nu_A \leq 5$ και $\mathrm{A} \leq 10$.
Άρα $\mathrm{K} + \mathrm{A} \leq 21$, άτοπο.
Άρα πρέπει $K \geq 12$. Παρατηρούμε ότι για Κ =12 μπορεί να υπάρχει υπόθεση του προβλήματος ως εξής:

$$AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KKKK$$

Πρόβλημα 4. Από όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) που ικανοποιούν την

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$$

να βρείτε το ζεύγος με το μικρότερο δυνατό m.

Λύση

Μετά την απαλοιφή παρονομαστών, γράφουμε την εξίσωση στην μορφή

$$2024n - 2024m - mn = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2024 - m)(2024 + n) = 2024^2.$$

Για να βρούμε το μικρότερο δυνατό m, αρκεί ο $2024 - m < 2024$, να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός διαιρέτης του 2024^2, που είναι μικρότερος του 2024.
Παρατηρούμε ότι $2024^2 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2$ και για να βρούμε τον μεγαλύτερο διαιρέτη που δεν ξεπερνά τον 2024, αρκεί να ελέγξουμε τους

$$23^2 \cdot 2, 23 \cdot 11 \cdot 4, 11^2 \cdot 16, 11 \cdot 64.$$

Παρατηρούμε ότι ο $11^2 \cdot 16 = 1936$ είναι ο μεγαλύτερος, άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του m είναι $2024 - 1936 = 88$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε $n = 92$. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{1}{88} - \frac{1}{92} = \frac{1}{2024}.$$

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Έστω Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΗ και ΓΗ, αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα σημεία τομής της ευθείας ΜΝ με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ΚΗ με την ΑΜ και έστω Ε το σημείο τομής της ευθείας ΛΗ με την ΑΝ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ.

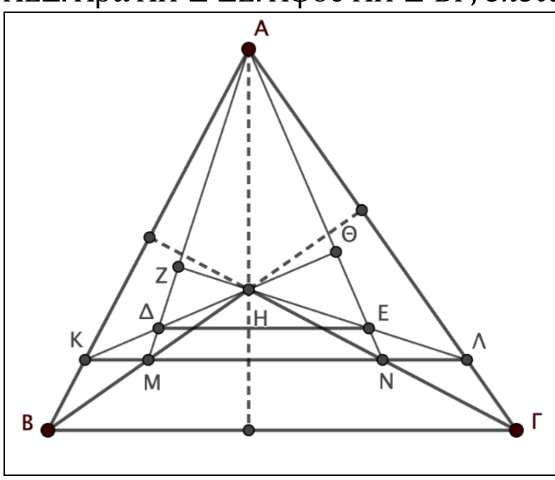
Λύση (1ος τρόπος)

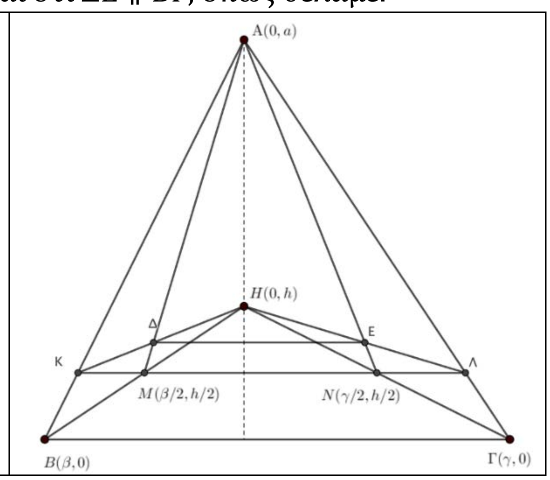
Αφού τα Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΗ και ΓΗ, αντίστοιχα, η ευθεία ΜΝ είναι παράλληλη στην ΒΓ, οπότε ΑΗ ⊥ ΚΛ.

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΛΗ με την ΑΜ και έστω Θ το σημείο τομής της ΚΗ με την ΑΝ.

Το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΜΛ, αφού είναι ΑΗ ⊥ ΜΛ και ΜΗ ⊥ ΑΛ. Συνεπώς, ΛΖ ⊥ ΑΜ. Ομοίως, το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΝΚ, αφού είναι ΑΗ ⊥ ΝΚ και ΝΗ ⊥ ΑΚ. Συνεπώς, ΚΘ ⊥ ΑΝ.

Αφού ΕΖ ⊥ ΑΔ και ΔΘ ⊥ ΑΕ, έπεται ότι το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΔ. Άρα ΑΗ ⊥ ΔΕ. Αφού ΑΗ ⊥ ΒΓ, έπεται ότι ΔΕ ∥ ΒΓ, όπως θέλαμε.





(**2ος τρόπος**) Τοποθετούμε το τρίγωνο σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ώστε Α$(0, \alpha)$, Β$(\beta, 0)$, Γ$(\gamma, 0)$, και Η$(0, h)$. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΓ είναι

$$\text{ΑΓ}: y = -\frac{\alpha}{\gamma}x + \alpha$$

Αφού η εξίσωση της ΜΝ είναι $y=\frac{h}{2}$, το σημείο Λ είναι Λ$(\frac{\gamma(2\alpha-h)}{2\alpha},\frac{h}{2})$, οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ΗΛ είναι

$$\text{ΗΛ}: y=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}x+h$$

Αφού Ν$(\gamma/2, h/2)$, εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ΑΝ είναι

$$\text{ΑΝ}: y=\frac{-2\alpha+h}{\gamma}x+\alpha$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΝ και ΗΛ, δηλ. του Ε, είναι η λύση του συστήματος των δυο τελευταίων εξισώσεων. Έχουμε

$$\frac{-2\alpha+h}{\gamma}x+\alpha=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}x+h$$

οπότε

$$\left(\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}+\frac{-2\alpha+h}{\gamma}\right)x=h-\alpha$$

Πολλαπλασιάζοντας με γ και κάνοντας τις πράξεις στα αριστερά παίρνουμε

$$\frac{-4\alpha^2+5\alpha h-h^2}{2\alpha-h}x=\gamma(h-\alpha)$$

Είναι $-4\alpha^2+5\alpha h-h^2=(4\alpha-h)(h-\alpha)$, οπότε παίρνουμε $x=\frac{\gamma(2\alpha-h)}{4\alpha-h}$, και

$$y=-\frac{\alpha h}{\gamma(2\alpha-h)}\cdot\frac{\gamma(2\alpha-h)}{4\alpha-h}+h=\frac{3\alpha h-h^2}{4\alpha-h}.$$

Παρατηρούμε ότι η τεταγμένη του Ε εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του Α, και του Γ. Άρα η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΒΓ και το συμπέρασμα έπεται.

Σχόλιο. Όπως είναι φανερό από τον 2ο τρόπο, δεν απαιτείται το Η να είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ για να ισχύει το συμπερασμα. Αρκεί μόνο το Η να είναι σημείο του ύψους από την κορυφή Α.

(**3ος τρόπος**) Μπορούμε να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μενελάου (Βιβλίο ΟΕΔΒ, σελ. 165):

Από το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο ΑΝΓ για την ευθεία ΗΕΛ έχουμε

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΝ}}\cdot\frac{\text{ΝΗ}}{\text{ΗΓ}}\cdot\frac{\text{ΓΛ}}{\text{ΛΑ}}=1$$

Αφού το Ν είναι το μέσο του ΗΓ έχουμε $\frac{\text{ΝΗ}}{\text{ΗΓ}}=\frac{1}{2}$, οπότε παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EN}} = 2 \cdot \frac{\Lambda\mathrm{A}}{\Gamma\Lambda}$$

Ομοίως,

$$\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{M}} = 2 \cdot \frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{BK}}$$

Αφού ΚΛ ∥ ΒΓ, έχουμε $\frac{\Lambda\mathrm{A}}{\Gamma\Lambda} = \frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{BK}}$ οπότε από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{M}}$$

Άρα ΔΕ ∥ ΜΝ, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν και τις τρεις επόμενες εξισώσεις:

$$4x + 3y^3 = z^5$$

$$4y + 3z^3 = x^5$$

$$4z + 3x^3 = y^5.$$

Λύση

Με αφαίρεση της δεύτερης από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$4(x-y) + 3(y^3 - z^3) = z^5 - x^5 \qquad (1)$$

Με αφαίρεση της δεύτερης από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$4(z-y) + 3(x^3 - z^3) = y^5 - x^5 \qquad (2)$$

Επειδή οι τρεις εξισώσεις είναι κυκλικά συμμετρικές ως προς $x, y, z,$ διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $x \le y < z$ ή $x < y \le z$, τότε για τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$4(x-y) + 3(y^3 - z^3) < 0 \le z^5 - x^5, \text{ άτοπο.}$$

2. Αν $x \le z < y$ ή $x < z \le y$, τότε για τα δύο μέλη της σχέσης (2) έχουμε:

$$4(z-y) + 3(x^3 - z^3) < 0 \le y^5 - x^5, \text{ άτοπο.}$$

3. $x = y = z$.

Τότε προκύπτει η εξίσωση

$$x^5 - 3x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 4 \text{ ή } x^2 = -1 \text{ (μη δεκτή).}$$

Επομένως, έχουμε τις λύσεις

$$(x,y,z)=(0,0,0),\qquad (x,y,z)=(2,2,2),\qquad (x,y,z)=(-2,-2,-2).$$

Πρόβλημα 3. Τα 26 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στη σειρά διαδοχικά 3 ή περισσότερα αγόρια, γιατί τότε ένα αγόρι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά να υπάρχουν το πολύ 2 αγόρια. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχει κάποιο κορίτσι που έχει δίπλα του δυο αγόρια, γιατί τότε ένα κορίτσι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά διαδοχικά να υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορίτσια.
Έστω Κ ο αριθμός των κοριτσιών και ν_K οι ομάδες κοριτσιών πάνω στον κύκλο. Έστω Α ο αριθμός των αγοριών και ν_A οι ομάδες αγοριών πάνω στον κύκλο. Για κάθε ομάδα κοριτσιών πρέπει να ακολουθεί μία ομάδα αγοριών, γιατί διαφορετικά θα υπάρχει αγόρι με δύο γειτονικά αγόρια, δηλαδή πρέπει $\nu_K=\nu_A$.
Αν υποθέσουμε ότι $K\le 13$, τότε $\nu_\kappa\le 6$, οπότε $\nu_A\le 6$ και $\mathrm{A}\le 12$.
Άρα $\mathrm{K}+\mathrm{A}\le 25$, άτοπο.
Άρα πρέπει $K\ge 14$. Παρατηρούμε ότι για Κ =14 μπορεί να υπάρχει υπόθεση του προβλήματος ως εξής:

$$AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KKKK$$

Πρόβλημα 4. Τα πολυώνυμα

$$P(x)=(4x^2+22x+19)^{1012},$$

$$Q(x)=a_{2024}x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+\cdots+a_1x+a_0,$$

όπου $a_0,a_1,\dots,a_{2024}$ ακέραιοι, είναι ίσα.
Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}}{2+4+\cdots+2022+2024}$$

είναι άρτιος ακέραιος.

Λύση. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι ίσος με

$$2+4+\cdots+2022+2024=2(1+2+\cdots+1011+1012)=1012\cdot 1013.$$

Έστω

$$P(x)=(4x^2+22x+19)^{1012}=a_{2024}x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Δίνεται ότι οι συντελεστές a_i είναι ακέραιοι για $0\le i\le 2024$. Επίσης,

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}=\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{45^{1012}-1}{2}.$$

Επειδή

$$45^{1012}-1=(45^4)^{253}-1=(45^4-1)((45^4)^{252}+(45^4)^{251}+\cdots+45^4+1),$$

έχουμε

$$45^{1012}-1=(45^2-1)(45^2+1)\cdot N=2024\cdot 2026\cdot N,$$

όπου $N=(45^4)^{252}+(45^4)^{251}+\cdots+45^4+1=45^{1008}+45^{1004}+\cdots+45^4+1.$

Συνεπώς,

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_{2023}}{2+4+\cdots+2022+2024}=\frac{2024\cdot 2026\cdot N}{2\cdot 1012\cdot 1013}=2N,$$

δηλαδή η αριθμητική τιμή του κλάσματος ισούται με άρτιο ακέραιο αριθμό.